

中国数学会 2023 年度陈省身数学奖获奖人 雷震教授获奖工作介绍

雷震教授主要从事源自于流体力学和数学物理的非线性偏微分方程解的定性与定量理论研究，在不可压 Navier-Stokes 方程、弹性力学方程、粘弹性流体力学方程、磁流体力学方程、波动方程、Klein-Gordon 方程等研究领域做出了重要贡献。

不可压 Navier-Stokes 方程是描述粘性流体运动的基本方程组。其解的整体正则性是偏微分方程理论研究的关键对象之一，被列入“七个千禧奖问题”。1934 年，Leray(沃尔夫奖获得者) 建立了满足能量不等式的弱解的存在性理论；1982 年，Caffarelli (沃尔夫奖、邵逸夫数学奖、阿贝尔奖获得者)，Kohn 与 Nirenberg (阿贝尔奖获得者) 得到了时空中奇点集合测度的上界估计。之后，数学家在数学工具容许的范围内取得了丰富的研究成果，但解的整体正则性问题尚未取得突破。

进入二十一世纪，该问题的关键研究兴趣聚焦于第一型奇点的排除、证明轴对称解的正则性与寻找奇点。雷震教授在轴对称古代解的 Liouville 性质、量化 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 部分正则性理论和对流非线性项的稳定机制等方面系统深入的研究受到了广泛认可。其非常突出的两个贡献如下：

(1) 轴对称解。为了研究轴对称解的整体正则性，通常使用“blow-up”技巧对可能的奇点进行无限放大，这会得到方程的有界的古代解。古代解是否是平凡的是非常重要的研究目标 (Seregin, Šverák 等于 2009 年首次提出轴对称古代解的平凡性猜想)，这对研究奇点的结构至关重要。

雷震与合作者任潇和张旗通过改进经典的 Nash-Moser 技术使其适用于各向异性情况，并利用新发掘的对流项的内蕴结构，建立了关于 z 变量具有周期性的轴对称有界古代解的 Liouville 定理。他与张旗之前还建立了 $L^\infty(0, T; BMO^{-1})$ 空间中有界的古代解的 Liouville 定理，得到了 $L^\infty(0, T; BMO^{-1})$ 空间中有界的解的整体正则性。

这一空间是目前已知的 Navier-Stokes 方程组小初值解存在的最大空间，其一般有界解的正则性仍然是重要的公开问题（由 Koch 和 Tataru 提出）。雷震与张旗还证明了当一个有界无维量具 Log 型连续模估计时的轴对称解的整体正则性。此外，他与侯一钊教授合作，基于轴对称系统建立了首个满足能量关系及具有一系列与 Navier-Stokes 方程组类似非线性结构的三维模型方程，并进一步提出了对流项具有稳定性机制的出人意料的新观点。这些工作受到了沃尔夫奖获得者 Sinai、菲尔茨奖获得者陶哲轩等同行在其论文中的引用和好评。著名数学家 Okamoto 曾在论文中将侯与雷的模型与著名的 Fujita 模型、Constantin-Lax-Majda 模型（均为著名数学家，其中 Lax 为 Abel 奖获得者）做比较并指出了其在揭示对流项具有出人意料稳定性作用方面的优势。陶哲轩还在其博客中指出，由于侯与雷的工作，对真正的 Navier-Stokes 方程证明各类基于模型方程得到的结论可能存在真实挑战。

（2）一般解。雷震与任潇找到了一种排除第一型奇点的路径，即量化并改进 CKN 局部化的部分正则性判别法。通过“energy pigeonhole argument”与量化时空正则区域，他们得到了 Log 改进型的 CKN 部分正则性理论。这一理论应用于轴对称情形，可排除第一型奇点的存在性并改进现有已知结论，同时为排除非轴对称的一般情形的第一型奇点提供了一种可能的路径。基于这一理论并通过挖掘一般 Navier-Stokes 方程的内蕴“轴对称似”结构，他们与田刚合作改进了 Constantin-Fefferman（菲尔茨奖获得者）基于涡量方向向量的可观测的几何化正则性准则：如果涡旋方向始终指向上半球，那么奇点就不会发生。此外，雷震与林芳华合作，提出了新的解空间，并得到了初值小于一倍粘性系数的解的整体适定性，这使得“初始值充分小”这一通常需要满足的条件得以精准量化。已有十几篇同行论文在其标题中使用“Lei-Lin space”“Lei-Lin solution”等含有雷震姓氏的数学名词。

对不可压磁流体力学方程组、粘弹性流体力学方程组及弹性力学方程等与 Navier-Stokes 方程或者 Euler 方程耦合的复杂流体力学方程组，其相应的分析理论通常更为复杂，得到不平凡的美妙数学结论通常需要挖掘耦合项的非线性内蕴结构。雷震教授在二维不可压弹性力学方程组解的整体适定性、磁流体力学方程组解的整体适定