

# Furstenberg 与 Margulis 获颁 2020 年阿贝尔奖

The Norwegian Academy of Science and Letters

■ 整理：陆柱家 校对：童欣

## 1. 颁奖词

挪威科学与文学院决定将 2020 年的阿贝尔 (Abel Prize) 奖授予来自以色列耶路撒冷的希伯来大学的希勒尔·弗斯滕伯格 (Hillel Furstenberg) 和来自美国康涅狄格州纽黑文市的耶鲁大学的格雷戈里·马古利斯 (Gregory Margulis), “表彰其率先提出并在群论、数论和组合学中使用概率论和动力系统的方法”。

## 详细引文

概率论的一个中心分支是对随机游动的研究, 例如, 一位探索未知城市路线的旅行者, 通过扔硬币来决定在每个十字路口向左转还是向右转。Furstenberg 和 Margulis 发明了类似的随机游动方法, 用于研究线性群的结构, 例如, 线性群是在乘积与求逆运算下封闭的矩阵集合。通过随机选择矩阵的乘积, 人们试图描述结果是如何增长的, 以及这种增长对群结构的意义。

Furstenberg 和 Margulis 提出了富有远见且强有力的概念, 解决了棘手的问题, 并发现了群论、概率论、数论、组合数学和图论之间令人惊讶且富有成果的联系。他们的工作创立了一种思想流派, 该流派对数学及其应用的许多领域产生了深远的影响。

1963 年, Furstenberg 从研究矩阵的随机乘积出发, 提出了一个至关重要的概

---

参考 <http://www.abelprize.no/>, 整理并修改该网页上的中文稿。挪威科学与文学院准予本文出版。本文将刊于《数学译林》2020 年第 1 期。为了适应大众传播需要, 本文通讯转载时略作了文字修改。

念,并对其进行了分类,现在称为 Furstenberg 边界。他利用这一概念,给出了一个泊松型公式,以其边界值表示一般群上的调和函数。在上世纪 60 年代初与 Harry Kesten 合作进行的关于随机游动的研究中,他还获得了一个关于最大李雅普诺夫指数的正定性的重要准则。

1967 年, Furstenberg 受到丢番图逼近的启发,提出了遍历系统不相交的概念,该概念类似于整数的互素。事实证明,这一自然概念极其深入,可应用于广泛的领域,包括电气工程中的信号处理和滤波问题、分形集的几何结构、齐次流和数论。他的“ $\times 2 \times 3$  猜想”是一个非常简单的例子,它带来了许多进一步的发展。他考虑了在复单位圆上取平方和立方的两个映射,证明了这两个映射下唯一不变的闭集是有限的或整个圆。他的猜想指出,唯一的不变测度是有限的或旋转不变的。尽管许多数学家做了很多努力,但这个测度分类问题仍然未解决。

对按群表示不变测度的分类已经发展成为一个广泛的研究领域,该领域对量子算法的遍历性<sup>1</sup>、平移曲面 Margulis 对 Littlewood 猜想的看法以及 Marina Ratner 的惊人研究成果均产生影响。考虑到几何对象中的不变测度, Furstenberg 于 1972 年证明了双曲面型曲面极限圆流的唯一遍历性,该证明衍生出许多结果。

1977 年, Furstenberg 借助遍历理论和他的多重回复定理,对 Szemerédi 关于在正密度整数子集中存在任意长的算术级数的定理给出了令人震惊的新证明。在随后与 Yitzhak Katznelson、Benjamin Weiss 等人的合作中,他发现了 Szemerédi 定理更高维的和深远的推广,以及拓扑动力系统和遍历理论在 Ramsey 理论和加性组合学中的其他应用。这项工作影响了许多后来的发展,包括 Ben Green、陶哲轩和 Tamar Ziegler 关于哈代 - 利特尔伍德猜想和素数算术级数的工作。

---

<sup>1</sup> quantum arithmetic ergodicity, 似为“量子算术遍历性”更妥。——编注

Margulis 彻底改变了对半单群格的研究。群中的格是一个离散的子群，其商群的体积是有限的。20 世纪 70 年代中期，Margulis 在其“超刚性”和“算术性”定理中将半单群的这些格进行了分类。Armand Borel 和 Harish-Chandra 使用算术结构在半单群中构造了格，本质上将其作为大矩阵群中的取整数值矩阵群。正如 Atle Selberg 猜想的那样，Margulis 证明了所有秩大于或等于 2 的格都是由这种算术结构产生的。1978 年，Margulis 在他的“正规子群定理”中揭示了这些格的结构。他的技术的核心是对概率论方法（随机游动、Oseledets 定理、服从性、Furstenberg 边界）以及 Kazhdan (T) 性质的惊人应用。

Margulis 在其 1970 年的博士学位论文中，构造了严格负变曲率的紧黎曼流形的所谓“Bowen-Margulis 测度”。他利用测地流关于该测度的混合特性，证明了素数定理的一个类比，即小于给定长度的闭测地线数量的渐近公式。在此之前，唯一这样的计数结果是通过 Selberg 迹公式得出的，该公式仅适用于局部对称空间。从那时起，大量计数和均匀分布问题均使用 Margulis 的混合方法进行研究。

其方法的另一个引人注目的应用是 1984 年在数论中证明了几十年前的奥本海姆猜想：3 个变量或 3 个以上变量的非退化不定二次型要么是有理二次型的倍数，要么在整点取值是稠密的。

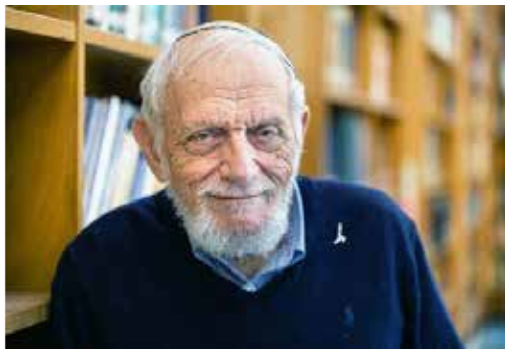
1973 年，Margulis 在图论中创造性地利用 Kazhdan (T) 性质构建了第一个已知的显式扩展图族。扩展图是具有高连通性的图。Mark Pinsky 提出的这个概念来自对通信系统网络的研究。扩展图现在是计算机科学和纠错码中使用的基本工具。1988 年，Margulis 构造了最佳扩展图，即现在所知的拉马努金图，它是由 Alex Lubotzky、Peter Sarnak 和 Ralph Phillips 独立发现的。

Furstenberg 和 Margulis 的影响远远超出了他们的研究成果和原始领域。从 Lie 理论、离散群和随机矩阵到计算机科学和图论，他们被广大的数学家们视为先驱。他们已经证明了概率论方法的普遍性，以及有效地跨越不同数学学科之间的边界，例如使纯数学与应用数学之间的传统二分法变模糊了。

## 2. 获奖人简介

### Hillel Furstenberg

当 Furstenberg 发表其早期的一篇文章时，有传言说他并非一个人，而是一群数学家的化名。该论文涵盖的思想覆盖诸多领域，真的不可能是一个人的成果吗？



Hillel Furstenberg

虽然这件事可能是杜撰的，但它说明了在 Furstenberg 整个学术生涯中存在的一个事实：

Furstenberg 拥有不同领域深厚的技术知识，并且在这些知识之间建立了深刻而令人惊讶的联系。尤其是，他在遍历理论领域做出了重要贡献，该理论在数论、几何学、组合学、群论和概率论中都有非常广泛的应用。

Furstenberg 1935 年出生于柏林，他来自一个犹太家庭。二战爆发的前几个月，他们设法离开德国，逃往美国。Furstenberg 的父亲死于途中，他则由母亲和姐姐抚养长大，后来他们生活在纽约的一个东正教社区。

当 Furstenberg 看到老师在解释著名定理陷入困境时，他开始对数学产生了浓厚的兴趣。这位学生喜欢自己寻找证明。他认为“有时候坏老师会教出好学生！”。他高中和大学就读于 Yeshiva 大学，这是位于纽约市的私立犹太教大学，并于 1955 年获得学士学位和理科硕士学位。大学期间他就已经发表论文。“关于一种不定式的说明”（Note on one type of indeterminate form, 1953）和“关于素数的无穷性”（On the infinitude of primes, 1955）均发表于《美国数学月刊》（American Mathematical Monthly）上，后者为欧几里德的著名定理（有无限多个素数）提供了拓扑证明。

后来 Furstenberg 前往普林斯顿大学攻读博士学位，他的导师是 Salomon

Bochner。他于 1958 年获得博士学位，其论文为《预报理论》（Prediction Theory）。当这篇论文于 1960 年发表时，一位评论家曾说：“这是一篇一流的、高度原创的博士学位论文，论述了一个非常难的主题。”

在普林斯顿大学和麻省理工学院分别担任了一年讲师后，他于 1961 年在明尼苏达大学获得第一份助理教授的工作。在 1963 年开始发表的一系列文章中，他凭借“半单李群的泊松公式”（A Poisson Formula for Semi-Simple Lie Groups）继续确立了作为独创性思考者的地位。他的研究表明，随机游动在一个群上的行为与该群的结构有着复杂的关系（现称“Furstenberg Boundary”的来源），这对格及李群的研究产生了巨大影响。

他被提升为明尼苏达大学的正教授，但在 1965 年，他离开美国前往耶路撒冷的希伯来大学，一直待在那里直到 2003 年退休。

在其 1967 年的论文“遍历理论中的不交性、极小集以及丢番图逼近中的一个问题”（Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation）中，Furstenberg 介绍了“不交性”的概念，这是遍历性系统中的一个概念，类似于整数的“互素性”。事实证明，该概念已广泛应用于数论、分形学、信号处理和电气工程等领域。

在其 1977 年的论文“对角测度的遍历行为和 Szemerédi 关于算术级数的定理”（Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions）中，Furstenberg 使用遍历理论中的方法证明了 Endre Szemerédi (2012 年阿贝尔奖获得者) 的著名结论，该结论指出，具有正上密度的整数的任何子集均包含任意长的算术级数。Furstenberg 的证明比 Szemerédi 更具概念性，并完全改变了这一领域。它的见解也变得富有成效，成为很多重要研究成果的依据，例如 Ben Green 和陶哲轩证明了素数序列包括任意长的算术级数。

Furstenberg 决定在以色列度过自己几乎所有的职业生涯，这使该国成为数学，

尤其是遍历理论的世界中心。在 1975-1976 学年，他与 Benjamin Weiss 一起在以色列高等研究院进行了为期一年的遍历理论研究，该研究被认为已改变了这一领域。

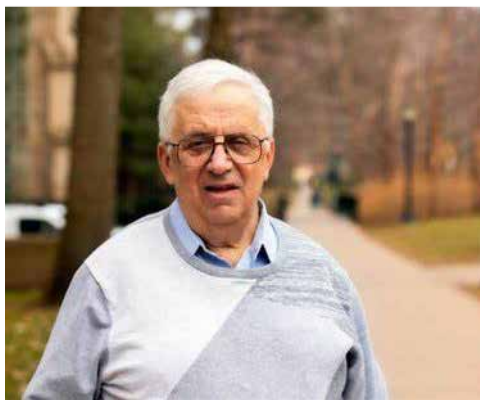
在其众多荣誉之中，Furstenberg 还获得了被视为以色列最高荣誉的以色列奖以及沃尔夫数学奖。他还是以色列科学院和美国文理科学院的院士。

Furstenberg 于 1958 年与专攻艺术和文化的杂志作家 Rochelle 结婚。他们有五位子女，十六位孙辈，以及越来越多的曾孙辈。

### Gregory Margulis

---

在辉煌的数学生涯中，Margulis 提出了很多颇具影响力的想法，解决了长期悬而未决的问题，并发现了不同数学领域之间的深层联系。他的标志性方法是以出奇和新颖的方式应用遍历理论，从而创造出一些全新的研究领域。



Gregory Margulis

他 1946 年出生于莫斯科，16 岁时因赢得国际数学奥林匹克竞赛银牌而获得了国际认可。他就读于莫斯科国立大学，1970 年在 Yakov Sinai（2014 年诺贝尔奖获得者）的指导下获得博士学位。他的博士学位论文提出了一个非常新颖的想法：他创立了一种测量方法（现称为 Bowen-Margulis 测度法），使他能够发现双曲空间几何的新特性。他的方法后来启发了很多新的问题和热门研究领域。

年仅 32 岁的 Margulis 凭借其对李群格的研究，尤其是算术和超刚性定理，赢得了 1978 年的菲尔兹奖。该算术定理指出，秩大于 2 的任一半单李群的不可约格

均是算术的，而超刚性定理指出，该格子的表示可扩张成周围李群的表示。超刚性定理证明了遍历理论新的应用，建立了强有力的新方法，在很多领域都颇具影响力。

1978年，Jacques Tits (2008年阿贝尔奖获得者)谈及 Margulis 时表示：“毫不夸张地说，他屡次解决了在当时看起来似乎完全无解的问题，让专家们为之一惊。”

然而，由于苏联当局拒绝为他提供签证去参加在芬兰赫尔辛基举行的颁奖典礼，Margulis 因此未能拿到菲尔兹奖。1979年，当苏联学者拥有更多的人身自由时，他才获准出国旅行。20世纪80年代期间，他访问了瑞士、法国和美国的多个研究机构，并于1991年定居耶鲁大学，此后便一直在那里工作。

在其职业生涯早期，Margulis 曾因犹太人出身遭到歧视。尽管他是该国最杰出的年轻数学家之一，却无法在莫斯科大学找到工作。相反，他在不太知名的信息传播问题研究所工作。然而，与该研究所同事们的接触让他有了一个举世瞩目的发现。他从同事那里了解到一种被称为“扩展图”的连通网络。Margulis 在数日之内便使用表示论（一个抽象的、看似无关的领域）中的概念创立了扩展图的第一个众所周知的例子。他的发现是史无前例的，而且广泛应用于计算机科学领域。

1978年，当 Margulis 公开现在称之为正规子群定理（关于李群中的格子）时，他再次展现了自己以出人意料的方式证明定理的技巧。他的证明一方面是一种非常原创的顺从群理论的组合，另一方面是表示论中的 Kazhdan 性质 (T)。

1984年，他采用遍历理论中的方法证明了奥本海姆猜想，这是一个于1929年首次提出的数论猜想。比结果更重要的是以这种方式运用遍历理论的整个想法，而这创造了一个新的领域，现称齐性 (homogenous) 动力学。最近三位菲尔兹奖获得者 Elon Lindenstrauss、Maryam Mirzakhani 以及 Akshay Venkatesh 的研究成果均基于 Margulis 的早期思想。

Margulis 的研究成果不仅丰富，而且涉及多个领域。2008 年，《Pure and Applied Mathematics Quarterly》刊登了一篇文章，列举了 Margulis 的主要成果，篇幅超过 50 页。

2001 年，Margulis 当选为美国国家科学院院士。他还是罗巴切夫斯基奖和沃尔夫奖获得者。

Margulis 与其夫人 Raisa (Raya) 育有一子，并有一个孙女。

### 关于阿贝尔奖

阿贝尔奖由挪威政府资助，奖金有 750 万挪威克朗 (834,000 美元)。该奖由挪威科学与文学院颁发。阿贝尔奖获得者的甄选以阿贝尔委员会的推荐为基础，该委员会由五名国际公认的数学家组成。了解更多信息，请访问 [www.abelprize.no](http://www.abelprize.no)