侯世达蝴蝶和十瓶干马蒂尼问题

Hofstadter's Butterfly & Dry Ten Martini Problem

尤建功

科学家总爱尝试做一些别人没做过的事情。1879 年，有个名叫霍尔（Edwin Hall）的美国物理学家做了一个实验，他在一块通电的金属板的垂直方向加了磁场，奇妙的事情发生了，他发现金属板的两侧产生了一个附加电场，即金属板两侧产生了电势差，这一现象就是霍尔效应，这个电势差也被称为霍尔电势 (见图 1)。

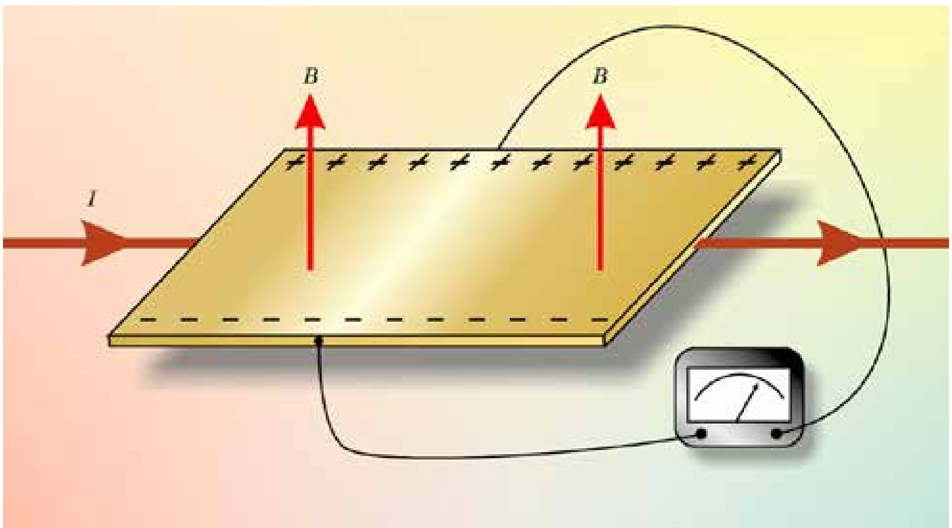

图 1. 霍尔效应

100 年后，一个名叫冯 • 克利青（Klaus von Klitzing）的物理学家重温经典，又做了这个实验。不过 100 年后，条件更好了，所以冯 • 克利青可以把实验做得更花哨，他用二维电子气代替金属板，并把实验环境温度降到很低。不可思议的事再次发生：冯 • 克利青发现，霍尔电势差并不连续响应磁场强度，

而是量子化响应，即当磁场强度增加时，霍尔电势可能不发生变化，如果把磁场强度继续增加到某个值时，霍尔电势跳跃一个固定单位。随着磁场强度的增加，这种跳跃现象不断出现，这就是整数量子霍尔效应（图 2）。

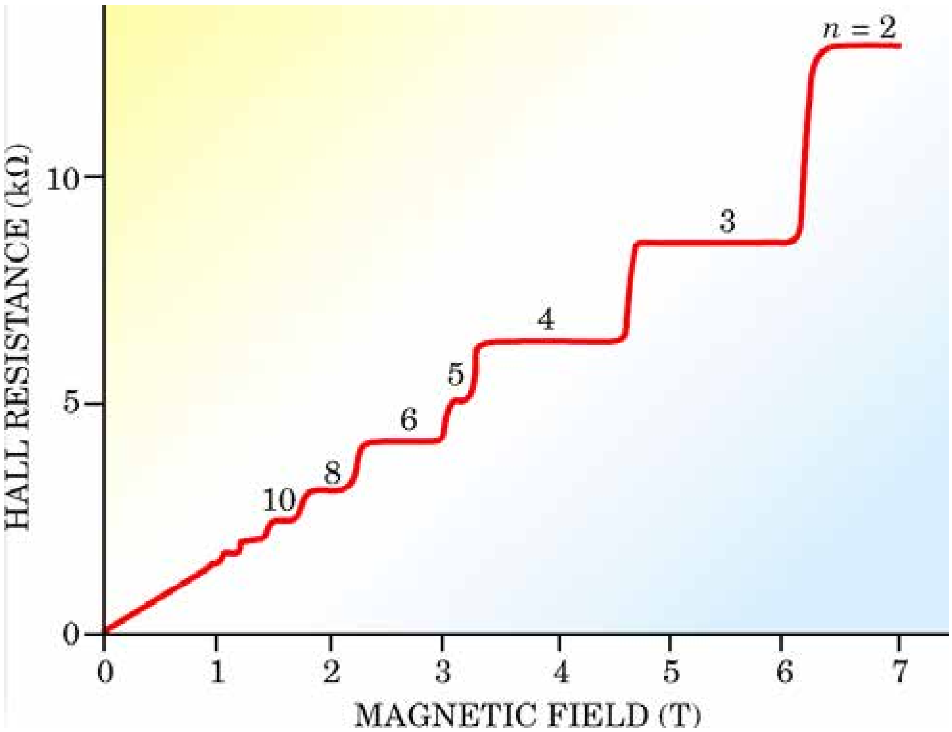

图 2. 量子霍尔效应

冯•克利青因为此发现获得 1985 年度诺贝尔物理学奖。据说 1975 年就有人根据数值计算结果预测到了这个现象，但预测者自己也不相信自己的预测[1]（看来做理论的要更自信一点）。

怎么解释这种现象呢？另一个人出场了，他叫劳夫林（Robert Laughlin）。他说之所以霍尔电势差是量子化的，是因为当费米能级落在能隙里（我们后

[1] T. Ando, Y. Matsumoto, Y. Uemura, Theory of Hall effect in a two-dimensional electron system, J. Phys. Soc. Jpn. 39(1975), 279–288.

面会介绍这个概念）的时候，霍尔电势差不会变化。当磁场强度继续增加时，能隙会向上移动，费米能级越过能隙的一刹那，霍尔电势会发生一次跳跃（劳夫林后来因为在分数量子霍尔效应方面的理论工作获得 1998 年诺贝尔物理学奖）。现在我们要提到另外一个物理学家，他叫索利斯（David James Thouless）。索利斯在康奈尔做学生的时候，曾经听卡茨（M. Kac）老师说过数学家和物理学家的区别：数学家是在简单的系统里发现复杂的性质，而物理学家是在复杂的系统里发现简单的性质。鉴于卡茨是一个能够自由行走于数学和物理里面的大神，索利斯深以为然，他觉得自己就是一个典型的物理学家，所以他要把量子霍尔效应这个复杂的问题转化为一个简单的问题。于是在 1982 年，索利斯刨根问底，他把电场取为 $a\cos(2\pi\frac{x}{a})+b\sin(2\pi\frac{y}{b})$，磁场取为 $(0, eBx)$，这样我们可以把描述这个现象的哈密顿算符具体写出来（有点复杂，这里就不写了，参见原文[2]）。索利斯用这个哈密顿算符的 Bloch 波把霍尔电势差具体计算出来，然后看看它是不是量子化的。经过一些简单的转化，索利斯说我们只要研究下面这个定义在 l^2 空间中的简单算子就可以了：

$$(Hu)_n = u_{n+1} + u_{n-1} + 2\lambda\cos(\theta + n\alpha)u_n \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

这个算子中的三个参数都有明确的物理意义：θ 是将二维问题转化为一维问题时出来的一个自由参数，称为相位；λ 由电场中的 a, b 确定；α 是单位磁通量。这个算子并不新鲜，以前就有。物理学家称这个算子的特征方程为哈珀方程。哈珀（H. Harper）的导师佩尔斯（Rudolf Ernst Peierls）最早研究这个模型，哈珀跟随导师做研究生时，佩尔斯让哈珀继续研究这个模型，现在这个模型被命名为哈珀模型，哈珀从而青史留名。看来找个好导师很重要哟。数学家把 H 叫做 Almost Mathieu 算子。当 α 为形如 p/q 的有理数时，这个算子本质上是一个对角线元素为 $2\lambda\cos(\theta + n\alpha)$，两条第一副对角线元素为 1，其它地方为零的 q 维对称矩阵。太简单了！当 α 为无理数时，这个算子可看作一个无穷维对称矩阵，样子和有限维一样：

[2] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potentials, PRL, vol. 49, no. 6(1982), 405-408.

$$\begin{pmatrix}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\ddots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
1 & 2\lambda\cos(\theta-\alpha) & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 1 & 2\lambda\cos(\theta) & 1 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 1 & 2\lambda\cos(\theta+\alpha) & 1 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 1 & 2\lambda\cos(\theta+2\alpha) & \\
 & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{pmatrix}$$

对一个矩阵而言，最重要的当然是特征值。对一个算子来说，当然就是特征值的推广，称为谱。Almost Mathieu 算子是一个有界线性自伴算子，我们知道它的谱集是实直线的一个有界闭子集。它长得是什么样子呢？这不是一个简单的问题（物理学家认为简单的系统对数学家来说其实没那么简单。一个原因是断定某个命题为真，数学家必须给出严格证明，而物理学家只要你举不出反例即可）。这个问题几乎没有什么人关注，原因是不知道为什么要去管这个谱集长成什么样。几乎没有不等于没有，1960 年代，有个自认为有数学天赋的年轻人叫侯世达（Douglas Hofstadter），踌躇满志地去伯克利学习数论，被虐了几年后，终于决定放弃数学，转行去俄勒冈大学修物理。物理也不容易，又被虐了很多年，一无所成。总得做点什么毕业吧，于是他把 Almost Mathieu 算子拿来，把 λ 取为 1，再挑出 50 个有理数 α 用他的小计算器算这个算子的谱（注意 α 为有理数时，谱依赖于 θ，这里谱是指对所有 θ 求并），然后在 (α, E) 平面上标出来，做完后，纸上出现了一个漂亮的图形（图 3），看上去像一只长着无穷多个翅膀的蝴蝶。撇开科学价值不谈，至少这里出现了美。数学家可能会很兴奋，因为很多数学家做数学的动机就是美。但物理学家就不一样了，他们要问这有啥用。侯世达的导师就是这样想的，他最初对侯世达的数值计算结果不以为然，不认为算几个数值然后标出来就算是物理研究。但导师最后还是放了侯世达一马，让他毕业了（要知道侯世达已经读了 7 年博士，顺便提一下，侯世达的老爸是 1961 年诺贝尔物理奖得主。当然后来他的导师也对这只蝴蝶极尽溢美之词）。这只蝴蝶很快变得很有名，被称为侯世达蝴蝶（所以我们做研究的时候只需要接受美的指引，无需太在意有没有用，美的东西一定会有用的）。顺便说一下，毕业后侯世达就不做物理了，他先是写了一本科普书，名

叫 GEB（*Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*）[3]，论证数学家哥德尔，画家艾舍尔和作曲家巴赫做了同样的工作，这本书得了普利策奖。侯世达现在是认知科学研究领域的著名专家。侯世达的一只脚在科学里，另一只脚在艺术里，他后来被选为美国艺术与科学院院士，实至名归。最近有一本书《量子世界的蝴蝶》[4]*Butterfly in the quantum world* 专门介绍侯世达和他的传奇蝴蝶，比我这里讲的要详细得多也精确得多，有兴趣的读者可以找来一看。石墨烯发现后，这只蝴蝶又被物理学家用实验测出来。物理学家只相信实验，眼见为实嘛。

下面开始说一点数学。前面说了 Almost Mathieu 算子的谱集是一个有界闭集，所以其补集为开集，可表示为至多可数个开区间的并。每一个开区间被称为一个谱隙，物理学家称为能隙。柏雷萨德（Jean Bellissard），约翰逊（Russell A. Johnson）和莫泽（Jürgen Moser）（KAM 理论创始人之一，曾当过国际数学联盟主席）等证明每一个能隙可以用一个整数来做标签，这个整数叫陈数，这个陈就是陈省身先生，陈数就是二维环面上线丛的陈示性类。做标签的意思是，每一个能隙可以计算出唯一的一个陈数。当然对有些陈数，没有能隙和它对应，这时能隙是塌陷的。如果把陈数和颜色对应起来（正数对应暖色调，负数对应冷色调，大小由颜色浓淡区分），可以得到一只彩色蝴蝶（图 4）。

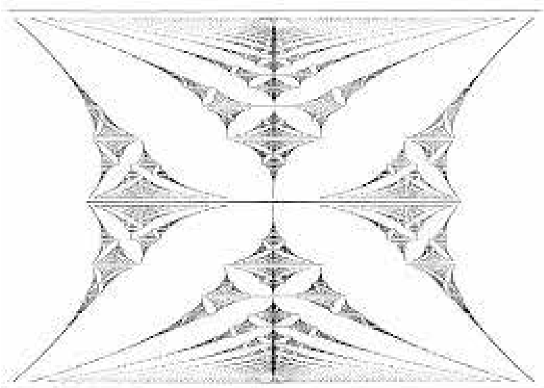

图 3. 侯世达蝴蝶

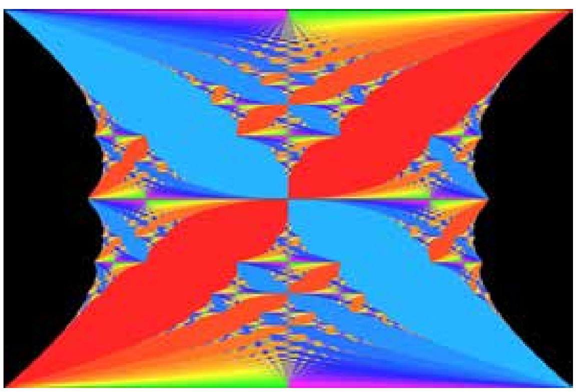

图 4. 彩色侯世达蝴蝶

[3] 该书有中译本《哥德尔、埃舍尔、巴赫：集异璧之大成》，商务印书馆出版，严勇、刘皓明、莫大伟译。
[4] Indubala I Satija, Butterfly in the Quantum World, Morgan & Claypool Publishers, 2016.

现在回到索利斯。索利斯等通过对具体模型的计算把整数值量子霍尔效应和陈数联系起来，而陈数是一个拓扑不变量。索利斯的计算表明如果对一个区间中的 λ 所有能隙都是打开的，就能解释量子霍尔效应。这个工作是索利斯获得 2016 年度诺贝尔物理奖的代表性工作之一。那么 Almost Mathieu 算子的能隙是打开的吗？索利斯在文章中说他们自己不会证，但他又说，你去看看侯世达的数值结果吧，看上去就是打开的。但是，我们要知道侯世达只算了 50 个有理数，还有其它有理数呢？还有无理数呢？也许对物理学家来说侯世达的数值结果就够了，但数学家更较真，你得给我证明！

Almost Mathieu 算子的谱隙是否都是打开的呢？早在 1980 年，卡茨就提出了这个问题，当时量子霍尔效应还没有被发现。前面已经提过卡茨，他是索利斯做学生时的老师，是索利斯心中能够在物理和数学中自由行走的大神。卡茨曾写过一篇著名的科普文章“你能听出鼓的形状吗？”（*Can you hear the shape of a drum*?），这个问题的答案是否定的，但至今仍是让数学家绞尽脑汁的热点问题。卡茨相信 Almost Mathieu 算子对任意的 $\lambda \neq 0$ 和任意的无理数 α，所有能隙都是打开的，即对每一个陈数都有一个能隙与之对应，但他不会证明。于是他向数学家喊话：如果谁能证明出来，他愿意送他十瓶马提尼（Martini）鸡尾酒作为奖赏（好幽默，说明纯粹科学家是几乎去功利的）。数学物理学家认为这是自己的菜，开始响应。最积极的是西蒙（Barry Simon），数学物理领域教父级的人物。他对这个问题的研究有些进展，但离解决相去甚远。西蒙越研究越觉得这个问题不简单，于是他建议分两步走，先证明一个弱一点的结果：谱集是康托集，这样就有无穷多个谱隙是打开的。西蒙把这个问题命名为 Ten Martini 问题（Ten Martini 问题又称 Azbel 猜测，1965 年由物理学家 Azbel 给出，数学里的好多猜测是物理学家给出的，看来做数学要多学点物理）。卡茨原始的问题，即所有谱隙是否都打开的问题，被西蒙命名为十瓶干马蒂尼问题（Dry Ten Martini Problem）。索利斯需要用到的实际上是后者。从上世纪 80 年代开始，数学家们各显神通，前赴后继地进攻这个问题，有的用 Anderson 局域化方法，有的用算子代数方法，有的用动力系统方法。最终 Ten Martini 问题被阿图尔 • 阿维拉（Artur Avila, 1979- ）和他的合作者

Jitomirskaya 在 2005 年完全解决（论文 2009 年发表于 *Annals of Math*[5]）。

1984 年卡茨谢世（希望不是这个问题闹的），阿维拉当然没有得到卡茨承诺的十瓶马蒂尼酒（其实卡茨奖赏的是 Dry Ten Martini 问题），但他 2014 年获得了菲尔兹奖，Ten Martini 问题是他的主要获奖工作之一（那个奖牌换十瓶马提尼鸡尾酒大概没有问题），而他的合作者 Jitomirskaya 也主要因此工作被评为美国艺术与科学院院士。

Dry Ten Martini 问题在物理文献中又被称为 Ten Martini 猜测，有些物理学家承认这个猜测成立并在此基础上继续前行（这一点上和黎曼假设有点类似）。Dry Ten Martini 问题也一直是数学家们关心的问题。常有人宣称证明或证否了这个命题。下面简述一下这个问题一波三折的研究过程，大家可以从中看到科学研究从来就不是一帆风顺的。

1990 年，Choi, Elliott 和 Yui 用算子代数方法首先在 Dry Ten Martini 问题的研究中取得进展[6]。

2003 年，Riedel 在某个前提假设下，证明了相反的结论：Ten Martini 问题不成立[7]。这个结论当时就没有得到认可，现在人们知道他假设的前提是错误的。2005 年 3 月，阿维拉和 Jitomirskaya 在 arxiv 上贴出文章声称完全解决了 Ten Martini 问题，同时还部分解决了 Dry Ten Martini 问题。仅仅一个月后，Riedel 于 arxiv 贴出文章宣称完全解决 Dry Ten Martini 问题（推翻了他自己以前已经发表的结论），显然 Riedel 宣称的结果比阿维拉 -Jitomirskaya 宣称的更强。阿维拉和 Jitomirskaya 的文章 2009 年在 *Annals of Math* 上发表并且是阿维拉 2014 年得菲尔兹奖的主要成果之一。2012 年，Riedel 贴在 arxiv 上

[5] A. Avila and S. Jitomirskaya, The Ten Martini Problem, Annals of Mathematics.170(2009), 303-342.
[6] M. Choi, G. A. Elliott and N. Yui, Gauss polynomials and the rotation algebra. Invent. Math. 99, (1990), 225-246.
[7] N. Riedel, The spectrum of a class of almost periodic operators, Int. J. Math. Sci. 36 (2003), 2277-2301.

的文章也正式发表[8]。尽管 Riedel 已经宣称完全解决了 Dry Ten Martini 问题并且论文已正式发表，人们还在继续研究这个问题。我们知道 Riedel 用的是算子代数方法，有趣的是算子代数权威、多伦多大学 Elliott 教授于 2014 年宣称他可以解决小位势情形的 Dry Ten Martini 问题，从而给出这个问题的部分解答[9]。2015 年，刘文才和袁小平对小位势情形 Dry Ten Matini 问题的研究也取得了一些进展[10]。

最近美国文学与艺术科学院院士 Jitomirskaya 等发表的综述文章中仍把 Dry Ten Martini 问题作为未解决的公开问题[11]。目前，数学家们还在继续研究这个问题并不断取得进展，已经接近于完全解决[12]。当然 Almost Mathieu 算子是位势取 cos$x$ 的特殊准周期薛定谔算子，除了它以外，还有哪些准周期薛定谔算子的所有谱隙也是打开的？到目前为止还没有第二个具体的例子。

最后，我们指出包括 Mathieu 算子在内的准周期薛定谔算子不仅是量子霍尔效应的数学模型，它的物理背景还包括准晶、拓扑绝缘体和冷原子调控等。当然数学家关心这个问题是因为它和许多现代数学理论和方法都有联系，是一个好的数学问题。这类算子的其它性质，如谱测度、态密度、Anderson 局域化等是目前活跃的研究课题，很多问题均有待解决。

此文源自《数学文化》2019 年第 1 期。感谢 Global Science Press 允许本通讯转载。

[8] N. Riedel, Persistence of gaps in the spectrum of certain almost periodic operators. Advances in Theoretical and Mathematical Physics 16.2 (2012): 693-712.

[9] G. A. Elliott, Thoughts on the Dry Ten Martini Problem, http: //www.fields.utoronto.ca /programs /scientific /13-14 /COSY2014.

[10] W. Liu and X. Yuan, Spectral gaps of Almost Mathieu Operator in exponential regime, J. Fractal Geom. 2 (2015), no. 1, 1-51.

[11] C. A. Marx, and S.Jitomirskaya, Dynamics and spectral theory of quasi-periodic Schrödinger-type operators. Ergodic Theory and Dynamical Systems 37.8 (2017): 2353-2393.

[12] J. You, Almost reducibility and applications, Proceedings of ICM 2018.