

痴迷“铺地砖”的数学家

■ 作者：丁佳 来源：中国科学报



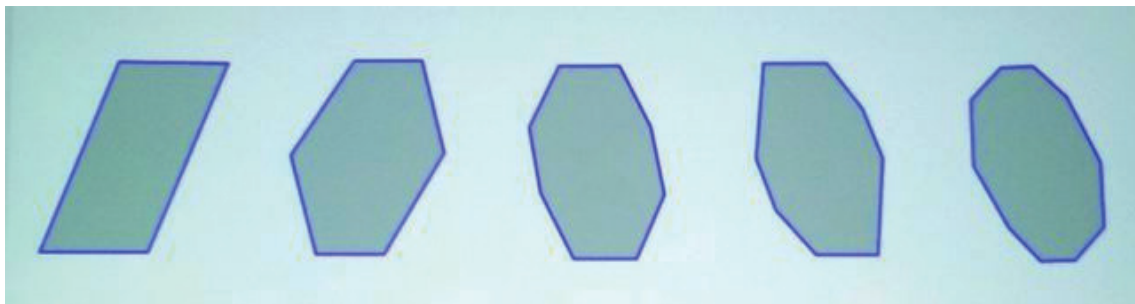
宗传明

每当宗传明开始“闭关”，谢绝一切会议、邀约时，熟悉他的人就能大致猜出，他又要“憋大招”了。

数学研究以抽象闻名，外行往往难以理解。但是，有些外行看起来简单的问题，却能让世界上最聪明的大脑感到束手无策。

例如，什么形状的瓷砖能够无缝隙地铺满整个平面。

近日，《美国数学会通告》在2020年第五期以“重点论文”形式发表了天津大学教授宗传明的一项研究成果，对数学中的经典铺砌问题给出了一系列完整答案。



可以构成平面五重晶格铺砌的五种凸形砖

世纪难题

早在古希腊时期，亚里士多德和阿基米德等先哲就已经发现了一些铺砌构图；1619年，开普勒对阿基米德铺砌取得了完整的分类；1885年，俄国科学家费德洛夫系统地研究了最有规律的铺砌，也奠定了晶体学理论基础。

然而，1916年前后，当德国数学家比伯巴赫首次提出平面全等铺砌体的分类问题后，数学家前进的脚步却似乎慢了下来。

“这样一个貌似简单的几何问题难倒了许多杰出数学家。”宗传明说，“比伯巴赫问题的研究历程异常复杂曲折，在过去的一个世纪中，它曾至少3次被错误地宣布彻底解决。”

在寻找平面全等铺砌体的过程中，不仅有数学家和计算机专家进行了系统研究，一些业余爱好者也做出了惊人的贡献。例如，1978年，仅有高中数学水平的赖斯夫人就发现了其中的四种，为此美国数学协会特意用赖斯夫人发现的一种五边形地板砖铺砌其华盛顿总部走廊的一部分。

历经了一个世纪，除三角形和四边形外，人们共发现了3类六边形和15类五边形全等铺砌体。最后一种五边形铺砌体于2016年被3位欧美数学家借助计算机发现。

“毫无进展的6年”之后

数学家总喜欢给自己出难题。从上世纪30年代开始，富特文格勒、哈尧什和罗宾森等杰出数学家开始研究多重铺砌问题，并取得了一系列重要成果。他们发现通过自然叠加，单重铺砌可以产生任意重数的铺砌。但是，数学家想知道的是，除去费德洛夫所发现的四边形和六边形外，还有哪些几何形状可以通过平移构成二重、三重或多重铺砌？

这引起了宗传明的兴趣。2006年，他在英国剑桥大学出版社出版了一本专著，

专门介绍了上述三人的成果，并开始组织研究生每周一次定期学习研讨他们的相关工作，试图在分类问题上取得突破。

然而，6年过去了，他们在这个问题上毫无进展。

2012年，三位欧美学者发现了一个可以构成七重晶格铺砌的八边形。这一结果再次激起了宗传明团队的研究热情。“我们重新设计了研究方案。一方面，我的研究生利用计算机寻找更好的多重铺砌实例；另一方面，我利用多年来在堆积理论所积累的成果与思想方法，集中研究较低重数的晶格铺砌。”

2017年前后，宗传明和他的学生终于迎来了意想不到的收获。首先，他们证明，除去费德洛夫所发现的两种多边形外，任何其它形状的凸形砖都不可能构成二重、三重或四重的晶格铺砌；进而，他们发现了一个能构成五重晶格铺砌的十边形；而通过逐步实现预先设计的研究方案，宗传明独立证明，有且仅有五种凸形砖可以构成平面的五重晶格铺砌，它们是平行四边形、中心对称的六边形、两类特殊的八边形和一类非常特殊的十边形。

“我们将这些结果先后发表在预印本平台 arXiv 上。在接下来的几天里，我收到了多位欧美同行的祝贺。”宗传明坦言，国外同行的高度关注，既让他们感受到收获的喜悦，也感受到巨大的竞争压力。

他决定再努力一把，把这个故事讲完。

像做艺术品一样做数学研究

“多重晶格铺砌是多重平移铺砌中最重要的一类，也是最特殊的一类，但是一个完美的理论应该包括所有多重平移铺砌。”在认真分析了解决一般平移多重铺砌问题所面临的关键困难之后，宗传明意识到，要彻底解决这样一个历史悠久的基本问题，没有出奇制胜的新思想是不行的。

经过反复推敲，他设计了一套系统的研究方案，在每个铺砌顶点引入了一个组合计数公式。接下来，他组织课题组分块实施这一方案。

这期间，宗传明婉拒了所有的会议、评审、报告等活动，集中精力实现他的研究计划。

2018年，宗传明和他的博士研究生杨琪终于实现了他的证明方案。他们发现并证明，除去费德洛夫所发现的两种多边形外，任何形状的凸形砖都不可能构成二重、三重或四重的平移铺砌；五重平移铺砌一定是五重晶格铺砌，也只有平行四边形、中心对称的六边形、两类特殊的八边形和一类非常特殊的十边形能够实现。而后，宗传明又完整刻画了能构成六重晶格铺砌的所有铺砖，它们是平行四边形、中心对称的六边形、一类特殊的八边形和两类非常特殊的十边形。

2020年5月，这一系列成果在《美国数学会通告》上刊登。这是近5年来该杂志发表的唯一一篇国内学者的“重点论文”。论文发表以来得到了柏林自由大学校长齐格勒、美国数学协会前副主席摩根等十多位欧美著名学者的祝贺和称赞。前不久，中国科学院院士、中国数学会理事长田刚在其《数学内外》讲座中也专门提到了这项工作。

“数学研究有时就像是创作艺术品，我们总是希望能够完成一件永恒的作品，就像达·芬奇和米开朗基罗的杰作那样。我们这项成果远达不到屹立于世界数学之林的高度，但它是一项完整的基本成果，是宏伟的数学殿堂中一块小小的铺地砖。”宗传明说。

相关论文信息：<https://doi.org/10.1090/noti2075>

《中国科学报》(2020-05-21 第1版 要闻)