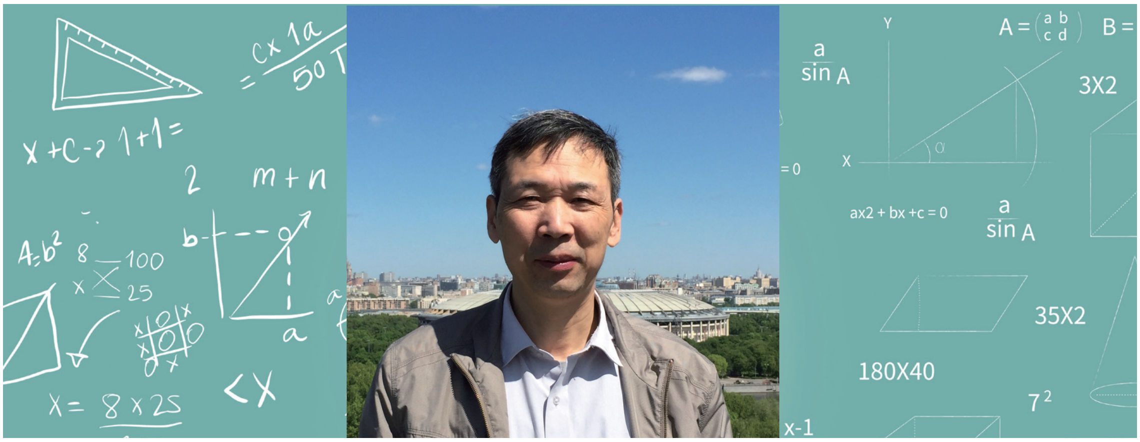


数学的意义

席南华

编者按：

2020 年 5 月份，应中国数学会、中国工业与应用数学学会和中国运筹学会的邀请，田刚院士、席南华院士为广大数学爱好者作了网络科普讲座。本《通讯》上期刊登了田刚院士的演讲，本期将刊登根据席南华院士的演讲整理的材料，以飨广大读者。

谢谢主持人的介绍，谢谢大家在周末星期六的下午听这个报告。

我今天要说的是“数学的意义”。

数学，要说爱你不容易，不管你是天才还是庸人，都是它虐待的对象，差别在于有人在这虐待的过程中得到快乐，但大部分人得到的是痛苦。痛苦的一个根源是其实我们并不认识它，撇开我们在与数学打交道的过程中的不愉快或愉快，今天让我们从另一个角度、一个轻松的带着喝下午茶的心情，带着一个旁观者的心态，来看一看数学的意义。

提起数学，我们会想到什么？从小学到大学都有数学课，它在最重要的课程

行列。我们也知道，在日常生活和科学技术中，它很有用。除此之外可能就想得不多了。换句话说，对数学的本质，它为什么有用，甚至更进一步为什么有数学，数学除了实用以外还有什么别的含义，就不大想了，这似乎和我国文化的实用主义是有关系的。在这样的背景下，可以说我们对数学的认识是很不足的，我们看见的实用只是数学的一个面，是冰山一角。

数学理论的源头在古希腊，我们有谁不知道欧几里得几何原本呢？它的数学发展的水平之高，即便在今天看来，都是让人感到非常吃惊的。它为什么会是这个样子？它的产生当然与希腊当时的文化和哲学是分不开的。跨越时空，让我们来到 2000 多年前的希腊，看他们是怎样认识数学的。他们说，“数学是现实的核心，万物皆数，数统治着宇宙”等观点，都是出自毕达哥拉斯学派，柏拉图学派是深受毕达哥拉斯学派的影响。

我们都知道数学研究量与形，但这么说还难以感受数学的重要性，也很难联想到数学是现实的核心。大家想一下，有什么东西没有量与形的属性呢？换句话说，量与形是物质与事物的基本属性，不管是什么东西，它的这两个属性是摆脱不掉的。数学研究就是这些基本的属性，这决定了数学的价值，也使我们明白，数学它是基础而重要的。说它是现实的核心也就不奇怪了。

如果我们想要对数学有很好的认识的话，就有必要回顾一下，历史上它是怎么产生的。为什么能够产生数学、人们是怎样一步步建立数学体系的？就是说，在遥远的过去数学是什么样子？

其实整个历史过程是非常的漫长，数学有很长的历史，不像有些学科非常的短，可能就是 20 世纪开始的，但数学不一样，它作为一个独立的、有理论的学科出现，还是 2000 多年前。应该说公元前 600 年到公元前 300 年期间，欧几里得《几何原本》它就是一个光辉的典范，它把古代时候的数学都系统的整理出来，用公理化的方法处理，整个思维体系影响了后面两千多年。他的《几

何原本》也在 2000 多年间是标准的教科书。几乎同时，亚里士多德的学生欧德摩斯就写有数学史的著作，所以数学史人们很早就关注它了。

不过，比起人类和人类文明的历史，数学的历史要短暂得多。在一万多年前人类就开始定居于一处，靠农牧业生活，在中国的考古中，包括周口店的头骨，我们都能看出来。不过文字的出现却要晚得多，大约在公元前 3200 年的时候。文字的出现对整个文明来讲是极其重大的事情，在我国古代认为这是一件泣鬼神的事情，在没有文字的时候，你想要在数学上有重要的发展，那是不可想象的，所以文字出现以前，数学的发展其实是非常缓慢的。

我们都有一个深刻的印象，就是数学的抽象特点。即便是一个非常简单的概念，数，就是一个抽象的概念，你在大自然中间看不到一个抽象的数，比如 1。抽象的数的发展其实也是非常缓慢的，类似的概念包括线段、直线、三角形、圆等等也是一样。数的概念据人们研究也并不是仅仅只有人独有，据说有些动物也有数的概念。人们提炼数的概念其实经过了一个很漫长的时间，开始的时候人们对数的观念是与具体的物品联系在一起的，比如说一棵树、一块石头、两个人、两条鱼等等，对形也是一样的。

逐渐地，人们发现了一棵树、一块石头等具体物体的共同的数字属性，数的抽象概念就这样形成了。数，是自然界若干物体的共同数字属性，这是一个抽象的概念，你在自然界当中不能直接找到。我们今天可能没有意识到，其实这在人类认识自然的过程中间是一个巨大的飞跃。实际生活的需要产生了数字间的计算，比如说要分配食物、交换物品、到指定日期前的天数等等，这都需要对数进行一个计算。我们日常生活中间对数学的认识，说数学有用，很多时候都停留在这个阶段，比如说会算帐、会分配什么东西等等，它其实是对数学的一个误解。

还有一件很重要的事情，就是要给数一个名称，并且能够记下来告诉别人，这件事情也并不是一件很简单的事情，所以在文字刚产生之初就引进了数学

符号，这在算术的发展上是非常重要的。一般的算术符号和公式、未知数的符号等是很晚才完成的，包括我们现在熟悉的常用的加减乘除的符号、代数符号都是很晚很晚（才完成的）。像现在的代数符号是到了 16、17 世纪意大利数学家韦达引进的，他对代数学的发展起了一个巨大的作用。

算术最早是在巴比伦和埃及那里发展起来的，它出于实际生活的需要，包括税收、丈量土地、贸易、建筑和天文等等。虽然数学发展到今天已经非常抽象，但它的来源还是实际的生活与生产。不过需要说清楚的是，这里所产生的只是一些计算的规则和问题的解答，算术的这种形式并不是数学理论，原因在于它没有关于数的普遍的定义。前些年，也许现在还有，有一个电视台的《最强大脑》里面可以看到有些人算得很快。一个运算能力非常强的人，大家会有一些误解，以为这些人都有很强的数学能力，其实这是一个误会，他有数字的运算能力却不一定有数学的能力。从实际后来发展的情况来看，他们其实并没有数学的能力，原因在于他对于数的普遍规律没有什么深刻的认识，所以不具备数学的天赋。

向理论算术的过渡也是逐渐进行的，在古代像中国、巴比伦、埃及就已经知道百万以上的数了。我们看《史记》上的记载，在战国时代，它的战争规模就已经非常庞大了，打起仗来动用士兵经常几十万、上百万等等，虽然我们今天都习以为常。我们现在的孩子数数 1、2、3……都会数下去，但是在他的意识里边，是不是会想着这个数能够一直数下去？可能知道，也可能不知道。数是不是会到某个地方截止了？这个也是不清楚的。在古代最伟大的科学家阿基米德专门有一本书叫《数砂法》，里面明确指出了命名大量砂粒的数目的方法，这在当时是一件需要详细解释的事情。其实今天遇到天文数字，我们也很难具体的数一数，我们可能到百万、到亿、到万亿等等，再往大了，一般人也用不到那些数字，也不知道怎么称呼，最后笼统的就会用一个数字——天文数字来表述它。对于很大的数字要给它命名，在古代不容易，在今天其实也没那么容易。

在公元前三世纪的时候，希腊人明确意识到两个重要的思想：数列可以无限

地延续下去；不但可以运用具体的数，还可以讨论一般的数，从而证明关于数的普遍定理。比方说《几何原本》里面就证明了素数有无穷多个，这是关于数的普遍的定理。这个时候，数学理论就产生了。

算术概念其实反映了物体集合量的关系，这些概念是在分析和概括大量实际经验的基础上加以抽象化而产生的，并且是逐渐产生的。刚开始是与具体对象相连的数，然后是抽象的数，再就是一般的数。但有意思的一件事情是，每一个阶段都依赖先前的概念和积累的经验，这是数学概念形成的基本规律之一，其实其他的科学也是一样的，要形成一个概念，都要依赖于前面的积累。

算术让人信服的一个根源，在于它的结论和概念是运用逻辑方法得到的，逻辑方法和概念都是以数千年的实践为基础，以世界的客观规律为基础。我们对数学的逻辑都是非常信服的，逻辑也不是凭空产生的，它也经过了一个漫长的过程，以数千年的实践为基础，以世界的客观规律为基础。这种想法以为我们的逻辑能够独立这个世界客观，它是不合适的，这当然也就意味着逻辑也有它的局限，逻辑是非常诡异的，它的诡异性远远超出我们的想象。

算术尽管它的概念是抽象的，但有广泛的应用，原因在于它的概念和结论概括了大量实践经验，在抽象的形式里面表现出现实世界那些经常和到处碰到的关系。计算的对象可以是不同的，是动物、农产品、星球等等，它舍弃了所有局部和具体的东西，抽取了某些普遍的性质，这就是数字的共同属性。性质的普遍性其实决定了应用的广泛性，抽象的价值就在这个地方。

算术的抽象性保证了广泛应用的可能性，这种抽象并不是空洞的，而是来源于长期实践的经验。对于全部的数学，对于任何抽象概念和理论，它其实都是一样的。理论应用广泛的可能性取决于其中所概括的原始材料的广泛性。要说清楚一点，抽象与空洞不是一回事，我们经常会看到，某个人说的话真空洞，他说的话好像没什么内容等等，不管报纸上还是很多领导的讲话也好，

都有这个印象，原因在于它里面并不概括什么实际的内容，而仅仅是形式上给你一些正确的东西，这种形式上正确的东西其实并没有什么价值。而数学上的抽象并不是一个形式的东西，它来源于长期的实践经验。对于任何数学，对于任何其他的科学包括哲学等等都是一样的，需要概括一些非常广泛的东西，并且有实际的丰富的内容。还是这么说，理论应用广泛的可能性取决于概括的原始材料的广泛性，如果概念本身概括的东西很少的话，希望它能够有广泛的应用，那是不现实的。

毫无疑问，抽象也会有它的局限性，因为在抽象的过程中间会丢弃掉很多东西只反映对象部分的属性。常常也是这样，仅有数据是不够的，我们现在生活在一个信息时代，大数据的时代，大家对数据的强调到了非同寻常的地步，认为数据要主宰这个世界的一切一样。但是从过去的经验来看，它可能还做不到这一点。数据只是事物的一部分属性而已，换句话说不能无限制地运用抽象的概念，就像把一只羊和一头狼加在一起，一升水和一升酒混在一起，它都不是算术一加一的应用，虽然可能有些商人会在酒里兑水，我们也有个非常有名的动画片《喜羊羊与灰太郎》等等。真理是具体的，虽然数学是抽象的。把抽象应用到具体是一种艺术和一种技术。

有意思的一件事情就是我们的思维常常是会超出实践提出的任务这些要求以外很远，这非常有意思，比如十亿或者百亿这样的大数字概念，它当然是在计算中间产生的，很早很早就有了。但这些概念出现的时候其实没什么用处，直到后来才有用。科学里有很多这样的东西，刚开始出现的时候没有什么用处，我们后面还会举一些例子，这就是说我们实用的一些哲学观点，可能要避免。这种例子在科学上很多，举个简单的例子，大家在高中的数学里面有复数，我们知道求方程的时候都要求根是一个实根等等，但是对于 $X^2+1=0$ 这样一个方程，我们就没有根了，没有根怎么办？那就不存在了。得出这个结论，但是我们又不满足，最后又引进了一个根，虚数。从这个概念本身就知道，它是一个虚构的，它是想象出来的，不存在。但是到了后来，这个数非常的

重要，由于虚数的引进之后我们就有了复数的概念，复数上的数学是非常庞大和深刻的。陈省身先生对复数就非常着迷，他说复数太迷人，你怎么都参不透它，里面有很多的东西是那么神秘，那么深刻。他晚年致力于的一项工作就是证明一个六维的球面上有复结构，但一直都没有做下来。当然这个问题到现在谁也没有做下来，所以他没有做出来也一点不奇怪。

类似的，线段、直线、圆和三角形等等抽象概念，也是逐步发展起来的，它是一些物体的共同的空间属性，是形方面的属性。和算术一样，它产生于实践，然后逐步形成数学的理论，现在已经是极其庞大的理论了。形的概念，也从我们熟悉的点、线、面等等变得非常陌生，比方说在三维空间里面，把所有过圆点的实线拉出来，它也是一个非常好的结构，是一个射影空间。

几何的抽象当然也是很明显的，因为这里头点没有大小、线没有宽度厚度，面也没有厚度，它只是现实世界物体的一个空间属性的抽象，在现实中间你看不到这样的点、线和面。对这些抽象的空间形式是没有办法做实验的，所以只能用逻辑推理的方法从一些结论导出另一些结论，重要的是我们需要认识到这些结论其实是现实世界的抽象的一个反映。

几何和算术一样，它原始概念的明显性、推理的方法、结论的令人信服都如同算术那样，以实践和世界客观规律为基础。既然以实践为基础，也就意味着它会有局限，就会有人想，我们直观提炼出这些概念，是不是很好地反映了现实？很久很久以前人们是很有信心的，但随着科学的发展，或者说随着人们对几何公理深入分析的时候，这个信念就动摇了。大家知道对欧几里得几何第五公设的讨论和思考，最后导致了非欧几何，那非欧几何中的黎曼几何对相对论是非常重要的，更好地描述了我们的宇宙。所以我们来源于实践中的很多东西，到后来又经过不断的修正，通过实践和理性的思考。

在数学里面，量与形是事物的基本属性，那毫无疑问，分开讨论量的属性和

形的属性都是不够的，他们两者必然会有联系、互相有制约。数学分支之间的联系互相渗透，是有特别重大的意义的，它有力地推动了数学的前进，并揭示了这些分支所反映的现实世界关系的丰富多彩。我们现在非常强调交叉，原因就在于不同的学科其实都是现实中间不同角度的反映而已，只有把它结合起来，才能对这个现实有更全面的认知。这有点类似于盲人摸象，每个学科可能只摸到一个局部、一个侧面而已，把所有的合起来，我们就会对这个“象”有个更完整的认识了。

回到算术与几何，它同样有密切的联系，不仅互相作用，而且是产生进一步的一般概念、方法和理论的来源。这一点非常的重要，就像我们现在的交叉，它不断产生新的概念、方法、理论等等。数学和化学结合到一起就会有计算化学；数学和物理的结合一直是非常紧密的，（它们的结合）有数学物理；还有计算生物学等，像现在很多数学家转去做生物，我知道有些美国的数学家转去做生物之后，结果成为美国科学院生物方向的院士，这样的例子还有很多。

算术和几何是数学成长的两个根源，其密切的联系在刚开始就有了。比方说简单的一个长度测量就已经是算术和几何的结合了。当你测量物体的时候，会把单位长度的东西放在物体上面，然后数一数共放了多少次，其中第一步“放”的时候就是一个几何的性质——全等，第二步“数”当然是算术的做法。

在测量时候常常会发现，选用的单位不能在被测的物体上放置整数次，这时候就必须把单位加以分割，以便利用单位的一部分来更准确的表示量，这就已经超出整数的范围了，要用分数来表示这个量，分数就这样产生了。这是几何与算术相互作用的结果，它引起了数的概念从整数到分数的推广，这也是数的概念非常重要的一步，分数就这样产生了。直接在自然界中间还形成不了分数的概念，但是通过几何与算术的联系，它就产生了。

不过无理数的发现，还不能通过测量实现，因为在实际测量中间，如果分割

和度量达到过于细小的程度时候，这些细小的量就会被直接忽略掉，也做不到无限精确的测量，而且无限精确也没有意义。

勾股定理告诉我们，单位边长的正方形对角线的长度就是 2 的平方根，这样数的概念就进一步发展了。而且逐渐的人们把数理解为某个量与被取做单位量的比值，可以不再把数与具体物体量的属性联系起来，这意味着对数的认识又比前面进了一大步，它是两个量的比，比如 3/5，就是 3 和 5 的比值，和测量、和数（shǔ）数（shù）都没有任何的关系。

这里要特别强调一下无理数的发现。我们可能都知道，在古希腊的时候，人们利用勾股定理，他们叫做毕达哥拉斯定理，发现了单位边长的正方形不能够被有理数度量的时候，希腊人是感到震惊的。他们认为这些事情好像破坏了世界的美一样，不能理解这件事情。但它既然这样自然的产生，当然在数学里面有重大的意义。从哲学上来讲，它的发现也是数学理论在揭示自然规律和现象的威力深刻性上一个典型的例子。可能我们平常没有意识到这一点，就是无理数没有数学理论是发现不了的，其他的手段包括测量、抽象、实验等等，都发现不了，只有数学理论能够告诉你世界存在无理数，而且会有很多很多。后面我们还会谈到一些其他东西，比如说无穷也同样只有数学能做到，别的科学做不到。

数的概念进一步的发展就是实数，然后就是复数，到了后来就是代数结构，这个地步已经到了比较高深的数学了。换句话在我们日常生活中间不一定能够直接感受到，可能也不需要感受到，专家会给我们忙这些事情，（把它们）运用到物理、通信、航天等地方。

关于数与形的联系，华罗庚先生有一个非常深刻的见解，他说，“数缺形时少直观，形缺数时难入微”。确实是这样，你把这两个统一起来考虑的时候，对这两者的认识都会变得更深刻。如果你孤立的来考虑，不会走得那么远。

简单的谈一下历史之后，我们应该说数学了。数学应该是从数（shǔ）数（shù）开始的，我们有谁不会数数呢？在幼儿园里的孩子都会 1、2、3……这么数下去。一般孩子数到 100，可能他的爸爸妈妈就让他过去了。不过有些望子成龙的家长可能会让他一直数到 N，数到一个抽象的 N。一般可能想不到用正整数把所有整数都数一数，其实这是可能的，一个数法就是从零开始，然后一个负数一个正数、一个负数一个正数，结果就把整数这么一个个排下去了。这件事情有点意思，也说明数数好像没有那么简单。

接下来我们就可能会想着用正整数去数有理数，刚开始看这似乎是不可能的一件事情，但出人意料这也是可能的。有理数是两个整数的比，当然前面还有一个正负号，我们可以要求这个分子分母没有大于 1 的公因子，把分子分母都加起来，先按这个值大小分成若干部分，这时可以用整数去数。然后对于固定的和，这里的有理数肯定是有限的，那这部分又能数。这样操作下去之后，结果发现有理数也能数，从零开始，然后接下来就是分子分母都是 1 的数，只有 1 和负 1；那分子分母加起来是 3 的时候，那就是 1/2，2，−1/2，−2；加起来是 4 的时候就是 1/3，3，−1/3，−3 等等。这个样子就把有理数全部都数下去了，这应该说数数还是非常有意思的一件事情。

那接下来你可能想继续用整数来数实数，但很遗憾，实数确实没办法用整数来数。这显示出实数和有理数、整数之间，从无穷的观点来看，它是有巨大差别的。而且有理数虽然看起来乱糟糟，我们还是能够把它数清楚，但实数我们做不到这一点。证明并不难，我们这里不用去管它了。

这里马上就会产生一个问题，在自然数全体和实数全体之间有没有一个数的集合，它一方面没有办法数，或者说我们不能像整数那样数下去；另一方面它和实数全体也不一样多，也就是说你不能和实数集建立一一对应，一一对应通俗的语言说来就是旗鼓相当，数学的语言就是等式，就是势力相等的意思。这个问题看起来很自然，问的就是像在 1 和 2 之间有没有整数一样。不过大

家可能意识不到的事情是，这个问题在数学里面是特别重要的一个问题，一个很基础的问题。康托是集合论的创始人，他提出这样一个假设——连续统假设，说这样的集合没有。大家可能知道，在 1900 年国际数学大会上，伟大的数学家希尔伯特提了 23 个问题，这 23 个问题中的第一个问题就是连续统假设，可见这个问题在数学中的重要性。数学家们花了很大的力气来研究它，哥德尔，伟大的奥地利数学逻辑学家，他在 1940 年就证明了连续统假设和我们现在这个逻辑体系是没有矛盾的，没有矛盾还不能说它对。又过了 23 年到 1963 年，一位美国数学家科恩，他发明了一种强有力的办法，叫做力迫法，证明这个结论否定的一面和我们现在的逻辑体系也是没有矛盾的。这个事情就变得诡异起来了，换句话说这么简单自然的一个问题，在逻辑上来讲，我们证明不了它是对或者错，就像在我们日常生活中一句话一样，“说你行你就行，说你不行你就不行”，这让我们对逻辑产生了很奇怪的感觉，原来它也有它不能的时候。科恩因为这项工作，在 1966 年获得了菲尔兹奖，在取得了这项伟大的成就之后，他心气高昂，觉得数学里面没什么问题值得他研究，除了有一个问题叫黎曼猜想，数学里面最著名的一个问题。科恩后来的余生就致力于研究黎曼猜想，他这个心劲有点类似于我们古代唐诗所描述的境界“曾经沧海难为水”。很可惜，科恩已经去世了，黎曼猜想还依然活着，谁也没办法证明它。

在这个地方我们可以看出来，逻辑实际上比我们想的诡异得多，很多时候我们对它的认识可能还不那么透彻。关于逻辑我愿意在这里再多说一点点，一般人对于数学的逻辑都非常有信心，不仅数学家相信，物理学家相信，一般老百姓也相信。但随着我们对数学的认识不断的加深的时候，就有很多的悖论，包括罗素的悖论等等。这些悖论也就意味着数学的逻辑不像我们平时想的那样无所不能、无所不利。我们能做的事就是给它建立一个很坚实的基础，比如这个世界有狼，那我们就圈一块地，把狼赶到外面去，然后在圈里面放羊，把数学就建立在这个领域，这个大厦就非常牢固了。数学家对这个努力的方向是非常乐观的，罗素与怀特海就写过数学原理三

大本书，试图来做这件事情。罗素是一位非常杰出的数学家，数学家拿诺贝尔奖的人很多，但是这位数学家是通过文学拿的诺贝尔奖，实际他是通过这三本书——《数学原理》拿的诺贝尔奖。据说当时正好在诺贝尔奖评选委员会里，有一个人对他这项工作很了解，结果就颁给他了。拿诺贝尔文学奖的数学家目前只有一个。

伟大的数学家希尔伯特对这样一个努力的方向也非常的乐观，认为我们一定能够做到这一点，我们必须做到，也将会做到。但他这种乐观的话说出来之后，朗朗的笑声没有多久，在 1931 年，哥德尔，还是这个哥德尔，他就证明了两个不完备性定理。第一个定理说，如果你的公理体系包含算术公理体系，就是我们最常用的体系，因为我们总要处理整数、算术这些东西，如果包含这个体系了，必然会有一个命题是没法判断它的正确与否的。就像我们刚才（提到的）一样。哥德尔这个构造还要简单一些，那是更早完成的。另一个不完备定理说，如果有一个公理体系包含了这个算术公理体系，那么它的不完备性是不能够由自身证明。就像在法庭上你不能自证清白。这对希尔伯特的形式化纲领是一个致命的打击，也宣告他的形式化纲领是不可能实现的。希尔伯特得知这个消息后当然非常的沮丧，更遭的是那个冬天，他还把腿给摔断了，这显然是一个不祥之兆。

从数数引发出来的问题，我们可以看到逻辑的诡异性，也揭示了我们认知上的局限性。数理逻辑还和计算机科学是密切相关的，计算机科学能做到哪一步，哪些地方不能做，这个界限有时候还不是特别的清楚。但是我们通过数理逻辑知道有些东西做不了，还有很多东西能做不能做我们并不知道，比如 P 和 NP 问题等等，它反应了一些诡异的东西。哥德尔这项工作不仅在数学界里面，而且在哲学界里面都产生了巨大的影响，他实质上和我们的常识或者是一般所想的差得太远了。在上个世纪 70 年代有一本书，是获得美国普利策奖的，书名就是《G.E.B》——一条永恒的金带。这个 G 就是哥德尔；E 就是埃舍尔，一位荷兰的画家；B 就是音乐家巴赫。他把哥德尔的不完备性定理

埃舍尔绘画作品《瀑布》

和埃舍尔的绘画以及巴赫的音乐给联系起来。你在看埃舍尔绘画的时候也是很有意思的，它在整个局部上都是非常合理的：水不断地往低处流，结果最后整体上看它流到原来地方，或者甚至比原来更高的地方。巴赫的音乐也是，有时候听了你会感觉到它不断的深厚，结果回到原来的地方。那本书就揭示了这中间的一些联系，是一本很有影响的书。我们国内也有翻译。埃舍尔的画科学家也很感兴趣，因为它揭示了一些非常奇怪的矛盾现象。像杨振宁的《基本粒子发现简史》一书（中文版）的封面，就是用了埃舍尔的绘画。

在我们有限的生命里面，要认识无限，似乎是一件困难的事情，甚至可能是一件让人不安的事情。在古诗里面就说了“生年不满百，常怀千岁忧”，这就表明我们并不甘心局限于自己有限的时空。但无限是令人敬畏的，帕斯卡说到，“当我想到我生命的短暂停留，被前后的永恒所吞噬，我所占据的小小空间，被我也一无所知的无限广阔的空间所淹没，我感到恐惧，这些无边无际的空间的永恒的寂静使我害怕”。在数数的游戏中间，我们就感受到了整数的无穷和实数的无穷的差别。数学非常重要的一个作用是能够认识无限，这是别的学科做不到的。你没有看到任何其他的学科能够做这件事情，哲学讨论无限，讨论不出个所以然，只有数学能够研究无限，这是它神奇的地方。我们利用无限还可以研究有限，例子包括极限、级数、无限集合等等。在无限里面也有差别，我们刚才已经看到了整数的无限和实数的无限的差别，在数学里面专门有个分支研究这种差别，那就是集合论。

对于无限，希尔伯特的认识是非常深刻的，他说，“没有其他的问题能够如此深刻地触动人的精神；也没有其他的思想能如此富有成果地激发人的思想逻辑领悟力；然而也没有其他的概念比无限的概念更需要澄清”。我们常常有个朴素的想法，希望长生不老，其实是跟无穷联系在一起的。

我们现在转过来看一些观点，数学是那么的有魅力，伟人们从不吝啬他们对数学的敬畏和赞美之词，说出了一些非常深刻的观点。像古希腊，毕达哥拉斯学派、柏拉图学派，他们认为数学是现实的核心。我们常常听到的观点“万物皆数”源自毕达哥拉斯，他的学派还有类似的表述，“数统治着宇宙，数是万物的本质”。柏拉图学派深受毕达哥拉斯学派的影响，把数学摆在至高的位置，“纯粹思想的最高形式是数学。”在柏拉图学院的大门上写着“无几何学识者勿入此门”。在柏拉图的名著《理想国》里面，第七篇有很长的对话讨论算术与几何的重要性，结论就是 “算术迫使灵魂使用纯粹理性通向真理”，“几何是认识永恒事物的”，并把算术和几何作为青年人必须学习的第一门和第二门功课。

古希腊认为“数学是自然界最真实的一个本质”，有这样的认识，古希腊在数学上能够取得开天辟地的成就，似乎也就不奇怪了。这句话在我们今天的时代应该会有更深的体会，在我们今天的社会信息时代里面，什么东西都要数字化、数字地球、数字这个、数字那个等等，其实背后都离不开数学。

伽利略认为 “宇宙就是用数学语言写成的，如果你不懂数学，要想认识宇宙是不可能的，这些语言的字母就是三角形、圆以及其他的几何形状等等。”

高斯认为“数学是科学的皇后”。也许大家看过徐迟的报告文学《哥德巴赫猜想》里面提到过这句话。高斯是被称为 19 世纪的数学王子，是 19 世纪最伟大的数学家，也是杰出的物理学家、天文学家、大地测量学家，他的这句话常被人引用，只是不知道高斯把皇帝弄哪儿去了。不过也许大家可以想一下。

维格纳是一位获诺贝尔奖的物理学家，他提到“在自然科学中，数学是不可思议地有效，已经达到了不合理的程度。”他的这个观点问世以后，引起了长久的讨论和引申。

狄拉克也是一位杰出的物理学家，他认为“上帝是一位非常高等级的数学家，他用非常先进的数学来构造这个宇宙，我们只要在数学里面有进一步的认识的话，都会有助于我们认识这个宇宙。”我只是有点奇怪，他为什么不认为上帝是一个最高等级的数学家，他是不是认为最高等级数学家还有什么别的人？

在欧洲甚至一些文人对数学也是赞叹不已，这和我们国家的文人不太一样，我们国家的文人好像赞美数学的很少。我只是看到很多文人写的作品里面，对数学是表现极其的厌恶之情，以不懂数学而自豪等等。伏尔泰认为“数学必须驾驭我们理智的奔驰，他是盲人的拐杖，没有它寸步难行。一切确凿无疑的事实都应该归功于数学和经验。”这是一种认识，也是一种信念。法国数学的强大，不仅是法国数学界的功绩，也有深刻的文化因素。甚至他们的皇帝对数学也是赞叹有加，把它和国家的繁荣富强联系起来。拿破仑是 19 世纪法国伟大的军事家、政治家、法兰西第一帝国的缔造者。人们一般都关注他的军政成就，其实他在科教方面的成就对法国以后的发展也同样是至关重要的。在法兰西第一帝国期间，法国制定了保留至今的国民教育制度，成立了公立中学和法兰西学院来培养人才，鼓励科学研究与技术研究事业的兴起。拿破仑本人对科学文化事业是极为关注的，掌权以后他定期出席法兰西科学院的会议，邀请院士们报告科学进展，把许多奖赏授予科学家，包括外国的科学家。拿破仑的关注，促进了法国科学的繁荣，出现了像拉普拉斯、拉格朗日、蒙日、卡诺、傅里叶、吕萨克、拉马克、居维叶等一大批耀眼的科学明星。我们国家的领导人现在对数学也是非常重视的。

西方国家强调数学的还有哲学家，康德是 18 世纪德国的哲学家，被认为是所

有时代最伟大的哲学家之一，他拥有渊博的自然科学知识，对道德有着深刻的理解。他的哲学对德国古典哲学和西方哲学都有深远的影响，对马克思主义哲学的诞生也有深刻的影响。《纯粹理性批判》是其最有名的著作，他认为“数学科学呈现出一个最辉煌的例子，不借助实验，纯粹的推理就能够成功地大大扩大人们的认知领域。”关于这点，我们前面提到的无理数就是一个典型的例子，当然虚数也是个典型的例子，我们后面还会有更多的例子来说明这一点。

我们常常会听到，“飞行的马赫数”，很多人觉得数学很难或者什么之类等等，但是马赫的观点完全不一样，他说，“也许听起来奇怪，数学的力量在于它躲避了一切不必要的思考和它令人愉快地节省了脑力劳动”。其实做数学节省了很多的脑力劳动，你不用辛苦地考虑很多东西，因为很多东西的数量关系就决定了它们的主要性质。

雷尼的话就更有意思了，他说，“如果我感到忧伤，我会做数学变得快乐；如果我正快乐，我会做数学保持快乐。”我是完全同意他的观点，做数学多好。

黑格尔是德国 18 至 19 世纪的哲学家，德国古典唯心主义的集大成者，创立了哲学史上最庞大的客观唯心主义体系，并且极大地发展了辩证法。他的观点（“数学是上帝描述自然的符号”）和伽利略的观点是一脉相承的。现在数学在社会科学里面应用也变得越来越广泛，在经济里面是一个典型的例子，你要是不懂数学的话，只做经济学，它的出路并不是很好。

爱因斯坦无疑是上个世纪最伟大的科学家，他的观点更让人深思，他说，“纯数学能使我们发现概念和联系这些概念的规律，给了我们理解自然现象的钥匙。”他进一步说到，“数学之所以比一切其它科学受到尊重，”虽然他自己是一个物理学家，“一个理由是因为它的命题是绝对可靠的，无可争辩的，而其它的科学经常处于被新发现的事实推翻的危险。数学之所以有高的声誉，

另一个理由就是数学使得自然科学实现定理化，给予自然科学某种程度的可靠性。”你看到其他的学科一篇论文半衰期非常短，我们常听说某些学科五年前的论文到现在已经没什么价值了，但你看欧几里得《几何原本》用了两千多年，勾股定理到现在我们还是一直不停地在用，所以数学的生命是永恒的，不像其他的学科。即便是伟大的牛顿定律，后来也发现只是低速世界的定律，在更大的空间里面、更小的空间里面它其实都不适用。小的空间里有量子力学，大的空间有相对论。

对数学在现实中的用处，华罗庚先生的观点是非常透彻的，“从宇宙之大、粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学。”你可能会注意到这一点，它其实还是迎合了我们国家一种实用主义的思维。

从华罗庚先生这些话里面，每一句都能引申出很多的东西。比如第一句话中对于无垠的宇宙，离开了相对论要认识宇宙其实是很困难的，前两年发现了引力波，其实来源于相对论；在粒子之微这里，有量子力学，包括薛定谔方程；火箭之速也会用到数学，必须要计算好，不然坐火箭出去旅行，很有可能就回不来；化工里面也是一样的，它有很多的化学反应，微小的实验尺度里面就会用到微分，大的实验尺度里面会用到积分；地球之变不用说，现在的天气预报能够预报得比以前更准确，毫无疑问数学起了很重要的作用，包括建模之类的；生物之谜也是一样的，人为什么演变到今天，它的基因怎么演变的，这里概率和统计就起了很重要的作用。这里还可以说一个故事，本拉登前几年被击毙了，当时美国的情报人员花了很大的力气弄清楚他的落脚点。那科学家怎么来看这件事情呢？科学家用了一个模型来推测本拉登的落脚点，他认为本拉登这个时候的行为跟濒危动物的行为差不多，所以利用濒危动物的行为来预测本拉登的落脚点，最后推测出来他可能在两个地方落脚，其中一个就是白沙瓦，这就是本拉登最后被击毙的地方。你可以看一下，运用科学所得到的结论，是常常出人意料的。美国的情报人员其实花了很大的力量，

同时很多时候是冒着生命危险的，所以现在情报机关里面雇佣了很多科学家一点儿都不奇怪。在华罗庚先生的话里面，日用之繁，不用说，我们一个最切身的感受就是深受堵车之害，这里数学可以帮助解决很多的问题，运筹优化之类的。还有一件事情也可能有悖于大家的常识，很多时候，路多的时候交通不一定更顺畅，封掉几条路，交通反而更顺畅了，这是经过实际证明的。在二次大战期间，交通因素变得非常的重要，因为要保证物资有效的调度到前线去。苏联数学家为此建立了线性规划的理论来解决这个问题，当时发挥了很重要的作用。有意思的事情是，美国经济学家后来把这个理论用到了经济学里，也取得了巨大的成功，结果在上个世纪 70 年代这位苏联科学家康托诺维奇，就和美国的经济学家一起拿了诺贝尔奖。数学家拿经济奖的人还挺多，包括纳什，《美丽心灵》的主角，大家都看过这个故事。纳什拿诺贝尔经济奖的论文很短，只有两页纸的样子，不像经济学家，写起论文来都是长篇大论，说起来也头头是道，不把你说糊涂一般是不罢休的。为什么这么说呢？也有个笑话说，就某个经济现象发表看法的话，五个经济学家会有五个观点，如果这中间还有一个是哈佛毕业的话，五个经济学家就会有六个观点，要把他们的观点统一起来基本是没有希望的。

我们回到数学这里来，数学的抽象当然来源于长期的实践。它并不是凭空起来的，它的结论是从概念中运用逻辑方法得出来的，而逻辑方法和概念同样是以数千年的实践为基础，没有这些实践的基础也不会有今天的逻辑，它同样以世界的客观规律为基础。数学的规律实际上是自然规律的一部分，只是以抽象的形式反映出来，不过抽象的面目基本上是人见人不爱。现在数学的发展既有外部问题的驱动，也有内在问题的驱动，内在问题的驱动其实也是现实世界的一个曲折的反映而已，只不过是以抽象的形式表达出来而已，那抽象推导出来的数学在现实中间有用就一点儿也不奇怪了，数学的理论还是自然规律的一部分。

我们看一下两千多年前希腊人关于圆锥曲线的研究，在 17 世纪被用于描写天体的运动，过了将近两千年，它才变得有用。黎曼几何是广义相对论的框架。欧几

里得出来，后来人们对于第五公设进行了一些反思，因为有些地方跟我们的直觉是不太一样的。比如过直线外一点作这条直线的平行线只有一条，但是从我们视觉上来讲，比如两条平行的铁轨，一直往远方看最后交于一点，这个直观对于绘画非常重要。对于绘画的讨论包括光线的投影等等，最后产生了射影几何，它其实是一种非欧几何。对于欧几里得第五公设的讨论形成两个几何，一个是双曲几何，一个是球面几何。另一种就是黎曼几何，黎曼几何是完全从数学内部产生的。但是到后来相对论出来之后，人们发现欧氏几何是不适用的，相对论的数学框架用黎曼几何正合适，它对引力的解释也和原来完全不一样，并不是说两个物体的质量之间轻，而是说物体质量非常大的时候空间是有弯曲的。

另外比方说纤维丛理论在规范场理论中的应用也是一样的，当时杨振宁对这个事情感到非常的惊讶，就跟陈省身先生交流说，“你们数学里面凭空做出来的东西怎么会在物理里面非常重要？”陈省身就说，“我们的几何本来就是现实中的一部分，所以不能说它是凭空产生的。”

当然还有很多的例子，包括矩阵和无限维空间在量子力学中的作用，海森堡刚开始把他的量子力学叫做矩阵力学，因为矩阵的乘法具有非交换性。

概率论在统计力学、生物和金融中也有广泛的应用，概率论的来源其实是赌博，很多的数学在很久很久以前是人们完全凭兴趣研究的，后来在自然科学或者其他地方都有想不到的大用处。怀特海德就感叹到，“对那些只把知识和研究局限于明显有用的那些人，不会有比如下示例给出更深印象的告诫了：圆锥曲线只是作为抽象科学（的内容），被研究了一千八百年，除了满足数学家的求知欲外，没有任何实用的考虑，然而在这漫长的抽象研究的最后，它们被发现是获得最重要的自然规律之一的知识所必不可少的钥匙。”

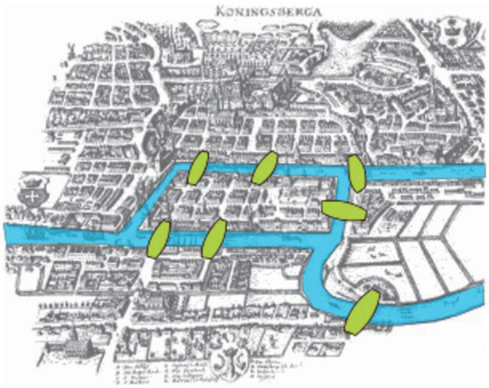
我觉得怀特海德的话对我们国家来讲，不管是政府也好，还是一般的百姓也好，都是有它的意义的。我们一般都非常关注“有用”，我们学过很多东西，

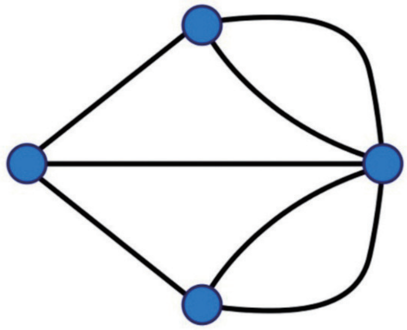
包括学经管，它就是为了挣钱、有用。只是为了兴趣去探索未知的东西，这种精神在我们国家应该是比较少的。我自己在教学的过程中间也遇到一些这个现象，甚至一年级的大学生就问，“线性代数有什么用呢？”线性代数这么技术的东西当然非常有用，包括在通信里面。这个学生提的问题让我感到非常惊讶，换句话说他这个时候没有体会到学习的乐趣，而只是关心有什么用，这其实很难走远，不应该这样问。我觉得他是问错了，他应该问有没有意思，有意思驱动的话做下去就会走得更远，因为一直觉得它有意思。你想你在生活中间不就追求一个有意思吗？这个“有用”，当一个人成为“有用”的时候，我是怀疑这个“有用”有什么含义呢？你是被别人利用，还是你要利用别人？所以“有用”这个东西推敲下去，结果好像不太好。

知识通过感性的感觉而产生，逐渐成为考察的对象，最后变成理性的财产。所以我们现在都说知识是人类的财富等等，它确实是一个财富。在我们古代所说的“书中自有黄金屋”，它有一定正确的成分，但还不完全正确，因为它太现实了，包括“颜如玉”等等。我不知道女孩子看到这样的句子会有什么感受，是不是还希望加一句“还有帅哥在里头”。

数学的思维方式当然也是一种智慧，这一点尤其重要。在学习数学的过程中间，掌握了数学的思维方式，怎么考虑问题等等，这比知识有价值得多。知识可以上网去搜，可以看书、翻书等都没问题，但怎么考虑问题是能力中一个重要组成部分。我们用两个例子看一下数学的智慧。

第一个例子是哥尼斯堡七桥问题。（如下图）这是一个城市，河流是这个样子，有七座桥，问题就是能否设计一条路线通过每一个桥，正好过一次。据说当时市民周末一个很受欢迎的消遣就是能否设计一条路线通过每座桥正好一次。但这个问题当时市民都没有解决，最后大概是一个城市的市长把这个问题交给了欧拉，一个著名的数学家，欧拉把这个问题解决了。我们看一下欧拉是怎样解决这个问题的，这个过程体现了抽象的价值和数学的思维。





首先这条河流把城市分成四部分，每一部分大小其实都不重要，重要的是过桥的路径设计，从而可以把陆地抽象为一个点，大小反正无所谓，干脆没有大小就得了。而桥就抽象成点与点之间的连线，这个图就画成这个样子。简化成这样之后，这个问题的本质就全部展示出来了，除了起点和终点，走过中间那些点，走到这个点的次数和走出那个点的次数加起来必然是一个偶数，就是说连接那个点的桥数必然是偶数。可是上图连接四个点的线路，也就是桥数分别是 5、3、3、3，所以不可能设计一条路线通过每座桥正好一次。欧拉解决这个问题的方式，显出了抽象的价值和数学的智慧，这是图论的开始，也是拓扑学的一个先声。图论在信息科学中间，包括网络和芯片设计，都非常有用。

说到数学思维我们还举一个例子，二战期间很多数学家参与了战争，包括图灵等人破译密码，也包括很多统计学家分析数据等等。其中有一件事情就是很多战机出去空战的时候，很多被击落了，也有很多又回来了，回来的很多战机上面就布满了弹痕、弹眼之类的，这就需要分析在哪些地方需要加固。空军提的建议是，应该在弹孔最多的地方加固，但数学家提出的意见是，应该在弹孔最少的地方加固。为什么？弹孔最多的都能飞回来，意味着这个地方多打几个弹孔也没关系，这就是个缺失数据的问题。弹孔少的地方，比如说发动机，因为被击中后基本就是栽下去，回来的不多。数学家提出的观点

和军方是完全相反的，后来事实证明数学家是对的，他挽救了很多飞机和飞行员的生命。

另外再举个例子，就是晶体的分类。我们都很喜欢钻石，非常的漂亮，还有雪花也很美，他们都是晶体。晶体有多少种？这是很实际的问题。晶体的主要特点是对称，由外部的对称和内部的对称结构来决定，晶体的对称性对晶体的种类带来了很强的约束。数学中间研究对称的分支是群论。外部的对称是很容易确定的，关于内部的对称，舍去了晶体的所有物理性质。仅从几何对称性的角度考虑晶体，在 1885 年到 1890 年期间，俄国的晶体学家费德洛夫就确定了晶体的微观的对称形式 230 种。他的这项工作后来是晶体实验工作数学理论的基础，对晶体的内部结构的确定发挥了巨大的作用。包括 1912 年德国人劳尔，以及包括后来英国人布拉格父子，他们对晶体内部结构的确定等等，这些数学理论都起了非常重要的作用。劳尔和布拉格父子先后于 1914 年和 1915 年获得了诺贝尔奖。群论是研究对称的一个基本工具，在物理中间非常重要，不过它的来源非常有意思，它是解方程产生的。

很多人都感到数学有一种特殊的美感，他们也曾经做过生理上的分析，发现这个美感和看到漂亮风景、帅哥靓女之类，神经的反应好像差不多的。事实上还有一些物理学家，对数学之美的感受是很强烈的，对数学的美的追求也是无尽的。外尔对数学美的态度就是这样，“我的工作总是设法把真与美统一起来，但如果只能选择这个或另一个时，我常常选择美”。一般我们追求真善美，但好像从道德上来讲，这样做是不对的，但数学里面的美很可能是更高层次的真实。就像在我们所认识的世界里面，你的认识是有一定局限的，但美是一个原则，让你发现更高层次的真实。外尔写的《群论和量子力学》1928 年首次出版，非常的有名，据说当时的理论物理学家都会把这本书放在书架上，但都不看，因为里面的数学太难了。物理学家对数学家写的书好像好感并不多，他们的评价大概是这样的，认为数学家写的书有两种：第一种是看了一页就看不下去了，第二种是看了一行就看不下去了。

哈代是 20 世纪杰出的分析学家，也是他所在的时代英国最杰出的数学家，他的一个数学家的独白表达了他对数学的看法，影响颇广。他也是一个唯美主义者，他认为“美是（数学的）第一道检验：难看的数学在这个世界上没有长驻之地。”狄拉克认为，“物理定律必须有数学的美，上帝用美丽的数学创造了这个世界。”狄拉克方程就是一个典型的例子，它是个很有名的方程，杨振宁对它也是非常赞叹的，专门有文章提到这件事情，就是利用这个方程，人们发现了正电子。当初根据已有的实验结果来讲，它的方程不是这样的。但他认为根据实验结果得出的方程不美，所以就给修改了，修改之后很多东西又解释不了，他就大胆地预言应该还有一个例子没有发现，后来果然通过实验发现了。他对这个公式当然也是非常的喜欢。也有一个很牛的物理学家费曼，课讲得非常好，有次大概因为开会，这两个人（费曼和狄拉克）碰在一起了，长时间的沉默之后，狄拉克就冒了一句话，“我有一个方程，你有吗？”估计费曼当时非常的郁闷。物理学家也好，数学家也好，独特的人是非常多的，英文有个词叫 eccentric（中文译为怪人），在我们国家对 eccentric 好像没那么宽容，西方文化对他们要宽容一些。

罗素说，“数学，如果正确地看，不但拥有真理，而且也有至高的美。”罗素是数学家，也是哲学家，获得过诺贝尔文学奖。他所写的《西方哲学史》从一个哲学家的角度，而非哲学史家的角度看待西方的哲学史，那独特的视角、脉络清晰，文笔也非常的流畅，但又不乏幽默，所以他对美的认知自然有非常广阔的背景。

如果你觉得数学不美的话，从某种意义上讲我不太建议你去学数学，或者你至少培养了美感之后再去学数学。数学美的含义到底是什么？这个问题提得多了之后，我觉得就要想一想它到底什么内容？后来我发现它大概有以下的内容：形式上要清晰、简洁，还有就是要简单、原创、新颖，不新颖的话，老生常谈，不会有美的感觉；还有就是很优美，以及一个很重要的就是不同对象之间的联系，这一点大家以前可能没有意识到其实是非常重要的。它的

内涵必须要非常深刻、重要，还有基本和蕴意丰富，从这个基本的对象出发，能解释很多其他的东西。它的证明要清晰、干净利落、巧妙。

数学的美

含义

形式：清晰，简洁，简单，原创，新颖，优美，不同对象之间的联系

内涵：深刻，重要，基本，蕴意丰富

证明：清晰，干净利落，巧妙

我们用一些例子来说明一下这些观点。第一个就是勾股定理，勾三股四弦五，我们常常理解起来就是 $3^2+4^2=5^2$ 这样一个等式而已。但实际上它揭示了 3、4、5 这三个数的联系，这是非常重要的。勾股定理我们知道，三角形的直角边的平方和等于斜边的平方，以前我们理解起来，就是这两个边能够求出第三边，其实这只是它价值很小的一部分，更重要的是这三个边之间的联系。我国古代赵爽给了一个很漂亮的证明，他把四个直角三角形拼起来得到一个大的正方形，里面包含一个小的正方形，比较一下面积就能够得到勾股定理的证明。这里你能感受到这个证明的清晰、干净、利落和巧妙，和一种美感。定义的本身也是非常简洁优美的，它的内涵是非常丰富的。

勾三股四弦五： $3^2+4^2=5^2$

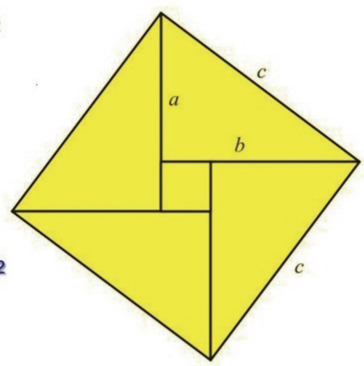
勾股定理： $a^2+b^2=c^2$

证明：

(1) $4\times ab\div 2+(a-b)^2=c^2$

(2) $2ab+a^2-2ab+b^2=c^2$

所以， $a^2+b^2=c^2$



比方说我们应用这个定理，我们就知道，平面上以原点为圆心、半径为 r 的方程，它就是一个很漂亮的方程，$x^2 + y^2 = r^2$。关于它的蕴意的丰富，我们其实可以从这里提出很多的问题来，这些问题在中学就可以让老师告诉学生，但是一般老师好像并没有这样启发学生。比方说什么样的正整数能够成为直角三角形的边长？这样的问题有趣，但还不算太难。另一个问题，如果边长都是整数，它的直角三角形面积是不是也是整数？这也比较简单。到了第三个问题，你就会发现它是惊人的难，如果直角三角形的边长都是有理数，什么情况下它的面积是整数？我们可以举一个例子，3/2、20/3、41/6，它是一个直角三角形的三个边长，它的面积是 5。看起来这个问题好像不太简单，这个问题是古埃及人提出来的，10 世纪的时候，被认为是有理三角形理论的一个主要课题。157 就是这样一个整数，以 157 为面积的最简单的有理直角三角形的三个边长，大家可以看一下，分子分母都会有 40 多位。大家可能想不到这里面会有这么复杂的数据在里头，你更想不到这个问题它会和 BSD 猜想联系在一起。BSD 猜想到目前为止谁也没能够证明它，已有的结果离完全解决遥远得很，因为它是关于椭圆曲线的一个问题，也是克雷数学研究所几个千禧年的问题之一。换句话说如果你能够证明它，能拿到 100 万美元，也有着享誉全世界的学术声誉。

我们前面提到过，欧几里得的一个证明说素数有无穷多个。素数是一个基本的数学对象，里面神秘的东西非常的多。欧几里得证明同样干净利落，富有美感。假设这个结论不对，只有有限个素数，那我把这有限个素数乘起来再

加 1，那这个新的数 M，前面 N 个素数都不会是它的因子。所以 M 的素因子就会和前面那 N 个素因子不一样，这是一个矛盾，所以素数有无穷多个，这个定理就非常完美的被证明，好像就没什么事情可以做了。但数学家他从来都不会这样考虑问题，就像庞加莱所说，“我们从来没有完全理解过一个问题，我们只是对这个问题理解得更深了一点、更多了一点。”素数看起来很容易明白，但可能是数学里面最神秘、最难以琢磨的一个对象。你会有很多问题接二连三的产生，比方说素数在自然数中间占有多大的比例？这个问题很难回答，你可以把它变得更容易琢磨一点，就 1 到 N 之间有多少个素数？这个问题到现在为止没有一个人能够回答。关于素数有无穷多个，后来欧拉有个更好的证明，欧拉的证明对数学产生了一个巨大的影响，包括产生了欧拉函数（Euler' totient function）等等，今天我们不会有时间谈这些。

还有一个看上去非常简单的问题——哥德巴赫猜想，每个大于 2 的偶数都是两个素数的和，比方说 6 可以写成 3 + 3，20 可以写成 13 + 7 等等，但是谁也没有能够证明这个结果。到目前为止最好的结果还是四、五十年前我国数学家陈景润做的，他证明了“1 + 2 ”，它的含义就是充分大的偶数都能够写成一个数字加上另一个数，另一个数的素因子不超过两个。陈景润的这项工作随着徐迟的报告文学传遍我国大江南北，敬仰、爱慕的信件如雪片般的飞过来，这个盛况后来再也没有出现过。徐迟报告文学的副产品就是，大家都知道数学家连 1 + 1 都弄不清楚，原来 1+ 1 还是这么高深的数学。

曾有人和我说起陈景润的工作，他是完全从字面上来理解“1+2”的。我试图给他解释陈景润工作中“1+2”的含义，他听后斜看了我一眼，说我不懂。我当时无语，觉得做科普还是很不容易的，同时也发现人们是多么的执着于自己不合事实的理解，可能这和他的自尊心、心智安全感也是分不开的。

另一个看起来简单的问题就是孪生素数猜想，比如 3 和 5，41 和 43，他们都是相差 2 的素数对。它的问题是，这样的素数对有没有无限多个？ 2013 年华

裔数学家张益唐在这个问题上取得巨大的突破，他证明了存在无穷多对素数，每一对素数的差都不超过 7000 万。张益唐结果哄动一时，他本人在逆境中也保持对理想追求的故事也是非常励志的，他感动了世界。

讲到数学美的时候我们还可以提一个例子，前面提到过根号 2 不是有理数，我们可以给一个很严格的证明。假设这个结论不正确，它是两个整数的比，$x = a/b$，我们可以要求分子分母没有公因子，那么去分母之后得到 $xb = a$。然后做平方得到 $x^2b^2 = a^2$，从而就是 $2b^2 = a^2$，所以 a 肯定是偶数。然后再把 $2b^2 = a^2$ 代进去之后，会得到 b 也是偶数，这样就会有一个矛盾了，所以这个假设是错的，所以它必然是一个无理数。

定理：如果$x^2 = 2$，那么x不是有理数。

证明：如果结论不正确，那么存在整数a和b使得

$$x = a/b$$

可以假设a和b互素。于是$xb = a$，所以

$x^2b^2 = a^2$。即$2b^2 = a^2$，所以a是偶数，$a = 2p$。

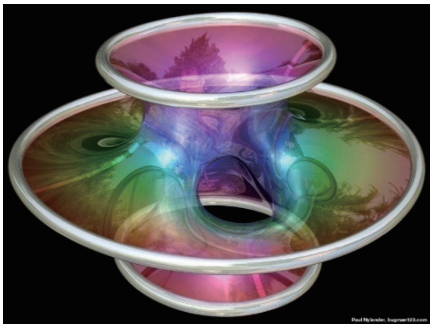
这样$2b^2 = 4p^2$，$b^2 = 2p^2$，所以b是偶数。

于是，a和b都是偶数，有公因子2，矛盾，所以x不是有理数。

我们在小学的时候都学过圆，也知道圆周率（π），大家都计算过圆周求面积等等，不过好像没有想过圆周率这个数是不是有理数或者无理数，这里反映一个问题就是我们提问题的能力是比较弱的。不知道大家注意到没有，很多的问题都是外国人提出来的，我们自己提的问题或者我们自己开创的理论是比较少的，这其实反映出来我们思维上的一个局限，愿意跟随而不愿意开创。

π 这个数不仅是一个无理数，而且还是个非常无理的数，它是一个超越数。这个事情到 1882 年才由林德曼证明，他也证明了古希腊的化圆为方的问题是不可能的。

我们前面谈的美基本上都是思维和逻辑的美，其实数学里面当然也不缺少形美，毕竟形是数学研究的对象，形里面充满了更为感知的美。这两个图像来自于极小曲面与分形几何，分形几何是研究海岸线发现的，后来成为一个很漂亮的应用数学分支，在细胞分裂的研究中也有应用。极小曲面很漂亮，也很有用。就如同他们证明正质量猜想的时候，极小曲面就是很关键的工具。

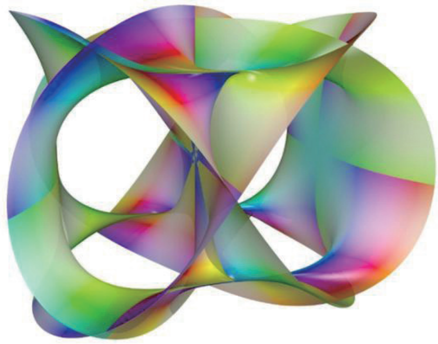


极小曲面

分形几何

还有动力系统，动力系统大家知道跟混沌是有关的，两个天体之间的运动轨迹通过万有引力就可以确定，但三体运动这个事情就变得比较复杂了，当时瑞典皇家科学院提出这个问题，要求把这个问题搞清楚。对这个问题庞加莱做了创新性的工作，他刚开始的论文获奖但有严重的错误，后来更正了。数学动力系统就从那里产生，他发现这个问题非常的不简单，存在多种情况。动力系统过去几十年在数学里面是非常活跃的，好几位数学家因为动力系统的工作拿了菲尔兹奖，包括 C. T. McMullen，包括两年前去世的一位女数学家米尔扎哈尼（Maryam Mirzakhani），这是目前唯一一位拿菲尔兹奖的女数学家，她也是 C. T. McMullen 的学生，是个伊朗人，很可惜。去世的还有一位数学家，就是弗拉基米德 • 福沃特斯基。动力系统在直观上来讲是非常简单的，一个微小的初始变化，可以带来巨大的结果上的差别。在气象学里面有一个很形象的说法，在巴西雨林里面的一个蝴蝶抖一下翅膀，纽约可能就会发生一场暴风雨。

动力系统



卡拉比 - 丘流形

右边这个图形是一个卡拉比丘流形，这应该是丘成桐最有名的工作，他证明了卡拉比猜想。卡拉比当时猜想有一类流形，丘成桐试图去证明这个猜想，后来他发现这个猜想可能是错的，就去证明这个猜想是错的，然后就在一个会上做报告。做完报告后，台下的听众觉得他讲的很有道理，所以也就对这个猜想不再关心了。卡拉比也正好在台下，听完报告回去后觉得哪个地方不太明白，就让丘成桐再解释一下。丘成桐当然要试图解释这个疑问，但是一个星期过去之后，好像没办法解释，两个星期过去了也没解释了，后来意识到他做错了。换句话说，丘成桐先生也有窘迫的时候。这其实告诉我们，每个人都有可能出错，包括伟大的数学家。很多老师可能在上课的时候都有卡住的情况，但“牛人”的做法一般人可能未必做得到，比方说大数学家希尔伯特在讲课的时候也会突然卡住愣在台上，他愣一下后会转过身来对学生说“啊！这显然的，你们自己去证吧！”

丘成桐意识到自己最初对卡拉比猜想工作有错误之后，他就朝另一个方向努力，再次证明这个猜想，过了三年终于把这个猜想证明了。因为这个工作和正质量猜想的工作，后来他拿了菲尔兹奖。他的这个工作的影响在数学里面是非常大的，丘成桐先生是几何分析这个方向一位非常重要的创始人。不但

如此，这类流形在物理中间也非常重要，人们发现在弦的里面，正好需要这样一个空间，所以他在物理界里面也是名动江湖。

数学家对美是非常有热情的，很多东西不美的话他不会追求。当然数学家也是一群有特殊天赋的人，他的个性也是多种多样的。

维纳，控制论的创始人，也是一位杰出的数学家，他在上世纪 30 年代访问过中国，对华罗庚非常欣赏。有一天他要搬家了，到一个新地方，可他对于这种事情不上心。（他的家人）老早就告诉他，当天还给了他一张新地址的纸条，让他这一天一定回到新的家里。但他回家的时候把纸条弄丢了，习惯地回到老地方，却发现家不见了。他看见一个女孩就问，“对不起，也许你认识我，我是诺伯特 • 维纳，我们刚搬家，你知道我们搬到哪儿去了吗？”那女孩非常愉快地回答说“是的，爸爸，妈妈就知道你会忘记的”。

德林才气过人，因为证明了韦伊猜想获得了菲尔兹奖。他说，“能否做数学难题只是心理问题。”这颇有点“说我行，我就行；说我不行，我就不行”的味道。这个说法也呼应了一个广为流传的真假莫辩的故事。说某个很牛的大学里面，有一天也许因为天气不好，班上一位非常杰出的学生就迟到了。他到了一看课已经结束了，黑板上只留了一些题目，这位学生是非常优秀的学生，就当作课后作业拿回去做了。（做的过程中）他发现这些题挺难的，花了一个星期时间只做出来其中的六道，然后他就有点狼狈的拿给教授说“真是抱歉，这题目有点难，我只做出六道”。教授毫无疑问的感到震惊，“什么？你把这些给解决掉了？这些都是我们这个领域里面大家正在努力解决的难题！”这个学生感到非常吃惊。所以做数学有时候是个心理问题，你觉得它是个作业的话大概就能把它做出来，如果觉得它是个难题很可能就做不出来。有点糟糕的是这个学生后来再也没有做出更好的工作，他当了系主任之后这样说，“我们是这样选系主任的，谁不能做研究的话我们就选他当系主任。”

匈牙利数学家厄尔迪斯是有传奇色彩的，他无固定的居所，总在旅行，到一处就与那儿的数学家合作，所以合作的数量惊人。他认为“数学家就是把咖啡变成定理的装置。”西格尔是第一届沃尔夫奖的得主，非常聪明，也很努力。

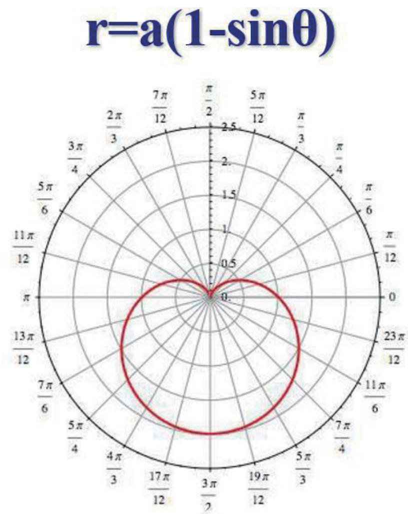
小平邦彦，杰出的日本数学家，他在上个世纪 50 年代就拿了菲尔兹奖，他常说自己天资不好，做事一丝不苟，全身心的投入，第一次学范德瓦尔登的《代数学》时什么也没看明白，看不明白怎么办？他就抄，一直抄到明白为止。我想有他这样的劲头的话，没有什么学不明白。

数学家经常犯错，我们刚才提到邱成桐先生也会犯错误。对这个犯错来讲，有些错误是好的，有些不太好。邱成桐犯的错误就是个好的错误，最后导致了问题的解决。一位数学家这样评价他的一位同事，“他犯了很多错误，但都是朝着好的方向犯的。我试着这样做，但发现犯好的错误是很困难的。”

开尔文，大家知道开氏温度，他是这样评价数学家的，他说，“数学家就是这样的人，他觉得下面这个公式是很显然的。”如果你也觉得这个公式显然的话呢，你们就会是数学家。他说刘维尔就是一个数学家。刘维尔还办了一个非常高水平的杂志，刘维尔杂志。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

笛卡儿是数学家，也是哲学家。数学上他创立了《解析几何》，哲学上他提出“我思故我在”，引起人们对意识与存在的关系的一个审视。有一个传言，说他与瑞典公主克里斯蒂娜恋爱，文字传情会被皇室审查受阻，于是他就用了一个极坐标方程表达他的爱情。幸好那个女孩也是对数学非常明白的一个人，她把这个方程转化成一个心型，从而明白了笛卡儿的心意。这么说来数学不仅是描写大自然的语言，也是描写爱情的语言。



我说完了我的报告，谢谢大家！

Q&A

问：学数学的出路何在、以后可以干什么、要是不转行一直留在数学专业的话有什么经验之谈？

答：我想有迷茫是非常正常的，但其实在报告里面也讲到了，数学是现实的一个核心，把这个核心都掌握了的话，我想将来的出路是非常宽广的。你（现在）最重要的事情就是把数学学好，如果不转行一直留在数学这个专业里，根据自己的兴趣，如果愿意做研究就做研究，如果愿意做应用可以做应用，它的整个的就业前景是非常广泛的。其实过去很多年来，在美国，学数学的职业前景一直都是排在前十的，很多年都是排在第一位，数学的就业是不用担心的。

更重要的是第一把自己的功课学好，第二找到自己的兴趣所在，是愿意做学术、还是愿意解决实际的问题等等。可以通过自己不断地探索，同时也可以跟老师探索、跟同学探索到底哪个地方自己真正有兴趣，探索清楚这样一件事情，我想方向也就明确了。

问：能否讲讲群环域这些代数结构的发展背景，并给一些学习上的建议？

答：抽象代数的发展应是 20 世纪初，有一本比较好的数学史的书能够帮助你了解它的历史，就是克莱因写的《古今数学思想》。在学习中你要重视了解的是抽象与具体的联系，要知道群的产生跟解方程是密不可分的，它实际上是产生于一些很具体的对象。在数论里面也有很多群的概念，包括交换群，同余能够产生有限环等等。所以你一定要理解抽象与具体的联系，对每一个抽象的概念，包括重要的定理，应该尽可能地用很多具体的例子，来帮助你理解。一旦把抽象和具体的联系关系处理好，近世代数里面所有的抽象就变得内容丰富了，而通过具体的例子，也能够帮你了解、思考、提出问题以及把握中间的真正实质。

问：请问应该如何结合数学的意义，在数学教学中去发展学生对数学的学习兴趣呢？或者对数学教学进行优化？

答：这应该是一个非常普遍的问题，不仅中国存在这个问题，世界上其他地方也存在这个问题。我想这并没有一般的灵丹妙药，数学里面有很多有趣的东西，必须针对具体学生的领悟程度等，通过适当的方式把它们展现出来。数学的一个特点是抽象，但它的抽象包含了很多实际的内容，用这些实际的内容来展示数学，比方说之前提到的数学的形美，可以通过画一个漂亮的椭圆来展示，就直观上让学生感受到很多有趣的东西，通过慢慢给他们这些直观的感受，使他们能感到有趣。我想经过努力，他们会感到数学是非常有意思的，并且愿意学下去，但是到底能学到哪一步还是因人而异的。

问：如何看待数学天赋，基本功与数学成果的关系？

答：从这个（网友的）名字来看，他对 Andrew Wiles 是非常敬仰的。那么其实 Andrew Wiles 的故事就能够给他很多启发，首先 Andrew Wiles 当然很有

天赋，他在很小的时候，在童年的时候，对费马大定理就非常的有兴趣，所以兴趣和天赋对于数学来讲是需要的。但是 Andrew Wiles 是非常努力的一个人，当他感到他能做出（某项研究）来的时候，就有几年的时间，其中就没有做过（其他）事情，其他的活动尽可能少的参与。没有一个很好的基本功要做很好的数学是不可能的一件事情。但是怎么样把基本功打好，这也并不是一件很容易的事情。除了自己努力学以外，很多东西必须要很好的老师给你指点，让你明白这个枯燥的东西背后的本质是什么。所以既要有天赋也要努力，再加上优秀的老师指点的话，最后取得优秀的数学成果是顺理成章的一件事情，水到渠成。

问：现在在上研究生，但感觉一直游离在数学的边缘，就像接触了一个物体，只知道这个物体重要，现实也很多地方用到它，却不知道内部是怎样的。如何才能真正进入到数学的领域？怎么样的状态才算是真正进入数学领域？

答：我想这位同学这个感觉非常的好，他至少知道自己没有弄明白东西，这就给他一个提升的空间。如果他觉得弄明白的话，这可能是更糟糕的事情。既然觉得没弄明白，就表明他还可以继续努力。他需要把这个问题具体化，比方说觉得看书看不懂，哪里不懂必须要弄明白，必须要跟老师、跟别人来交谈。对于哪一本具体的书，哪个具体的问题不懂，如果仅仅是空泛谈不懂的话，是解决不了问题的。必须把这个问题落实到某个具体，一旦他在某个地方突破了这个障碍之后，我想他可能对整个数学的感受就完全不一样了。把一个让他最最苦恼不明白的一本书拿出来，这本书里面到底是哪个地方不明白，不明白在什么地方，（通过）仔细跟人讨论，把这个不明白的问题给明确下来。很多时候这就是个探索的过程，就像庞加莱说的：“其实我们从来就没弄明白过一件事情，只是我们不断的加深理解。”所以没有弄明白这个事情很正常，需要不断地探索，可以自己探索、看书、跟别人讨论，但一定要把自己在哪个地方不明白弄清楚，如果自己在哪个地方都不明白的话，那就说明你还要在搞清楚不明白哪个问题这件事情上花更多的时间。

问：学高等代数的时候是很久以前了，没有机会读“基础代数”，不过听说还没有第三卷，什么时候出版呀？高等代数没学好，所有东西用起来感觉都是镜里观花，很机械。怎样能把代数学好用好？

答：第一个问题比较简单，第三卷已经送到出版社去了，应该在 9 月份左右(出版)，我希望它 9 月份能够出来。

那高等代数没有学好呢，有几个原因，第一个可能用的教材不够好，第二个可能老师教得不够好。他需要理解高等代数里面最本质的东西是什么，其实高等代数里面最重要的一点，它是从解方程这里发展起来的，表面上看起来通过消元法可以解出所有的方程，但事实上你发现向量的个数增多之后，这个办法肯定是不管用的。那在这个时候，对这个方程来讲它就有很多内在的结构，包括系数矩阵的秩，增广矩阵的秩等等，这个秩就反映这个方程可解不可解。还有你做消元法的时候，你发现是对它们系数作些运算，这里面产生向量空间，方程的关系实际就是向量之间的线性组合、线性关系、相关无关等等。还有就是矩阵，你抓住了线性方程以及相关的概念之后呢，你发现很多东西应该都是比较容易理解的，它的目的还是解方程。那么你发展的很多东西，反过来一方面是数学理论，拓展了这个空间，一方面它也对这个线性方程达到一个更深的理解。这个也是不断深入、不断交替的过程，已经有了线性空间之后，包括欧氏空间里面，包括各种各样变换产生的群，就会变得更为丰富，应用更为广泛。这个欧氏空间里面，这个距离，最后的话对无解的方程可以有最小二乘法等等，给出一个近似解。

你发现通过解方程这样一个脉络下去理解高等代数的话，很多东西都会变得比较容易理解，不管是对方程也好，对理论也好，这个在我书里你多读几遍能够看得出来。