侯世达蝴蝶和十瓶干马蒂尼问题

Hofstadter's Butterfly & Dry Ten Martini Problem

尤建功

科学家总爱尝试做一些别人没做过的事情。1879 年，有个名叫霍尔（Edwin Hall）的美国物理学家做了一个实验，他在一块通电的金属板的垂直方向加了磁场，奇妙的事情发生了，他发现金属板的两侧产生了一个附加电场，即金属板两侧产生了电势差，这一现象就是霍尔效应，这个电势差也被称为霍尔电势 (见图 1)。

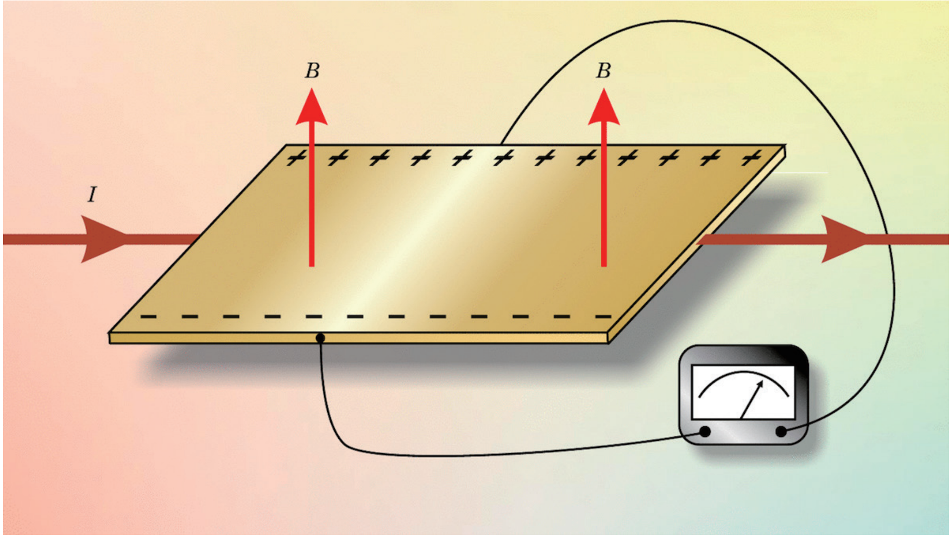

图 1 霍尔效应

100 年后，一个名叫冯 • 克利青（Klaus von Klitzing）的物理学家重温经典，又做了这个实验。不过一百年后，条件更好了，所以冯 • 克利青可以把实验做得更花哨，他用二维电子气代替金属板，并把实验环境温度降到很低。不可思议的事再次发生：冯 • 克利青发现，霍尔电势差并不连续响应磁场强度，而是量子化响应，即当磁场强度增加时，霍尔电势可能不发生变化，如果把磁场强度继续增加到某个值时，霍尔电势跳跃一个固定单位。随着磁场强度的增加，这种跳跃现象不断出现，这就是整数量子霍尔效应（图 2）。

冯 • 克利青因为此发现获得 1985 年度诺贝尔物理学奖。据说 1975 年就有人根据数值计算结果预测到了这个现象，但预测者自己也不相信自己的预

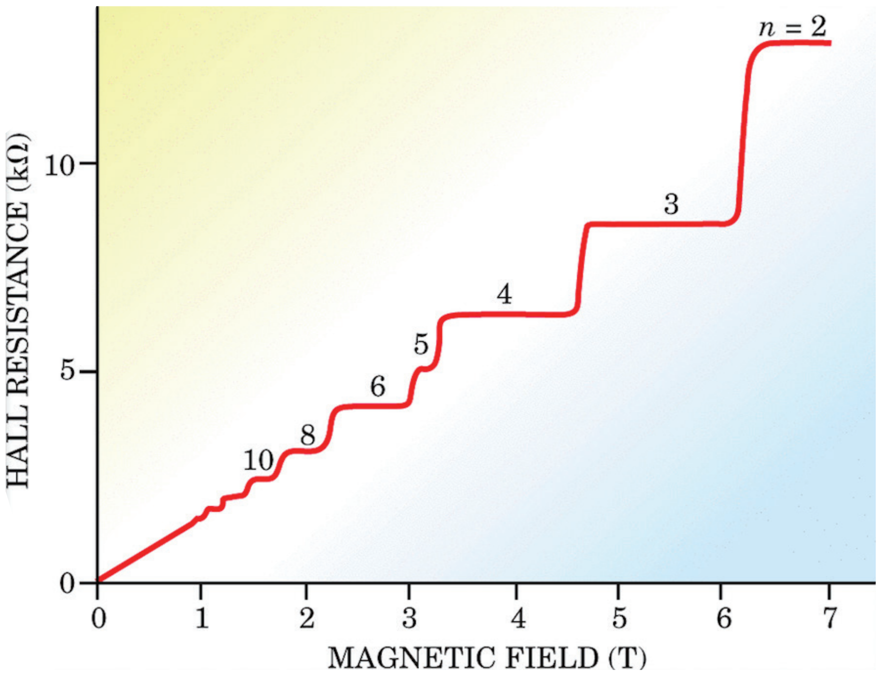

图 2 量子霍尔效应

测 [1]（看来做理论的要更自信一点）。

怎么解释这种现象呢？另一个人出场了，他叫劳夫林（Robert Laughlin）。他说之所以霍尔电势差是量子化的，是因为当费米能级落在能隙里（我们后面会介绍这个概念）的时候，霍尔电势差不会变化。当磁场强度继续增加时，能隙会向上移动，费米能级越过能隙的一刹那，霍尔电势会发生一次跳跃（劳夫林后来因为在分数量子霍尔效应方面的理论工作获得 1998 年诺贝尔物理学奖）。现在我们要提到另外一个物理学家，他叫索利斯（David James Thouless）。索利斯在康奈尔做学生的时候，曾经听卡茨（M. Kac）老师说过数学家和物理学家的区别：数学家是在简单的系统里发现复杂的性质，而物理学家是在复杂的系统里发现简单的性质。鉴于卡茨是一个能够自由行走于数学和物理里面的大神，索利斯深以为然，他觉得自己就是一个典型的物理学家，所以他要把量子霍尔效应这个复杂的问题转化为一个简单的问题。于是在 1982 年，索利斯刨根问底，他把电场取为 $a\cos(2\pi\frac{x}{a})+b\sin(2\pi\frac{y}{b})$，磁场取为 $(0, eBx)$，这样我们可以把描述这个现象的哈密顿算符具体写出来（有点复杂，这里就不写了，参见原文 [2]）。索利斯用这个哈密顿算符的 Bloch 波把霍尔电势差具体计算出来，然后看看它是不是量子化的。经过一些简单的转化，索利斯说我们只

[1] T. Ando, Y. Matsumoto, Y. Uemura, Theory of Hall effect in a two-dimensional electron system, J. Phys. Soc. Jpn. 39(1975), 279–288.

[2] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potentials, PRL, vol. 49, no. 6(1982), 405-408.

要研究下面这个定义在 l^2 空间中的简单算子就可以了：

$$(Hu)_n = u_{n+1} + u_{n-1} + 2\lambda\cos(\theta + n\alpha)u_n \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

这个算子中的三个参数都有明确的物理意义：θ 是将二维问题转化为一维问题时出来的一个自由参数，称为相位；λ 由电场中的 a, b 确定；α 是单位磁通量。这个算子并不新鲜，以前就有。物理学家称这个算子的特征方程为哈珀方程。哈珀（H. Harper）的导师佩尔斯（Rudolf Ernst Peierls）最早研究这个模型，哈珀跟随导师做研究生时，佩尔斯让哈珀继续研究这个模型，现在这个模型被命名为哈珀模型，哈珀从而青史留名。看来找个好导师很重要哟。数学家把 H 叫做 Almost Mathieu 算子。当 α 为形如 p/q 的有理数时，这个算子本质上是一个对角线元素为 $2\lambda\cos(\theta + n\alpha)$，两条第一副对角线元素为 1，其它地方为零的 q 维对称矩阵。太简单了！当 α 为无理数时，这个算子可看作一个无穷维对称矩阵，样子和有限维一样：

$$\begin{pmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \ddots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 2\lambda\cos(\theta-\omega) & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & 2\lambda\cos(\theta) & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 2\lambda\cos(\theta+\alpha) & 1 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & 2\lambda\cos(\theta+2\alpha) & \\ & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

对一个矩阵而言，最重要的当然是特征值。对一个算子来说，当然就是特征值的推广，称为谱。Almost Mathieu 算子是一个有界线性自伴算子，我们知道它的谱集是实直线的一个有界闭子集。它长得是什么样子呢？这不是一个简单的问题（物理学家认为简单的系统对数学家来说其实没那么简单。一个原因是断定某个命题为真，数学家必须给出严格证明，而物理学家只要你举不出反例即可）。这个问题几乎没有什么人关注，原因是不知道为什么要去管这个谱集长成什么样。几乎没有不等于没有，1960 年代，有个自认为有数学天赋的年轻人叫侯世达（Douglas Hofstadter），踌躇满志地去伯克利学习数论，被虐了几年后，终于决定放弃数学，转行去俄勒冈大学修物理。物理也不容易，又被虐了很多年，一无所成。总得做点什么毕业吧，于是他把 Almost Mathieu 算子拿来，把 λ 取为 1，再挑出 50 个有理数 α 用他的小计算器算这个算子的谱（注意 α 为有理数时，谱依赖于 θ，这里谱是指对所有 θ 求并），然后在 (α, E) 平面上标出来，做完后，纸上出现了一个漂亮的图形（图 3），看上去像一只长着无穷多个翅膀的蝴蝶。撇开科学价值不谈，至少这里出现了美。数学家可能会很兴奋，因为很多数学家做数学的动机就是美。但物理学家就不一样了，他们要问这有啥用。侯世达的导师就是这样想的，他最初对侯世达的数值计算结果不以为然，不认为算几个数值然后标出来就算是物理研究。但导师最后还是放