武侠和数学

陆志勤　罗茉莉

武侠小说里有“听风辨器”一说，讲的是武林高手在战斗中，闭上眼睛，气沉丹田，就可以听出对手武器的种类、来袭的方向等等。比如《天龙八部》里漂亮的王语嫣，不仅能听出对手使用的暗器的形状，还可以听出他的门派、练武的层次、有没有走火入魔等等细节……当然这只是小说，现实生活中不可能有这样的人。但是另一方面，一个普通人可以毫不费力地听出不同乐器发出的声音，比如大提琴和小提琴发出的声音就是不一样的。大提琴声音低沉，小提琴声音比较清亮。一个受过训练的音乐工作者肯定可以分辨出更多的细节。这里就产生一个数学问题：如果有一双完美的耳朵，并且受过足够的训练，那么一个人通过听觉最多能够听出一种乐器的多少细节？

1966 年，马克 • 卡兹（Mark Kac, 1914-1984）在《美国数学月刊》（*American Mathematical Monthly*）上发表了一篇文章，阐述了这个数学问题。其实对于管弦乐器来说，“听音辨器”这个问题比较简单，甚至不需要用到多少数学。我们知道，一种管弦乐器，比如提琴，它的每一根弦发出的声音的主要部分被称为基音，而基音的频率被称为基础频率。除了基音以外，琴声中还包含泛音。泛音的频率是基音的整数倍，它能够和基音一起组成和谐的共振之音。对于一双灵敏的耳朵，听出基音的频率是不成问题的。如果基音低沉，那说明提琴的弦比较长，那就是大提琴，如果基音比较高亢，那就是小提琴。

小提琴的弦本质上是一维的。一维的问题容易解决，对于二维的物体，同样的问题就困难得多。在卡兹的文章中，他用鼓来作为两维乐器的代表。真实的鼓当然大多数都是圆形的。不过为了能够讨论这里的数学问题，我们做一些假设：首先我们假定鼓发出的声音只和鼓面的形状有关，而与整个（三维的）鼓以及生产鼓的材料无关；其次我们假定鼓面的形状不仅可以是圆形的，也可以是椭圆形的，三角形的，甚至可以是多边形的。也就是说，我们假定鼓面是平面上的一个有界区域。和小提琴的情况相同的是，擂鼓发出声音的主要部分被称为基音，而基音的频率被称为基础频率；除了基音以外，鼓声中也包含泛音。和小提琴的情形不同的是，在二维的情形下，泛音一般不是基音的整数倍了，它们之间也没有明显的联系。根据数学上的傅立叶级数理论，鼓声其实是许多不同频率的声音（基音和泛音）组合而成的。我们假定一双完美的耳朵可以从鼓声中分离出所有不同频率的声音，而每一种频率可以用一个正实数来表示，在这种假设下，我们可以问这样的一个数学问题：是否所有的这些实数的集合能完全决定那一面被听的鼓的形状呢？这个就是 1966 年卡兹提出的著名的问题。

奇妙的是，研究鼓声，或者鼓的振动，和我们日常生活中的另一个常见的现象：热传导，有着相同的数学基础。在数学上，这些现象都能够被归结为下列特征值方程（和一些边界条件，这里我们不详细论述了）

$$\Delta f + \lambda f = 0.$$

在上面的方程中，Δ 被称为拉普拉斯算子，这个称号是用来纪念法国数学家拉普拉斯（1749-1827），它是微分方程里最重要的算子之一。希腊字母 λ 是一个正实数，用来表示鼓能发出的某一种频率的平方，也即基音或某一种泛音的平方。在数学上，我们称 λ 为“特征值”。f 被称为“特征函数”，它也有一定的物理意义，不过这里我们就不详细解释了。

在一维情形（弦振动），上面的方程可以被简化为

$$f'' + \lambda f = 0,$$

其中 f'' 表示 f 的二阶导数。这个方程在工程上被称为简谐振动方程，它的解是正弦和余弦函数的组合。通过研究这个方程，我们可以从数学上严格证明音乐家们早就知道的事实：所有的特征值都是最小的那个特征值的整数平方倍。

二维的（鼓振动）问题就困难的多，首先特征值方程会变得看上去有点吓人

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\lambda f=0.$$

这是一个二阶偏微分方程。和一维情形不一样的是，对于一般的平面区域，