



《数学文化》2019年度会议与会人员合影

左起：王涛，庄歌，张英伯，丁玖，蔡天新，林亚南，顾沛，刘建亚，张益唐，汤涛，邓明立，罗懋康，张智民，贾朝华，付晓青

主 办 香港沙田石门安群街1号京瑞广场二期9楼B室  
Global Science Press Limited

主 编 刘建亚（山东大学）  
汤 涛（北师大港浸大/南方科技大学）

编 委 蔡天新（浙江大学） 邓明立（河北师范大学）  
丁 玖（南密西西比大学） 顾 沛（南开大学）  
项武义（加州大学） 贾朝华（中国科学院）  
林亚南（厦门大学） 罗懋康（四川大学）  
张英伯（北京师范大学） 张智民（北京计算科学研究中心）

美术编辑 庄 歌

文字编辑 付晓青

特约撰稿人 范 明 金小庆 林开亮 卢昌海  
欧阳顺湘 王 涛 张小平 赵 京

《数学文化》旨在发表高质量的传播数学文化的文章；  
主要面向广大的数学爱好者

《数学文化》欢迎投稿，来稿请寄：  
mc@global-sci.com

本刊网站：<http://www.global-sci.org/mc/>  
本刊淘宝网：<https://shop137795018.taobao.com/>  
本期出版时间：2020年2月

本刊鸣谢国家自然科学基金数学天元基金、  
南方科技大学、山东数学学会的支持

# Contents | 目录

## 数学人物

- 黎曼：他对素数有着迷人的依恋 蔡天新 3  
七位早年代数人（下） 黎景辉 张英伯 14

## 数学家访谈

- 欧文·卡普兰斯基访谈录 Donald J. Albers 27

## 数学经纬

- 与陶哲轩“共舞”的一个周末 丁 玫 50  
发光的玉雕  
——那些不朽的数学小品 贾朝华 56

## 数学教育

- 高等代数应该怎么学 朱富海 66

## 数学烟云

- 音乐与数学 王 杰 74

## 数学趣谈

- 朱丽亚的话剧世界 柳形上 94  
魔术中的数学艺术 田沅泽寰 107

## 数学人随笔

- 北大数学人点滴 田 军 114

## 好书推荐

- 小平邦彦《情者集：数感与数学》书评 丁 玫 122



勘误说明：

2019年第4期“董铁宝”一文中，第59页倒数第3行，次子董迈、三子董恺应为长子董迈、次子董恺；第70页第6段第3行，杨式得应为杨式德，特此更正。

对于给读者造成的困扰，笔者深表歉意。王涛





## 黎曼：他对素数有着迷人的依恋

蔡天新

我身体的大部分会逃脱死亡，我将会永生，仍然活在后世的赞美声中。

——（古罗马）贺拉斯

2019年4月10日，包括上海天文台在内的全球六家天文观察机构同时发表声明，公布了他们合作拍摄的首张黑洞照片。回忆此前两年，引力波被直接探测到和阿蒂亚爵士宣布证明黎曼猜想这两项重大科学新闻，同样引发了全球公众的高度关注，丝毫不亚于一年一度的奥斯卡颁奖礼或四年一度的夏季奥运会。物理学家爱因斯坦再次成为人们膜拜的偶像，与黑洞一样，引力波的存在性也是他的广义相对论所预言的。然而，却有一个关键性人物被忽视了，那便是19世纪的天才数学家黎曼，他建立的黎曼几何学是爱因斯坦广义相对论的基石，同时他又提出了迄今为止数学领域最负盛名的黎曼猜想。

### 1 来自文德兰的乡村男孩

2010年秋天，我有幸应哥廷根大学一位数学同

行的邀请，造访了这一慕名已久的数学圣地。9月4日，星期六，一早我便乘坐巴士去了哥廷根车站，开始了一周一天的火车之旅。我按照既定的计划，上午游览不莱梅，下午游览汉堡，它们是首都柏林以外仅有的两座直辖市，也是德国吞吐量最大的两个港口，分别位于威悉河和易北河下游，离北海入海处均不远。在汉堡用过晚餐之后，我乘火车踏上了归途。与来时路线相反，我选择了东线，经过吕讷堡、于尔岑，到汉诺威后再换车返回哥廷根。

巧合的是，这几座城镇恰好都与本文主人公——德国数学家兼物理学家伯恩哈德·黎曼有着密切的关联。于尔岑是离黎曼出生地布雷斯拉茨村和他度过童年大部分时光的小村奎克博恩最近的火车站，即便黎曼时代不通火车，这里也是他去往哥廷根求学的必经之地。记得火车是在日落时分抵达，靠站后才发现，我的车厢正对着小站出口。我于是下了



小站于尔岑，离黎曼故乡最近的火车站。作者摄



高斯（坐者）和19世纪最重要的物理学家之一威廉·韦伯

车，拍摄了于尔岑车站的牌匾，蓝底白字，站台上还有彩色鹅卵石铺就的几何图案。在那短促的几分钟时间里，我满脑子都是黎曼的身影。

无论布雷斯伦茨，还是奎克博恩，离源于波兰和捷克边界附近的易北河都只有几英里远。那是汉诺威王国向东伸入到普鲁士王国的地方，由于两国以大河为界，因此也堪称一处地理死角。此地旧称文德兰（Wendland），在古德语里的意思是“说斯拉夫语的人”。据说6世纪时，文德兰是大批斯拉夫人西迁到达的最远处，而“布雷斯伦茨”这个词本身就是从斯拉夫语的“桦树”一词转化而来。1826年9月17日，黎曼出生在布雷斯伦茨。几年以后，他的父亲奉调到离易北河更近的村庄奎克博恩担任牧师，他们全家也随之迁往那里。

14岁那年，黎曼进入了汉诺威的文理中学。汉诺威是同名王国的首府，17世纪的数学家兼哲学家、微积分学的两位发明人之一莱布尼茨在此度过一生的大部分时光，后来他也葬身于此，大量手稿保存在汉诺威图书馆。正是因为莱布尼茨的出现，才给大器晚

成的德意志民族以智力上的自信。但黎曼来汉诺威上学主要是因为他的外祖母在此，这样可以省去住宿费。他的父亲是一位穷牧师，人到中年才成婚，后来一下子有了六个孩子，黎曼在家中排行老二也是长子。

不幸的是，黎曼就读汉诺威两年后，外祖母便去世了。他转学到吕讷堡镇的一所中学，在一位希伯来文老师家里膳宿。吕讷堡是“音乐之父”巴赫初出茅庐的居留地，那里离黎曼的故乡也比较近，他可以步行回家，因此常在节假日与家人团聚。这样一来，黎曼不再像在汉诺威时那样感到孤单。虽然那会儿他尚未显示出是个多么优秀的学生，但已开始对数学发生兴趣。中学校长注意到这个孩子的数学才能，让他随意进出自己的图书馆，甚至允许他可以不上数学课。有一次校长借给黎曼法国数学家勒让德859页厚的巨著《数论》，没想到他仅用六天时间便看完归还了。

另一方面，由于贫穷造成的营养不良，黎曼从小身体虚弱，甚至每次步行回家都会觉得很累，但他却十分享受与家人在一起的短暂时光。不仅如此，





哥廷根市景色

每次回家前夕，他都要用节省下来的零花钱给父母和兄弟姐妹买小礼物，这给他带来心灵的慰藉。在黎曼的母亲写给儿子的信中，也常常为他的身体感到担忧。1846年，20岁的黎曼被哥廷根大学神学院录取了，那个年龄上大学对一位数学天才来说可算是够晚的，而且他和家人当时的想法只是子承父业，将来做一名牧师。

黎曼来到哥廷根的时候，这所汉诺威王国的最高学府已经创办一个多世纪。九年前哥廷根经历了“七君子事件”，包括物理学家韦伯和童话作家格林兄弟在内的七位知名教授因为反对新继位的国王取消“自由宪法”而遭解聘，元气尚未恢复。尽管如此，哥廷根却因为拥有“数学王子”高斯而吸引了全欧洲对数学感兴趣的年轻人，即便那时高斯已年近七旬。黎曼在听过高斯的《最小二乘法》课以后，向父亲坦承，他对数学的兴趣超过了神学。而黎曼的父亲为人仁慈，加上他对自己毕生从事的职业也不甚满意，便同意儿子遵循自己的意愿以数学谋生。

## 2 外表文弱羞怯的年轻人

关于黎曼的生平，至今我们所知的仍然不多，他本人也没有留下内心活动的记录，只有部分往来的书信。即便同代人的描述，也只有他的师弟戴德金，在黎曼去世十年以后编撰他的合集时为他写下的一篇小传。这篇小传共17页，恰好是高斯最喜爱的数字之一。戴德金是黎曼与他共同的导师高斯的同乡，出生在不伦瑞克，他是高斯的关门弟子。不伦瑞克在汉诺威的东南，因此不在我那个周六的旅行线路上，但在此之前的那个周末，我曾专程游览了汉诺威和不伦瑞克。

在高斯的弟子中，即便把黎曼排除在外，戴德金也未必是最出色的，至少在哥廷根时期如此。他比黎曼晚一年获得博士学位，之后留校做了无薪讲师（依照修课的学生多少获取报酬）。六年以后，他并没有获得提升，而是转任苏黎世联邦工业大学的前身——一所技术专科学校，并在随后回到故乡不



伦瑞克的卡洛琳技术学院（那是他和高斯的母校）。戴德金生命的最后约半个世纪时光在故乡度过，他比牛顿还要长寿。在他 70 岁那年，英国数学家、哲学家罗素这样写道，

芝诺曾关心过三个问题：无穷小、无穷和连续。每一代最优秀的智者都尝试过解决这些问题，但是确切地说，他们什么也没有得到……维尔斯特拉斯、戴德金和 G·康托尔彻底解决了它们，他们的解答清楚得不再留下丝毫怀疑，这可能是这个时代所能夸耀的最伟大的成就。

依照戴德金的描述，黎曼是个极为羞怯的人。每当黎曼出现在人群中，他都会觉得不自在。这与他从小所处的宗教环境不无关系，他的家族成员都是虔诚的路德教徒，他们“每天在上帝面前自我反省”。在家族成员之间，他们的关系非常亲密，而每当离开奎克博恩那个牧师之家时，黎曼便会犯思乡病，就如同法国前辈数学家、思想家、文学家帕斯卡尔，或者后来客居英伦的印度数学天才拉曼纽扬一样。此外，他和拉曼纽扬还有一个不愿离去的共同的老朋友——肺结核。

除了思乡病和肺结核以外，黎曼还是一位疑病症患者，这个词是如今流行的忧郁症的同义语。只不过由于黎曼遗孀的请求，戴德金才避免使用它。黎曼夫人是他的姐姐的朋友，他的姐姐是兄弟姐妹六人中唯一比黎曼活得长久的人。在他们备受崇敬和爱戴的父亲去世以后，黎曼经常沉浸在痛苦的回忆之中，幸好他有一座安逸的避风港，实时转移了他的注意力，那就是他的数学世界。特别地，黎曼对素数及其分布有着一种深深的、迷人的依恋。

在黎曼的时代，德意志的高等教育已开始实行教育家冯·洪堡倡导的改革，大学的首要任务是教学，尤其是培养优秀的中学教师，而把研究工作交给科学院。于是乎，甚至高斯那样伟大的数学家都被要求讲授《线性代数》那样的基础课程，唯有冯·洪堡本人创办的柏林大学反而例外，那里的数学研究处

于领先地位，尽管没有高斯那样英雄史诗般的人物。幸好那时候德意志的大学有条规则，学生学习期间可以到其他学校修学。为了汲取更多的营养，黎曼转学到了柏林，他的师弟戴德金稍后也跟着去了。

在柏林大学的两年期间，黎曼如饥似渴地学习新的、充满活力的数学，那会儿数学家雅可比、狄里克莱、施坦纳和艾森斯坦等人都在柏大。黎曼向他们学到了很多——从雅可比那里学到高等代数和高等力学，从狄里克莱那里学到数论和分析，从施坦纳那里学到了现代几何，而从仅仅比他年长三岁的艾森斯坦那里则学到了椭圆函数和自信。与此同时，黎曼也不可避免地参加了发生在柏林的政治运动，他曾在皇家卫队里熬夜值班守护貌似神圣的国王，不过那对他的学术生涯似乎没有影响。

### 3 一颗太阳一样辉耀的心

1849 年，黎曼从柏林回到了哥廷根，开始攻读博士学位。两年以后，他提交了一篇题为《单复变函数一般理论的基础》的论文，获得了博士学位，那一年他 25 岁。原本，黎曼可以更早完成博士论文，但他在哥廷根求学的最后一年半，以极大的兴趣去听哲学讲座和韦伯的实验物理学课程，他对物理学着了迷，把他的纯粹数学暂时放到一边。这使得他后来的数学工作常常处于更深的哲学背景下，同时也毕生保持了对物理学的浓厚兴趣。虽说黎曼的外表文弱、羞怯，但他的内心却勇敢而强大，拥有一颗像太阳那样辉耀的心，加上卓越的才华，使他具备一种惊人的冲击力和能量。

复变函数论是数学的重要分支，黎曼与法国人柯西、德国同胞维尔斯特拉斯被公认为是这一分支的三大奠基人，他们的出发点有所不同，柯西是从分析出发，维尔斯特拉斯是从函数论出发，而黎曼则是从几何出发。柯西虽然已建立柯西-黎曼方程，但主要是针对单值函数，他甚至对极点和支点也不加区分。黎曼的工作弥补了这方面的缺陷，他给单