



排列——扑克牌叠背后的数学模型

田沅泽寰

思考起源

在一些以数牌和切牌为基本操作的数学魔术中，常常因为过于繁琐、无聊而使得其魔术效果大打折扣。而如何精妙地运用数学性质，以及合理化这些本有些不合常理的操作，也是把数学原理应用在魔术中最大的困难之一。今天要分享的魔术作品，虽然用到的魔术操作、数学原理和模型在之前的文章中有提到过，但今天我们换一个角度来看，就会有完全不同的认识。并且，这个魔术在应用原理的不着痕迹上，也令我眼前一亮：世间如何会有这么天衣无缝的作品！

魔术欣赏

聪明的小丑 (The Clever Joker)

表演详情请扫码或访问以下链接观看：



The Clever Joker

视频链接：<https://v.qq.com/x/page/h0808dydh1g.html>

操作释义

切牌 (cut)：指把整个扑克牌从顶端开始的连续 n 张一起拿起来，放置一



旁成另外一叠。

完成切牌 (complete the cut): 一般指在切牌以后把剩余部分叠在切出去的牌上, 但此处泛指所有把两叠牌直接有序叠在一起合成一叠的基本操作。它经常和切牌一起叫作**切牌和完成切牌 (cut and complete the cut)**。

这个两个操作在上一篇《如何让观众随便选? ——加减法的奥秘》中已经提到了, 并且我们已经对切牌和数牌操作后, 某个特定原索引位置的牌会如何进入新牌叠以及新索引的变化规律进行了基于加减运算的建模。那篇文章建模的角度是单张牌, 今天我们换成从整个牌叠的整体角度来分析。

数学故事

扑克牌叠的基本模型就是排列。今天我们来聊聊, 排列这一数学对象的由来。

在上一篇《如何让观众随便选? ——加减法的奥秘》中我们谈到了用来度量集合大小的自然数, 这是自然数的第一个用法, 用于计数, 即基数的集合大小的度量。而自然界还有很多对象构成的整体, 他们确实也和集合里的元素一样, 是确定、互异的, 但是却不散乱的一筐枣子或者一群野猪, 有着明显的“序”的特征。

还是拿首长吃枣子为例。以前的枣子都是一筐筐, 无序的, 但是哪怕是同一筐枣子, 也有大小, 成熟程度的不同, 要想指定其中一颗告诉下属拿来吃, 这个交流十分麻烦。一天, 首长突发奇想, 想先从一筐中最小的枣子吃起, 然后吃其次的, 最后是最大的。于是, 废了九牛二虎之力, 终于把一筐枣子排成了一排。且依着序, 对每一颗枣子都进行了编号, 第一颗枣子编号为 1, 然后下一个是 2, 再往下一个是 3, 4, …… 9, A, B, C, ……当年在有阿拉伯数字以前, 用的符号可能不同, 但是不影响这里作为序数的本质, 都是对序数的编码。



图 1. 一排枣子

然后, 首长总结出了这一串枣子的性质:

0. 每颗枣子都可以在指定的序列下编号, 这样就可以通过编号指定一串中的任何一颗枣子;
1. 这一串枣子是有唯一起点的, 即最小的那一颗, 它前面没有枣子了;
2. 这一串枣子也有唯一终点, 即最大的那一颗, 是依次数下去的最后一颗;
3. 除了最大的那颗, 每一颗枣子后面, 都只有唯一的枣子, 即所有枣子中

比它大的中最小的那个；

4. 除了最小的那颗，每一颗枣子前面，都只有唯一的枣子，即所有枣子中比小的中的最大的那个；

5. 枣子的序数值，和包括它在内的前面所有的枣子合起来的集合的基数的大小相等；

6. 后面枣子减前面枣子序数值的差，根据数值加减法的定义和 5，等于后面枣子（包括自己）到前面枣子（不包括自己）的枣子数量；

7. 枣子集合因此有了和位于串上位置有关的前后关系，取任意一颗枣子，其他枣子要么在前面，要么在后面；

8. 枣子的前后位置关系有个特点，如果 A 枣子在 B 枣子前面，B 又在 C 前面，那么 A 必然在 C 前面。

于是，从从小到大排列的枣子开始，酋长也用类似的方法去排列他的野猪，比如瘦的到胖的，黑的到白的。酋长发现，这种排好的对象比集合容易管理多了，比如，他可以用统一的编号告诉下属今天想吃哪几颗枣子，比如第 1, 3, 6 颗，以及第 8 头到 12 头猪，15 到后面所有的等等。

我们可以看到，无论是枣子还是野猪的排列，其核心结构就是在一个集合里拿着一个个元素不断地不放回地取用，并与之前刚取用的元素形成一种特定的关系，可以是大小，颜色深浅，或者干脆就是随意地数数时候的随机顺序，直到取完。这个集合里的元素被附上这样一种由取用的顺序关系以后，就能够统一编号。那在数学上，这到底被总结为了怎样一种关系，又作了哪些抽象呢？

没错，这种对象，我们统一叫作排列（**permutation**）。

就此，排列这种数学对象就正式诞生了，我们又多了一种抽象一群对象，理清他们关系的一种模型，并且在每天不知不觉地使用着。比如一串大小不一的珍珠从线头串到线尾，你可以说第 5 颗最亮，用统一编码的序数就能指向一颗排列内特定的珍珠；人行道旁的一排排树，越远处的树看起来越小，这一描述是建立在树是有序排列的基础上的；甚至是我们的自然语言，也是文字的序列，也在用序的前后关系来表达一个词袋表达不了的语义，比如“我吃老虎”和“老虎吃我”都是三个词的集合，但是前后排列不同决定了其语义的不同……当然，还有我们的一叠扑克牌，我们留在魔术部分慢慢讲。

数学原理

有了上面的感性认识，我们来严谨地定义一下排列这一数学对象。

S 是一个有限集合， $s, e \in S, |S| = n$, 映射 $f: S - \{e\} \rightarrow S - \{s\}$,

满足 $f(s) \in S - \{s\}, ff(s) \in S - \{s, f(s)\}, \dots, f^{n-1}(s) = e$,

则称 f 是 S 上的一个排列。

这个定义便是上面酋长数枣子总结的 1~4 条的数学表达。上面对 f 的定义，正是对前面大小，颜色深浅等任意关系形成结构的一种抽象，而他们满足的共

同性质是，从集合里某个元素开始，剩下的每个元素，都由某个叫“下一个”的函数得到，而且取了一次后就不能再取，由此还可以定义一个叫“上一个”的反函数。比如一串珍珠的下一颗，一叠作业本的下一本，自然也有上一颗，上一本等等。他们呈现出来可以是一串、一叠、一排，元素也来自各自不同的集合，但是我们可以统一抽象出这个叫排列的函数关系。大自然如此五彩缤纷，却有着统一的规律，这就是数学的智慧。

不仅如此，我们还对任意地这样从集合取元素的过程的每一步进行了编号，取的第一个元素叫1，后面的分别编号为2, 3, ……，9，当它推演到无穷就是自然数了，它可以给集合内任意元素给定排列以后指定一个编号来编码。之所以可以这么做，是因为他们都是集合上同样性质的关系，不管集合具体是什么，取“下一个”元素的方案是什么，他们都用统一的字母 S 和 f 表达了，自然也可以用统一的编号来代替。这种普遍规律的发现和结构的提取，就是数学的价值，我们的思维层级也因为数学工具的掌握而变得更高而贴近本质。

没错，这就是自然数用于计数时叫“序数”的意思。这样，我们就能用这个数来交流一个元素在一个排序中的位置，我们的大脑快速地就能反映出这个值和集合大小的关系，进而判断一些信息。比如你的排名是50人里第10是个什么水平，排队排在100人中第80位大概是个什么感受等等。

还记得上一篇《如何让观众随便选？——加减法的奥秘》里用自然数来衡量集合的大小吗？当你还不知道这个集合有多少元素的时候，其实在一个个数的过程中，相当于从随意取一个元素开始，不断地在不放回地取下一颗，那最后一颗的序数编号，就可以作为代表这个集合所含元素多少的符号了。而同样的用这个自然数的编号来表示数量多少的计数时，我们称为基数。并且，和序数使用了完全相同的符号体系。在英文中，其实是有one, two, three和first, second, third这样的区别来指示不同意思的，汉语中则是用第一、第二的“第”来表明序数，一个、两个中的“个”等量词来表达基数，而通用的阿拉伯数字符号是不区分这一点的，使用时候要在各自语言中区分。

但集合基数大小一定和最后一个元素的序数相等吗？其实，这是从1开始编号基序自然数的性质。假设从0开始编号，即从没有开始，那么最后一个元素的序数就比集合数量基数小1，因为该序数记的，是自己前面的两两相邻关系 f 的个数。其实，就是这一排序列的间隔的个数，或者其实排序的就是间隔本身。我们日常计数之所以从1开始，就是因为取的就是包括其自身的前面元素总数的性质。而计算机里从0开始，取的就是间隔数，或者距离起点的单位距离的个数，数值上刚好是不包括自己的前面元素的数量。酋长总结的枣子序列5, 6的性质就是说的这一点。

最后我们回到酋长给枣子排列总结的性质7和8，这里有个疑问：根据枣子的两两大小关系，一定能排成一串吗？也就是说，这一串枣子，一定能如酋长所料，任意一颗都比前面的大，比后面的小吗？还有，这种大小关系真的能够如8所述地传递吗？

换成数学语言就是：集合上定义的“下一个”任意次复合所形成的“后面”