在无限的范围里寻找答案是困难的，但高中数学可以帮助你缩小搜索范围。

迄今为止，人类研究整数已经有上千年的历史了，你可能会认为我们了解了关于数字 3 的一切。但最近数学家们又有了一些关于整数 3 的新发现：用第三种方法将 3 表示为三个整数的立方和。如何把一个整数表示为三个整数的完全立方和，这是一个非常有趣的问题。一般来说，大多数的整数都不能被写成一个立方或两个立方的和，但我们可以猜测，或许它们是可以被写成三个立方的和。然而，找到这三个立方是件不容易的事。

比方说，我们可以把 3 写成 $1^3+1^3+1^3$，也可以写成 $4^3+4^3+(-5)^3$，但这 60 多年来，数学家们一直在思考是否还有别的表示方法。今年（指 2019 年，后同）9 月，安德鲁•布克（Andrew Booker）和安德鲁•萨瑟兰（Andrew Sutherland）终于找到了这第三种方法：

$$\begin{aligned}3 &= 569{,}936{,}821{,}221{,}962{,}380{,}720^3\\ &\quad+(-569{,}936{,}821{,}113{,}563{,}493{,}509)^3\\ &\quad+(-472{,}715{,}493{,}453{,}327{,}032)^3.\end{aligned}$$

（如果你想检查一下答案是否正确，大可不必费心地拿起你的计算器：因为大多数计算器的内存天生就无法运行这么多数字，但 WolframAlpha 可以处理。）

为了找到关于整数 3 的新的表示方法，数学家们使用了今年早些时候新发现的方法，当时布克有史以来第一次将整数 33 表示为三个立方之和。但为什么取得这些进展要花费这么长时间呢？嗯，因为在寻找正确的立方的过程中，需要搜索的范围很广，而且几乎没有什么线索可寻，所以诀窍就在于找到更聪明的搜索方式。为了更好的理解这个问题和其结果的表示方法，让我们从一个简单的问题开始：如何把 33 写成三个整数的和？

我们可以写成 $33=19+6+8$，或者 $33=11+11+11$，又或者 $33=31+$

1 + 1。我们也可以加入负数来写成 33 = 35 + (−1) + (−1)。我们有无数种方法可以做到这一点，因为我们总是可以增加一个或者两个数字，减小另外的数字来进行平衡，像这样 33 = 36 + (−1) + (−2)，33 = 100 + 41 +(−108)，以此类推。

那如果把 33 写成三个整数的平方和会怎么样呢？我们需要找到三个“完全平方数”——即这些数字等于一个整数乘以它自己，例如 $1 = 1^2$, $9 = 3^2$, $64 = 8^2$——这些加起来等于 33。试过之后，你可能会发现 $33 = 4^2 + 4^2 + 1^2$ 或者 $33 = 5^2 + 2^2 + 2^2$。那还有其他的表示方法吗？不一定有。但你可以用 −4 代替 4，仍然可以得到 $33 = (-4)^2 + 4^2 + 1^2$，这又给我们增加了几种不同的写法，但是不管怎样，只有少数几种方法可以把 33 表示成三个平方和。

这是因为在对平方求和的过程中我们没有了对整数求和时那样的灵活性。我们可选择的整数会更少，而且如果增加了整数的选择性，只会增加我们的总和。这是因为完全平方永远不会是负的：正整数或负整数的平方永远都是正整数。

再者，平方的限制性更强，但这些限制也带来了一些好处：让我们的搜索范围变成“有界的”。在试图找出三个平方之和等于 33 时，我们不能使用任何平方之后会大于 33 的数字，因为一旦这个数字平方之后超过 33，就没有办法再减小它了。这意味着我们只能考虑 0^2、1^2、2^2、3^2、4^2 和 5^2 的组合（我们将忽略与它们对应的负数，因为在平方中使用这些负数实际上并不会增加任何本质上的新的表达方式）。

对于我们的 3 个平方，它们每个对应的都只有 6 个选择，所以我们有少于 $6\times6\times6 = 216$ 种方式使这 3 个平方的和相加可能等于 33。这是一个很小的范围让我们可以逐个检查每一种可能性，并确保我们没有任何遗漏。

现在让我们把关注点放回到如何将 33 表示为三个整数三次方之和这个问题上。不难看出，它结合了之前所述的平方和与整数和的特性。与二次方一样，并不是每个数字都是其他数字的三次方。我们可以用 $1 = 1^3$, $8 = 2^3$, $125 = 5^3$ 这样的数字，但是我们肯定不能用 2, 3, 4, 10, 108 或其他这样类似的数字。与平方不同的是，完全立方可以是负的——例如 $(-2)^3 = -8$，$(-4)^3= -64$ ——这意味着我们可以使用负数来减小我们的总和。这种对负数的使用为我们的和提供了无限选择，意味着我们的搜索范围就像整数和问题一样，是无界的。

一个无界的搜索范围意味着我们可能要花费更长的时间才能找到答案。人们已经找了几十年了，最终通过一台超级计算机和一些聪明的数学运算找到了立方和的正确组合。让我们来看看是怎么计算的。

假设你想要寻找一个表示方法：

$$33 = x^3 + y^3 + z^3.$$

一种简单的方法是通过划定一个数字区间，然后逐个进行尝试，直到有结果为止。如果没有，那就重新定义一个新的搜索范围再逐个尝试。这有点像海底捞针，又好似用天文望远镜系统地扫描宇宙来寻找新的行星。

想象你的初始搜索范围是在 −100 到 100 之间的所有的 x, y, z。所以首先你要尝试：