



部分编委 2012 夏合影

前排从左至右：林亚南，刘建亚，张智民，付晓青；后排从左至右：张英伯，蔡天新，邓明立，顾沛，罗懋康，汤涛，励建书，游志平（刘青阳 摄）

主 办	香港 Global Science Press 沙田新城市中央广场第一座 1521 室		
主 编	刘建亚（山东大学） 汤 涛（香港浸会大学）		
编 委	邓明立（河北师范大学）	蔡天新（浙江大学）	
	丁 玖（南密西西比大学）	项武义（加州大学）	
	贾朝华（中国科学院）	罗懋康（四川大学）	
	张英伯（北京师范大学）	顾 沛（南开大学）	
	张智民（韦恩州立大学）	林亚南（厦门大学）	
	宗传明（北京大学）		
美术编辑	庄 歌		
文字编辑	付晓青		
特约撰稿人	李尚志	姚 楠	游志平
	木 遥	于 品	蒋 迅
			欧阳顺湘
			卢昌海

《数学文化》旨在发表高质量的传播数学文化的文章；
主要面向广大的数学爱好者

《数学文化》欢迎投稿，来稿请寄：
Math.Cult@gmail.com

本刊网站：<http://www.global-sci.org/mc/>
本刊淘宝网：<http://mysanco.taobao.com/>
本期出版时间：2013年2月

本刊鸣谢国家自然科学基金数学天元基金
和科学出版社的支持

Contents | 目录

数学人物

- 盲人数学工作者的世界 Allyn Jackson 3

数学趣谈

- 数字间的邂逅 柳形上 9
重心 (Barycentric) 坐标的一个妙用 万精油 13

数学烟云

- 谷歌数学涂鸦赏析 (上) 欧阳顺湘 16
正态分布的前世今生 (上) 靳志辉 36
希尔伯特与广义相对论场方程 卢昌海 48

数学教育

- 互联网数学开放教育发展近况 杨经晓 61
一段精彩的数学之旅
——介绍一个高中数学夏令营 励容达 69

数学经纬

- 张家山汉简《算数书》“衰材”三题 吴朝阳 晋文 74
我和苏步青先生的一段诗翰情缘 胡炳生 80
微博上的数学漫游 (四) 歌之忆 84
“学为人师，行为世范”的典范蒋硕民教授 蒋 迅 94

数学家随笔

- 陈年佳酿 汪晓勤 101

新书推荐

- 数是我们心灵的产物 蔡天新 108
潘承洞《数论基础》——校后记 展 涛 112



盲人数学工作者的世界

Allyn Jackson / 文 香陵居士 / 译

造访盲人几何学家伯纳德·莫林（Bernard Morin）的寓所会让你大开眼界：客厅的墙壁上挂着一幅电脑绘制的图片。图片是他的学生弗朗索瓦·阿培里（François Apéry）绘制的，画的是伯伊曲面（Boy's Surface）——一种射影平面对三维空间的浸入。莫林最著名的成就是把一个球体如何“翻”出来的过程形象化，而伯伊曲面是其中的重要环节。莫林虽然看不见这张图，但他会很高兴地为你解说图中不容错过的细节。回到客厅，他搬来一把椅子站上去，摸索着从架子顶上找到一个盒子，然后端着盒子小心地爬下椅子，这时我长出了一口气。打开盒子，里面放的是他在上世纪六七十年代制作的陶模型，描绘了他研究的球面外翻（Sphere eversion）的各个中间阶段。他视力健全的同事用这些模型在黑板上辅助画图。他掌中所拿的，正是伯伊曲面的模型。这个模型不仅精确，而且设计巧妙，形态优雅，实在是一件艺术品。让人惊叹的是：如此一件精确而又对称的模型完全靠双手做出来的。制作这个模型的目的，是把莫林心中所清楚看到的模型展现在视力健全的人的面前。



伯纳德·莫林（1931-）

视力健全的数学工作者们通常都正襟危坐地炮制论文。有一个传说，说有人问一个著名数学家的女佣这个数学家每天都在干什么，女佣说他在一张纸上写写画画，然后揉做一团扔进垃圾桶。那么盲人数学工作者的一天呢？他们不可能在信封背面或是餐馆的餐巾上写些什么算式，或是挥挥手示意把“这个”加到“那个”上，或是把“那个”用在“这里”。不过从许多方面而言，盲人和其他数学工作者的工作方式一样：有人曾问过科罗拉多大学（University of Colorado）的盲人数学工作者劳伦斯·W·拜吉特（Lawrence W. Baggett），他是如何不用纸笔把复杂的公式印在脑子里的？他坦白地说：“嗯，这个，无论是谁都很难。”然而从另一方面来说，他们对数学的理解又有所不同。莫林回忆起一位视力健全的同事校勘他的论文时，需要进行冗长的行列式计算来确定一个正负号。这位同事问他是如何计算的，莫林说自己回答道：“我真不清楚——就是想象这个那个形体，感觉一下它的重量而已。”

历史上的盲人数学工作者



欧拉（1707-1783）

数学史上有许多盲人数学工作者。最伟大的数学家之一欧拉 (Leonhard Euler, 1707-1783) 在生命中的最后十七年里就双目失明。他自从在俄罗斯科学院地理教研室当主任以来, 就因为用眼过度眼睛严重疲劳而视力出现问题。他三十岁的时候右眼就开始出问题, 到了五十九岁的时候就几乎完全失明。欧拉是数学史上最高产的数学家之一, 写出了大概 850 篇论文。而神奇的是, 其中大约一半的论文是他在失明之后完成的, 他以惊人的记忆力, 在两个儿子和其他俄罗斯科学院的同事的帮助下完成了这些论文。

英国数学家尼古拉斯·桑德森 (Nicholas Saunderson, 1682-1739) 一生下来就因染上天花双目失明。然而他却精通法语、希腊语和拉丁语, 又研究数学。他申请剑桥大学被拒, 终身也未上过大学, 可是在 1728 年, 乔治二世国王却授予他法学博士学位。作为牛顿哲学的拥护者, 桑德森在剑桥大学当上了卢卡斯教授——牛顿本人就曾任此职位, 物理学家史蒂芬·霍金也曾任此职。桑德森发明了一种进行算术和代数计算的“盲人计算器”, 这种方法需要用一个类似算盘的工具以及一个叫做“几何板”的东西——这种东西现在已经在数学教学中应用了。桑德森在其著作《代数元素》(1740 年版) 中记述了盲人计算器的计算方法。他有可能还进行了概率论方面的研究: 统计历史学家史蒂芬·斯蒂格勒 (Stephen Stigler) 认为, 贝叶斯统计的思想方法可能是由桑德森而不是托马斯·贝叶斯 (Thomas Bayes) 首先提出的。

俄罗斯也出过几位盲人数学家, 其中最著名的是庞特里亚金 (Lev Semenovich Pontryagin, 1908-1988)。庞特里亚金十四岁时因一场事故而失明, 他的母亲肩负起了教育他的任务, 尽管母亲没受过多少数学训练, 数学知识也不多, 却可以给儿子朗读科学著作。他们一起“发明”了许多表示数学符号的词语, 比如集合交集的符号叫做“下头”, 而子集的符号叫做“右头”等等。1925 年, 庞特里亚金十七岁进入了莫斯科大学, 从此他的数学天赋便充分展露, 人们对他无需动笔就能记住复杂公式的超强能力充满惊奇。他成了莫斯科拓扑学派的顶尖人物, 在苏联时期仍和西方有着联系。他最重要的贡献在拓扑学和同伦理论领域, 同时也在控制论等应用数学领域做出了贡献。而现在还健在的盲人数学工作者有莫斯科斯捷克洛夫数学研究所的维图什金 (A. G. Vitushkin), 他主要研究复分析。

法国也有许多杰出的盲人工作者。其中最著名的包括路易·安东尼 (Louis Antoine, 1888-1971), 他是在一战时失明的, 那时他二十九岁。据说, 勒贝格建议他学习二维和三维拓扑学, 一部分原因是那时关于这方面的论文还很



庞特里亚金 (1908-1988)

少, 另一部分原因是因为“在这个领域, 捕捉的能力和全神贯注的习惯可以弥补失明的不足”。在二十世纪六十年代中期, 莫林见到了安东尼, 安东尼向这位后辈盲人数学工作者说明了他是如何得到自己那个著名结论的。安东尼在试图证明一个类似若尔当-舍恩弗利斯定理的命题 (若尔当-舍恩弗利斯定理是: 对于一个平面中的简单封闭曲线, 一定存在一个平面的同胚可以将这条曲线变成平面中的一个圆)。该命题为: 对于一个浸入三维空间中的三维球体, 存在一个三维空间的同胚可以将这个浸入球变为一个标准球。最终他发现, 这个“定理”并不成立。他第一个设计了三维空间中的非驯嵌入集——这个集合现在被称为“安东尼的项链”。它是一个康托尔集, 但其补集却并不简单联通。在安东尼的基础上, 亚历山大 (J. W. Alexander) 构造出了著名的“亚历山大带角球”, 这个带角球就是安东尼要证明的命题的一个反例。安东尼证明了: 可以从他的“项链”得到嵌入球。但是莫林问他这个嵌入球是什么样子的時候, 他却说自己想象不出来。

球面外翻

莫林自己的故事也很引人入胜。他 1931 年出生于上海, 那时他父亲在银行工作。很小的时候莫林就患上了青光眼并回到法国接受治疗。后来他回到上海, 但六岁时不幸因视网膜撕裂完全失明。他到现在还能回忆起童年时候所看到的事情, 回忆起那时他对光学现象的痴迷, 回忆起他曾醉心于万花筒的时光, 回忆起他的那本介绍红黄相配

得到橙色的书，回忆起那时看到的风景画并好奇如何能用一张平面展示三维图景。他早期的视觉记忆由于没有后来的干扰，所以尤其栩栩如生。

失明之后莫林离开上海回到法国并一直呆在法国。他在法国盲哑学校上到十五岁，然后上了一所普通高中。他对数学和哲学感兴趣，可他父亲并不认为儿子在数学方面会有多大建树，便让他读了哲学。莫林在巴黎高师学习了几年之后，放弃了对哲学的幻想而转学数学。他师从亨利·嘉当（Henri Cartan）并在1957年进入国家科学研究中心（Centre National de la Recherche Scientifique）担任研究员——此时的莫林已经因为球面外翻的研究而小有名气。后来他又师从勒内·托姆（René Thom），在1972年完成了关于奇点理论的论文拿到了博士学位，又在高级研究院工作了两年。莫林一生的大部分时间都在斯特拉斯堡大学（Université de Strasbourg）任教并于1999年退休。

1959年，史蒂芬·斯梅尔（Stephen Smale）证明了一个令人惊奇的定理：所有 n 维球面的欧氏空间浸入都是正则同伦的。这就意味着三维球体对三维空间的标准浸入和反浸入是正则同伦的。这也就是说球面可以外翻——或者说把里面翻到外面来。然而，根据斯梅尔论文构造球面外翻显得过于复杂。二十世纪六十年代早期，阿诺德·夏皮罗（Arnold Shapiro）做出了一种球面外翻的方法但并未发表。他把这种方法解释给了莫林，而莫林也已经独立构思出了类似的想法。物理学家马赛尔·弗诺萨特（Marcel Froissart）也对这个问题有兴趣并向莫林建议了一个关键性的简化步骤——而莫林制作陶模型正是为了和弗诺萨特合作。1967年，莫林首次展示了能够进行球面外翻的同伦。



史蒂芬·斯梅尔（1930-）

加州大学伯克利分校的查尔斯·皮尤（Charles Pugh）借助莫林的陶模型的照片构建了外翻不同阶段的鸡笼模型。1976年尼尔森·麦克斯（Nelson Max）制作的著名纪录片《球面外翻》就用了对皮尤模型测量的结果，麦克斯现在是劳伦斯·利弗莫尔国家实验室（Lawrence Livermore National Laboratory）的数学工作者。这部纪录片是计算机图形史上的奇迹。实际上莫林的球面外翻有两种方法，一开始他也不知道影片中记录的是哪一种。他询问了看过影片的同事，不过据他回忆“没人能说出到底是哪一种”。

自麦克斯的纪录片问世以后，世界上已经出现了其他的外翻方法，也产生了记录这些新方法的影片。其中一种外翻方法是低维拓扑的重量级人物威廉·瑟斯顿（William Thurston）发明的。瑟斯顿发明了一种能够从斯梅尔的原始证明中构造的方式。几何中心的影片《从外到内》记录了这种外翻方法。马萨诸塞大学阿姆斯特分校（University of Massachusetts at Amherst）的罗布·库什纳（Rob Kusner）发现了另外一种方法，他还提出了最小能量法可以用来做出莫林的外翻。伊利诺伊大学的数学工作者约翰·M·沙利文（John M. Sullivan）、乔治·弗朗西斯（George Francis）和斯图尔特·列维（Stuart Levy）在1998年拍摄的纪录片《最优外翻》记录了库什纳的这一想法。雕塑家、图形动画专家斯图尔特·迪克森（Stewart Dickson）用《最优外翻》中的数据为一个名叫“感知数学”的活动（该活动旨在制作盲人可以使用的几何体模型）制造出了最优外翻的不同阶段的数学模型。一部分模型在2000年9月的法国莫伯日（Maubeuge）举行的国际艺术与数学研讨会上送给了莫林。莫林开心地将模型放在了自己的客厅里。

双目失明不但丝毫没有影响莫林非凡的空间想象能力，反而有所裨益。他说像失明这样的残疾，会让人的长处更长，短处更短，所以“盲人的优缺点都更加突出”。莫林认为数学想象力分为两种，一种叫做“时间想象”，想象的是通过一系列步骤处理的信息，这种想象力能让人们进行长步骤的计算。“我的计算一直不好，”他说，而且双目失明让他的计算更不好。他擅长的是另外一种想象，他称之为“空间想象”，这种可以让人一次性理解所有的信息。

想象几何体的一个难点是：人们往往只能看见物体的外面，而看不见里面——但里面可能非常复杂。莫林通过同时仔细想象里外两面，培养出了一种“外翻内”——或者从一块空间移动到另一块空间的能力，而这种空间想象似乎更依赖于触觉而非视觉。“我们的空间想象是靠触摸物体拼起来的”，莫林说，“你可以在手上把玩模型，而不是用眼睛看。这样的话‘外面’和‘里面’就只和你对模型的动作有关了”。因为他太熟悉触觉信息了，可以在把玩一个模型几个小时之后几年都记得其形状。

几何：纯思考

2001年七月，在德国著名的黑森林数学研究所（Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach）的一次会议中，伊曼纽尔·吉鲁（Emmanuel Giroux）做了关于他最近的工作的报告，报告的题目是《接触结构和“打开的书”分解》。尽管吉鲁双目失明，他的报告仍然是这一周会议中最清晰、最有条理的——也可能这都是失明的贡献。他坐在投影仪旁一张张地换幻灯片，显然他很清楚每张幻灯的准确内容。他用手比划出自己对于一个几何体是如何接触另一个边界的精确描述。之后，听众中有些人回忆起了吉鲁的另一场报告：报告中他像放电影一样，一帧帧地清晰描述了某个数学现象。“这是我做事的方法，我的风格是尽可能的清晰”，吉鲁说，“不过，我经常也因为其他数学工作者无法解释他们在黑板上写了些什么、画了些什么而非常沮丧”。所以，他讲得清晰，部分原因是为了向那些视力正常但讲得使人云里雾里的同事抗议。

吉鲁十一岁就双目失明。他注意到大部分盲人数学工作者都是研究几何的——可是为什么是几何呢？这可是最需要“看见”的数学领域啊！“其实只是纯思考。”吉鲁回答说。他解释说，例如在分析学中，一个人必须得计算，一行一行做。用盲文就很麻烦：写点东西得打一大堆孔，读的时候还得翻过来摸。这样一来写很长的计算式就非常困难（将来随着无纸书写工具——例如可重写盲文工具的发展，这可能容易一些）。而相比起来，“搞几何学，内容就集中的多，你可以全装在脑子里。”吉鲁说。到底装在脑子里的是什麼，这很神秘，还不一定是图形——图形是一种表示数学对象的方法，但却不是思考对象的方法。

阿里克谢·索辛斯基（Alexei Sossinski）指出，许多盲人数学工作者研究几何并不奇怪。一个视力健全的人的空间想象力是来自于大脑对于三维世界投射在视网膜上的二维图像的分析能力，而盲人的则来自于大脑对触觉和听觉信息的分析。无论哪种情况，大脑都会根据感官信息而灵活地建立起空间表达。索辛斯基指出，对复明的盲人的研究表明：人具有与生俱来的理解基本拓扑结构（例如一个东西上有多少个洞）的能力。“刚复明的时候，他无法分辨出一个正方形和一个圆，”索辛斯基写道，“只能觉察到它们拓扑等价。但是他们立即就能注意到圆环和球的不同”。索辛斯基在私下的谈话里说到，视力正常的人们有时会对三维空间产生错觉，原因是视网膜上的二维投影信息既不充足又误导人。“盲人（通过其他感觉）建立起一个没有形变的、直接的三维空间的感觉。”

至少自柏拉图（Plato）以来，人们很长时间一直试图

理解空间想象能力。柏拉图相信，无论人是否失明，理解空间关系的能力都是一样的。而笛卡尔（Descartes）根据视力受损的人们通过触摸来认知形态，在1637年的《方法论》中声称人们在头脑中构造模型的能力是天生的。十八世纪晚期，狄德罗（Diderot）在研究中接触了盲人，并总结说人们可以仅靠触觉就良好地感知三维物体。他还发现大小的变化对盲人而言并不是问题，盲人可以“在头脑中放缩形体。这种空间想象往往是靠回忆和重新组合对物体的感觉”。近几十年有许多关于盲人空间想象力的研究。流行的观点是盲人的空间想象力比视力健全的人更弱或者更差。但也有学者不同意这种观点：盲人以及视力健全的人的空间想象能力在执行许多普通任务——比如记忆走路路线的时候并无差异。

分析学的挑战

并非所有的盲人数学工作者都研究几何。尽管分析学对失明人来说是个棘手的问题，但还是有不少人选择了分析学——比如劳伦斯·拜吉特（Lawrence Baggett）。他已经在科罗拉多大学波尔得分校（University of Colorado at Boulder）任教三十五年了。他五岁失明，但从小就喜欢数学，可以在头脑中做许多思维体操。他从没学过除法的正规算法——因为用盲文来做长除法太复杂了——可是他发明了自己的除法算法。盲文书籍很有限，他便让母亲和同学为他朗读。他一开始想做律师，因为“那时候盲人都当律师”，不过以后上了大学，他就决定改学数学了。

拜吉特说他自己的几何从来没学好，因为他无法想象那些复杂的拓扑结构。不过这并不是因为他的视力缺陷。他说，要想象一个四维球体，“我不认为看得见能有什么



劳伦斯·拜吉特（1929-）