



几何学与我们的世界¹

Judith Grabiner/文 王涛/译

欧几里得曾如何统治世界

显然，几何学是数学中一个非常有用的领域。我们需要它来测量事物，理解形状，并通过我们生活的空间来进行导航。但我想说明的是几何学远不止如此：它与人类思想和生活的所有方面互相影响。

首先，让我们转向一个被公认为“几何之父”的人：古希腊数学家欧几里得（Euclid）。欧几里得的工作是我们已有的系统通向几何最早的例子。当你在几何中给出一个一般性的命题时，例如毕达哥拉斯定理，你应该从公认的不证自明的

命题出发，通过使用逻辑规则推导出它来完成证明。2000年来，欧几里得的系统方法似乎证明了几何对象的真理，从而实现了确定性。



《欧几里得》，15世纪画家 J. van Gent 作

欧几里得严密

后世许多重要的思想家相信，只要其他对象遵循同样的方法，它们可能也会具有几何学的确定性。例如笛卡尔（R. Descartes）说，如果从不证自明的真理（也称为公理）开始，然后通过逻辑推导得到越来越复杂的真理，那就没有什么我们不能知道的。哲学家斯宾诺莎（B. Spinoza）²甚至写了一本《伦理学：依几何学方式证明》（*Ethica, ordine geometrico*

¹ 此文基于 Grabiner 2015 年 12 月在牛津大学举办 Ada Lovelace 论坛的报告，原文以及演讲视频可见 <https://plus.maths.org/content/how-euclid-once-rules-world>。

² 斯宾诺莎（1632-1677），荷兰哲学家，西方近代哲学史中重要的理性主义者。详细资料可见 https://en.wikipedia.org/wiki/Baruch_Spinoza。

demonstrata), 其中明确标注了公理和定义。他宣称证明了上帝的存在, 像数学家所做的那样, 用 QED 来结束他的证明。

在科学方面, 牛顿著名的作品《数学原理》(*Principia Mathematica*) 清晰地表明了欧几里得的影响力。牛顿称他的著名的运动定律为“公理”, 并以两个数学定理的形式推导出他的引力定律。正如牛顿的名言: “原则极少而所获极多, 这是几何的荣耀。”

这里还有一个关于欧几里得影响的例子。《美国独立宣言》(*American Declaration of Independence*) 旨在通过使用欧几里得的形式来激发对其确定性的信心。杰弗逊(Thomas Jefferson)³, 这位在他的时代比任何其他美国总统懂更多的数学的总统以这样的论点开始, “我们坚持这些真理是不言而喻的: 所有的人生而平等”。在宣言中还有其他不证自明的真理, 他使用了“证明”这个词, 成立美国的实际宣言被明确地表示为一个逻辑推理的结论, 从“因此”开始: “……因此, 我们宣布这些联合的殖民地, 按照法律应该是自由和独立的州。”

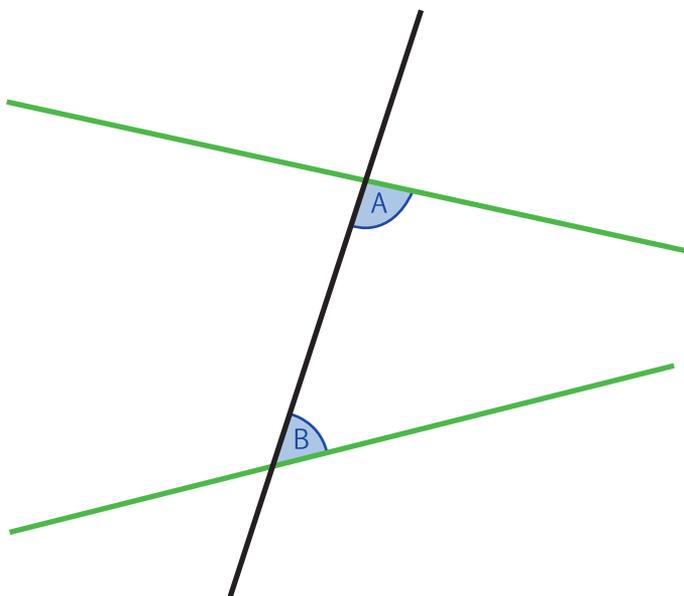
因此, 在哲学、神学、科学和政治中, 理想化的欧几里得推理模型已经形成了证明、真理和确定性的概念。

欧几里得公设

在我们研究欧几里得几何的影响之前, 让我们先来看一下他建立这个几何的假设, 或公设。其中前四条公设显示在右框中。它们是直观的, 在正常心智下没有人会质疑它们。但是有一个第五公设, 称为平行公设:

如果落在两条直线上的一条直线使得同一侧上的内角加起来小于两个直角, 如果无限地延长, 则两条直线在该侧相交。

感到困惑? 这里有一个理解它的图:



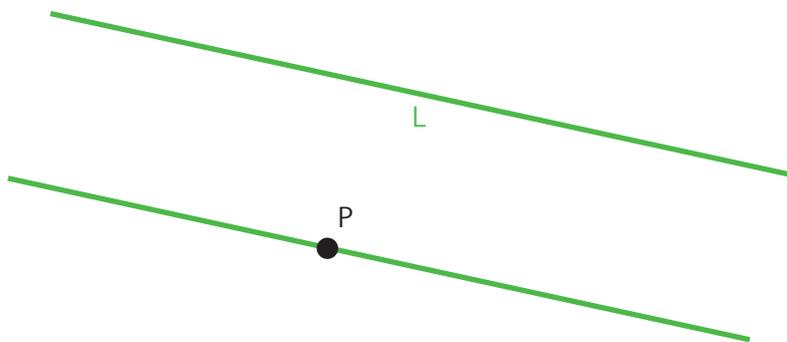
欧几里得的前四条公设:

1. 从任意一点到任意其他点可作一条直线。
2. 一条有限直线可以根据需要任意延长。
3. 可以任意点为中心并且以任何长度作为其半径来作圆。
4. 所有直角彼此相等。

³ 杰弗逊, 美国第三任总统, 《美国独立宣言》的主要起草人。详细资料可见维基 https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Jefferson。

这个公设是说，如果角 A 加上角 B 小于两个直角之和，则绿线必定在两角所在的同一侧相交。

我有时会要求我的学生们投票决定这个公设是否是不证自明的，他们绝大多数同意不是——你必须画一个图来理解它。但如果它不是自明的，那也许就不应该被视为给定，而是从其他公设证出。希腊人试图这样做，但他们失败了。中世纪伊斯兰与犹太的数学家，以及 17 和 18 世纪欧洲的数学家也是如此。



平行线的唯一性

然而，希腊人成功证明的是，第五公设在逻辑上等价于平行线的唯一性：给定一条直线 L 和一个点 P ，只有一条通过点 P 平行于 L 的直线，且这条线与 L 位于同一平面上。

欧几里得与物理

欧几里得从没谈到他的几何图形所在的空间，但他似乎隐舍地认为它在所有方向上都可以无限展开，其中每个点都像其他点一样。

后来的思想家，特别是从文艺复兴开始，开始大量谈论空间。他们同意



距支点距离相等处有相等重量的杠杆一定平衡