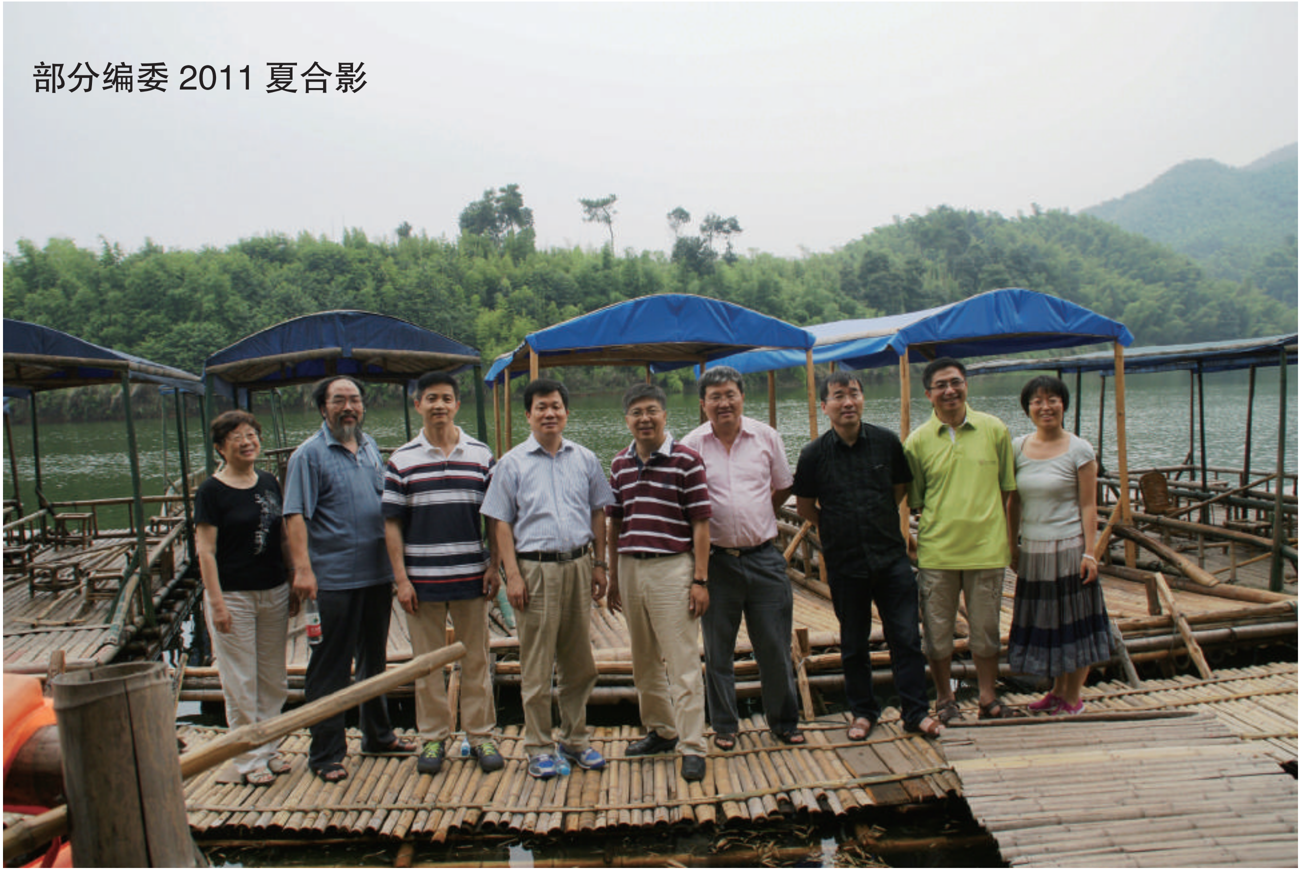


从左至右：张英伯，罗懋康，张智民，邓明立，刘建亚，贾朝华，蔡天新，汤涛，付晓青

《数学文化》旨在发表高质量的传播数学文化的文章；主要面向广大的数学爱好者。

本期刊欢迎投稿，来稿请寄：
Math.Cult@gmail.com; 或mc@global-sci.org

本期刊欢迎教育界，出版界，科技界的广告
本期刊网站：http://www.global-sci.org/mc/
本期出版时间：2011年11月

本刊鸣谢国家自然科学基金数学天元基金和科学出版社的支持。

Contents | 目录

才兼文武，学贯天人

——纪念山东大学数学学科创始人黄际遇先生

东 青

上期简介

前文略述了任初先生作为山东大学数学学科的创始人于1930年-1936年间执教山东大学的经历。

先生于1929年12月即赶赴青岛参与当时国立青岛大学的创制，几尽一人之力建立了山东大学数学系。后通过各种渠道及方式，积极筹措资金、延揽人才、编制课程，将山东大学数学系带入了其发展史上的第一个鼎盛时期。

任初先生以数学立身，兼治文史，留日时曾师从国学大师章太炎治文字、声韵、训诂之学，深得其赏识，并兼与黄侃等友善。出任山东大学文理学院院长后，对于文科学科的建设也非常用心。除发表相关著述外，更承担中文系教学任务。

除文理兼通之外，任初先生还极爱运动，善马术、精击剑、喜足球。平日里一袭长衫，胸前总是缝有两个口袋，传说内置钢笔与飞镖，这也算是先生文武兼资的一个缩影吧。任初先生毕生嗜象棋，即便战乱时期也勤研不辍，其水平在当时已可居一流棋手之列。

此外，当时的山东大学曾流传有“酒中八仙”的逸闻，先生为其中佼佼者。每当嘉会，先生的笑话最多，荤素俱全，在座的人无不绝倒，甚至于喷饭。酒阑兴发，击箸而歌，声震屋瓦，激昂慷慨，有古燕赵豪士风。一次微醺之后，任初先生口占一联：“酒压胶济一带，拳打南北二京。”虽纯为戏言，但其豪气可见一斑。然终有宴罢曲终之时，因时局动荡，政治黑暗，“八仙”相聚并未几年便作风流云散。

曾昭安（1892-1978），字瑊益，江西吉水人，武汉大学的创立人之一，中国数学会的创建人之一

经亨颐（1877-1938），字子渊，号石禅，晚号颐渊，浙江上虞人。我国近代著名教育家，书画家

万里迢递，四海桃李 [1]

带着几多牵挂与些许无奈，任初先生离开山东一路南下，并接受了国立中山大学的聘请，回故籍重执教鞭，这已是任初先生第二次执教中山大学。此前，除受聘于山东大学之外，任初先生曾先后执教过天津高等工业学校（今河北工业大学）、国立武昌高等师范学校（今武汉大学）、中州大学（今河南大学）、国立中山大学（今中山大学）、河南中山大学（今河南大学）等高校 [2]，教学生涯可谓丰富。尽管民国时期，出于种种原因，教师辗转任教也属平常，但像任初先生这样几乎每到一处皆领衔学科开创性工作的却也并不多见。

1910 年，任初先生自日本学成归国后不久即赴天津，任教于天津高等工业学堂。时值清末，此类“西式”学堂兴办未久，不但师资缺乏，合用的教材也不多。任初先生在此期间亲自编写授课讲义并编纂教材，其编写的《中华中学物理教科书》于 1914 年由中华书局出版，全国各地中学多有采用。尽管在天津执教的成果斐然，但任初先生当初实是抱着“打零工”的心态去的，其赴津的主要目的是进京赶考，天津在其构想之中不过是一个权且安身立命的中转站。

相信许多即便只对高中历史课本有印象的读者也会记得，1905 年因时局所迫，清政府已经废除了科举制度，那么 1910 年任初先生进京赶的是什么考呢？答曰：“洋科举”。这是 1905 年科举制度正式废除后，清政府为吸引归国的海外留学生通过考试进入政府而根据留学生留学时所习科目以及外语专门设置的考试，民间俗称“洋科举”。与传统的科举考试相比，其报考科目可谓丰富，包括“格致科”、“工科”、“商科”乃至“牙科”等。从 1906 年至 1911 年辛亥革命爆发为止，这种被称为“洋科举”的留学生考试共举办过六次，总共取录了 1388 人，按照当时的规定，凡在海外高等学校入学三年者皆可应考。考试分为两场，首场在学部举行，称“部试”，考取者按成绩及所学专业分别授予各科“进士”、“举人”等传统科举的身份，因此也就诞生了诸如“工科进士”、“商科举人”乃至“牙科进士”等一系列“新功名”；次场一般在时隔几月之后的保和殿举行，称为“廷试”，按照考试成绩分出等级，并授予职衔。

1910 年 10 月，任初先生应父命进京应试，获“格致科举人”的功名。所谓“格致科”，类似于今天我们习惯上说的理科。翌年初，先生参加廷试，考取二等，授“七品小京官”的职衔，候补待用。宣统三年五月初九《唐景崇等为请照章录用廷试游学毕业生事奏折》对此有相关记载：

“经言讲官、学务大臣臣唐景崇等跪奏，为遵章预请钦定廷试日期，恭折仰祈圣鉴事。……黄际遇，年二十七岁，广东增生，格致科举人。……以上一百七十六名，廷试二等，前经学部考试列中等，均拟请旨以七品小京官按照所学科目分部补用。” [3]

尽管任初先生对此“举人”功名及官衔并不在意，但其家乡澄海却甚为重视。此后澄海一地除一二有功名的士绅外，凡提到任初先生，一律呼之为“黄家举人爷”。

1915 年，任初先生应当时的国立武昌高等师范学校（今武汉大学前身）邀请赴武汉执教。武昌高等师范学校是辛亥革命后中华民国政府建立的中国第二所高等师范学校，属于中华民国所设六大学区之一——华中学区的最高学府。其他几所分别是：北京高等师范学校、南京高等师范学校、浙江两级师范学堂、成都高等师范学校和广东高等师范学校。之所以将高等师范学校设为各学区的最高学府，与当时中国急需师资的情况不无关系，而师范教育的开始就是大学教育的开始。其后随着中国教育的发展，上述师范学校大多转为了综合性大学，成为各地大学的翘楚。

任初先生在武昌高等师范学堂担

任数理部教授、主任、校教务长等职，并曾一度代理校长。他对当时学生中表现出的积极的求知欲很是欣赏，对时为数理部第一班学员的曾昭安所组织的数学研究会精心培养并大力支持，为其出谋划策，加以组织引导。在任初先生的筹措下，数学研究会在 1916 年改组为武昌高师数理学会，先生为首任会长，而武昌高等师范学校数理学会也成为辛亥革命后，在高等学校中成立最早的、以学生为主体的数理学术团体。1917 年，曾昭安学成毕业，在任初先生支持下先后赴日本、美国留学深造，他在国外的研究成果经任初先生推荐也陆续得以在国内发表。1925 年，曾昭安获得美国哥伦比亚大学博士学位，并接受武汉大学邀请，回到母校担任数学系教授，创建和领导武汉大学数学系数十年。此间他和任初先生一直保持书信往来 [4]，既有学问上的探讨，也有生活上的交流，师生之情笃深可见。

1912 年，著名教育家林伯襄创办了河南留学欧美预备学校，成为当时中国的三大留学培训基地之一，这也成为现今河南大学的前身。1922 年，冯玉祥主政河南，在此创建中州大学。1927 年，以此为基础改建河南中山大学，又名国立第五中山大学（其他四所为中山大学——国立第一中山大学，武汉大学——国立第二中山大学，浙江大学——国立第三中山大学，南京大学——国立第四中山大学）

1918 年冬，任初先生奉派至江浙一带考察理科教育，此行对任初先生而言无论于公于私都可谓“得偿所愿”。于公，自日本留学归来后，先生一直希望能够总结一套适于本土且行之有效的理科尤其是数学教育方法，在先后执教了天津、武汉两地后，此种想法更为迫切。此次能够赴江浙一带考察，多少可弥补其对南方教育认知的不足，对其数学教学方法的探索很有裨益。于私，任初先生留学日本期间结识的挚友经亨颐先生时为浙江两级师范学堂校长，多年不见，正可一会，且对此行之考察目的也有助益。

经亨颐，字子渊，号石禅，浙江上虞人。我国近代著名教育家、书画家。“五四”运动时期，时为浙江省立第一师范学校校长的子渊先生鼓励支持爱国民主斗争，倡导新文化运动，采取了一系列革新措施。1921 年，子渊先生在位于浙江省上虞市风景优美的白马湖畔创办了“春晖中学”，汇集了夏丏尊、朱自清、朱光潜、丰子恺等一批名师硕彦在此执教，推行新教育，传播新文化，以图“一洗从来之积弊”。依美景、延名师、文化深厚、思想新潮，如此学校想不出名也难，因此，春晖中学建校不久即蜚声海内外，时有“北有南开，南有春晖”的美誉。在子渊先生 30 多年教育工作中，始终坚持“与时俱进”、“适应新潮流”的办学方针，提出并一直努力践行“反对旧势力，建立新学风”的教学主张。这些方针与主张深得任初先生赞赏。

任初先生于 12 月 30 日抵达杭州，子渊先生已经在站台恭候多时，连连感叹“故人不见又四年”，好友久别重逢的激动心情溢于言表，这使得任初先生感动不已。此后几天的行程，子渊先生几乎一直陪伴左右。白天或陪同考察，或登山临水，晚上或探讨学问，或觥筹交错。几乎每晚子渊先生都要送任初先生回旅店再畅聊一番方离去，要不是顾及任初先生休息不好，二人抵足而卧，大被同眠也说不得了。此次行程，为任初先生 1916 年春完成的《武昌高等师范学校数理部进行实况及成绩说明书》积累了丰富的素材。

1919 年 10 月，子渊先生至武汉出差，行程极为紧张——公事完毕后当日即行。任初先生得知后，软硬兼施，又硬留了好友逗留一日。任初先生先雇马车，陪子渊先生游览汉口街衢，并发电报召留日武昌同学七八人，在普海春酒店宴请子渊先生。子渊先生日记记载“同学盛情，余大醉”——

虽仅寥寥七字，足见同学情谊。

1920 年 12 月。任初先生受当时的民国政府教育部委派前往欧美考察教育，同时到芝加哥大学进修，成为著名数学家 L. E. Dickson（1874-1954）的学生，并于 1922 年获得该校的理科硕士学位。[5] 尽管任初先生本人不喜张扬，但据说对此学位也很有些得意，曾手书“硕士第”匾额于澄海自家寓邸门上，以示其书香家风。

回国后不久，任初先生受时任中州大学（今河南大学前身）校长的张鸿烈先生的邀请赴河南执教。张鸿烈也是留美硕士、同盟会员，早年间与任初先生熟知。1924 年 9 月，任初先生正式履新，一手创建了中州大学数理学系，并担任系主任、教授，其间辛苦自不待言。在创制之余，任初先生还指导学生宋鸿哲创办了《数学报》。1926 年，因时局动荡，任初先生被迫离开中州大学，时值国立广东大学改为国立中山大学，聘请海内外名贤执教，任初先生即被聘为国立中山大学教授。1927 年 6 月，冯玉祥被任命为河南省主席，他重整教育，将河南三所高校（中州大学、河南公立农业专门学校和河南公立法政专门学校）合并为国立第五中山大学。1928 年，受冯玉祥将军的再三邀请，任初先生再次赴河南执教，出任河南中山大学校务主任、数学教授。后来时任河南中山大学校长的查良钊（字勉仲，1897-1982。顺便说一句，查良钊先生与我们都熟悉的现代武侠小说大家金庸先生，即查良镛，和近代诗人穆旦先生，即查良铮，是同族兄弟）致函国立中山大学，恳请慨允任初先生执教河南，对此，当时的《国立中山大学日报》有记载曰：

“黄任初先生日前请假北行，原有销假南旋之意，昨由河南中山大学查良钊校长来函，略谓，黄君现在伊校任教务主任兼数学教授，学子倾心，同人敬爱，一时万难听其回粤，希为

黄际遇先生在芝加哥大学的导师著名数学家 L. E. Dickson 教授（1874-1954）

慨允，另聘专才等语。本校祇以‘勉副雅怀，谨从台命，他时有缘可假，仍希再赐教益’为词，函复查校长云。”[6]（《黄任初教授未克南来》）

由此可见，当时各校求贤若渴，亦可见任初先生端的是魅力不可挡。这样，任初先生即从“1929 年 5 月出任河南中山大学校长。时值军人专政，为维持大学的发展，曾一度兼任河南教育厅厅长，为发展河南大学不遗余力”[7]。任初先生在担任河南大学校长期间，参与制定了“解决安阳殷墟发掘办法”，主持了河南与广州两地中山大学互换教授的工作并广为延揽师资人才。1930 年，任初先生邀请自己在武昌高等师范学院时的学生、留日归来的数学家王福春到河南大学任教。此外，任初先生还建议各系四年级学生写毕业论文，擅长书法的任初先生还指导和组织学生们成立了书画研究会等，这些在当时的高校中实不多见。

任初先生的执教生涯中，在广州中山大学的经历最为复杂，前后三次且几经辗转。

第一次为 1926 年 8 月国立广东大学改名国立中山大学之时，校方向国内外聘请著名学者来校任教。任初先生受聘成为该校数学天文系主任，并执教至 1928 年第一学期末。关于任初先生承担的课程、课时，《中山大学校史》里有这样的记载：数学天文系一年级的进级代数，每周 4 课时；数学天文系二年级、三年级的必修课和化学系二年级选修课数论，每周 2 学时；数学天文学三年级的必修课微积分，每周 6 学时；物理系二年级、化学系二年级和矿物地质系二年级的必修课微积分，每周 3 学时。上列共四个学系六个年级讲授三门课程，每周课堂教学达到 15 课时之多 [8]。若没有高深学问，是很难做到的。这期间，也是任初先生学术成果的又一个勃发期。仅在 1928 年半年的时间里，任初先生就在当时的学术刊物《自然科学》上发表了论文《音理余论》、《一》、《错数》、《Monge 方程式之扩张》等文章。

1936 年，任初先生二次受聘于广州中山大学，成为不分系教授（不久为工学院教授），分别为理学院、工学院的学生开设专业课。为理学院数学天文系新开选修课程连续群论，并开设必修课程微分几何；为工学院化学工程系、电气工程系讲授数学。除此之外，任初先生还常常“不务正业”，为文学院中国语言文学系的学生讲授骈文研究。任初先生极爱骈文，教授学生骈文也成为他的一大乐趣，常对人言道：“系主任可以不当，骈文却不可不教”。

可惜，这段快乐的日子并没有持续多久，1938 年 10 月，日军入侵，广州沦陷，任初先生不得已为避难移居香港。

1940 年 8 月，中山大学迁回粤北山区坪石办学。先生穿越封锁线回校，任理学院院长兼数天系主任。时虽戎马倥偬，但先生弦歌未辍，坚持职守。一方面，要协助新任校长张云处理繁务。张云是先生于河南大学任校长时

的学生，年轻有为，他到任后，就衷心请先生任校长室秘书长，为了扶掖新生，先生慨然屈尊应聘，忙得不亦乐乎！张云在回忆起这段与恩师共事的经历时说："我在坪石掌理中大时，黄师慨然降尊，屈就记室，事无大小，莫不躬亲，职权所关，必谦虚研讨，减轻了我对事务的关怀，而增加了我奋进的活力。尝对人言：'青出于蓝，我当辅之，以成大业。'诚挚热烈的心情，令我感激的无可言状，惟有尽着弟子敬师之礼，事之如父而已。"[9] 眷眷师长情，拳拳门生意，令人感佩！除此之外，任初先生还要授课，除数学课程外，每周还要为理学院的新生上一次文学基础课。他说："新生如初生的婴儿，老师需要像保姆一样，予以悉心保护。"与此同时，任初先生又欣然接受文学院学生们的环请，到距离砰石校本部十余里路的清底洞文学院，为学生们讲骈体文和文字学，据当年在坪石就读文科，今任教于香港中文大学的林莲仙教授在《缅怀黄任初师》一文中回忆说："任师每星期必到文学院两次，给我们讲新课'骈文研究'和文字学，以一位理学院院长、数学天文系主任兼校长室秘书长，再兼文学院的课程，在我一生所接触的大专院校教师中，除任师外未见有第二位。"[10] 但对于任初先生而言，"此义务功课，较诸授薪而为者，吾兴趣更浓。"此外，据 1943 年在坪石铁岭读中国语言文学系三年级的学生何其逊回忆，任初先生读文章尤其是读骈文很有特点，"一个劲儿地在摇头晃脑、拖声唆气的吟咏汪中的《吊黄祖文》。而且还伴随着抑扬顿挫、悠扬悦耳的潮州口音，以手击节，用脚打板，连两眼也眯缝起来，脑袋也在不断地划着圆圈。"时间一长，同学们都习惯了他的教法，心生钦佩，对他那潮州哼声也感到亲切悦耳。"上黄老师的骈文课，真是如坐春风，如饮醇酒，无时无刻不享受着文学艺术的熏陶"[11]。

张云（1897-1958），法国里昂大学天文学博士。1928 年后在广州中山大学任教授、数学天文系主任、教务长、校长等职。他曾是黄际遇任河南大学校长时的学生

1945 年 1 月，日寇又犯坪石，学校通告紧急疏迁，由坪石迁往仁化、梅县，往西走连县，学校师生分散三地。先生虽避地湘西，又与临武山中诸生讲《十三经》，精力充沛，声震屋宇，日夜不息，毫无倦意。先生的高风亮节博得全校师生一致之高评！先生教过的中山大学弟子很多，曾任国民政府教育部长的陈立夫、曾任中大校长的张云都是他的学生。

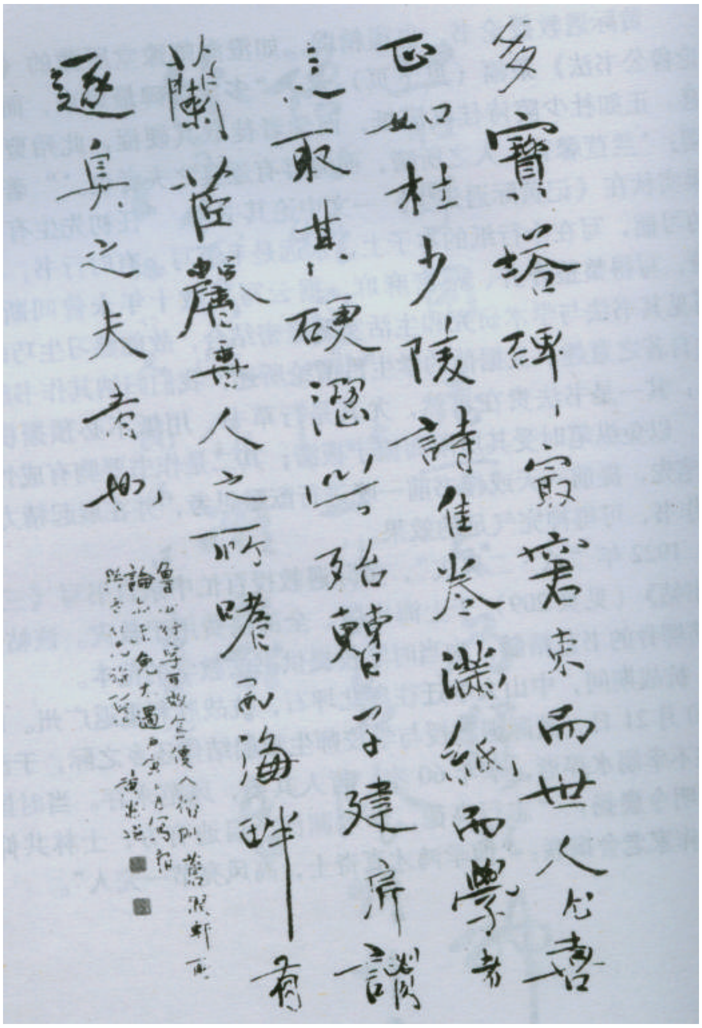
襞积之劳，日知成书 [12]

开篇曾言及先生日记，目前留存下来的共有四部四十三册：其在青岛所记者，曰《万年山中日记》，曰《不其山馆日记》。广州所记者，曰《因树山馆日记》。在临武所记者，曰《山林之牢日记》。日记的命名皆与当时先生所居之处有关，或直接采用其名，或借以相关典故。如《万年山中日记 • 第二十册序》："万年山者，国立山东大学旧国立青岛大学之所在也。地居青岛之西南，当日德人聚兵于此，筑营其间。三间环山，一面当海，东海雄风，隐然具备。今则修文偃武，弦歌礼乐，三年于兹。"而《山林之牢日记》因先生当时身在临武，取韩愈"君飘临武，山林之牢"句乃作集名。

对于坚持写日记的原因，任初先生曾在其《万年山中日记 • 第八册序》中专门述之：

日记者，一个人之流水簿也，子张书诸绅，志之不敢忘也。颜渊退而省其私，省其所私得也。然则私门著述之最凌乱无章者，莫日记也。然记述中之最可自信，而非有所为而为者，又莫日记若也。日知其所亡，月无忘其所能，有得即书，不假排比，此或天下之至愚者，方肯为之。顾成名与成举，不全相同，学问之事，又非尽出诸天下之至知者，爱迪生之成功也，自云得之灵感者什之一二，得之血汗者什之七八，夫知而不行，与不知等不实行者不为真知，行之不恭，时有新知。是故以际遇之顽鲁，望道而未之见，而仍怀此以自壮也。况所治者乃极抽象，而论证极严之学，机稍纵而即逝，思稍钝而即塞，驽马十驾，辄味前程。愚公移山，失之眉睫。个中甘苦，惟于青灯有味时聊自知之，然此境已不过日月至焉而已矣。山居无人事之苦，往往经月不入市尘，而所得者仅止于此，知难而不敢退，又未始非此茕茕相依之日记，有以策予也，是用作序，敢告执羁。壬申大雪，任初记。

在任初先生看来，日记具有及时记录以备遗忘、铢积寸累以进学识、总结经验以明得失的作用，尽管先生曾打趣自己所记为"盗窃文史之末，因循书数之间"，但仅其几十年如一日笔耕不辍，细腻有恒之精神，就着实令人叹服，更何况日记内容实堪称博大精深——数学、文学、历史、书信、对联、诗文、棋谱、音韵、训诂等多种研究心得无一不包。



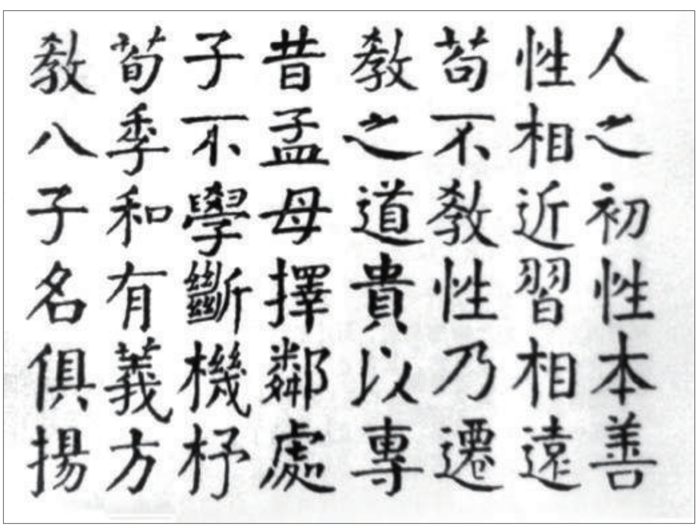
任初先生精碑学，其书法健朗俊逸，笔致精到，看似随意处实则法度谨严。此为任初先生的一幅书法作品：“多宝塔碑最窘束，而世人尤喜，正如杜少陵诗佳气满纸，而学者徒取其硬涩，此殆曹子建所谓：‘兰茝馨香，人之所嗜，而海畔有逐臭之夫者也。’”

任初先生的一幅篆书对联：“日思误书更是一适，今叙篆文以究万原。”联侧题款：“上联为邢子才语校勘学所有事也，因摭许叔重说文叙语成联书之。畴盦主人黄际遇。”

邢子才，即邢邵，字子才。北魏河间人。文学家，记忆力强，十岁能属文，五天读完《汉书》，撰有文集三十卷。

许慎，字叔重，东汉经学家、文字学家，著有《说文解字》十五卷，是我国第一部说解文字原始结构及字源的专著。

此联为任初先生集邢邵、许慎二人成句，以表达其对文字、书法研究的意趣。现藏于汕头市博物馆。



1922 年“八二风灾”时，任初先生亲自书写的《三字经楷书帖》（局部）

先生还总结出日记“三得”(《万年山中日记·第七册序》):

循日读书，过境遂忘，矧迫衰年，尤苦罔沕(夹注:《招隐士》“罔乎沕”，王逸曰:“精气失也”)。自为此记，日知所无。羡鱼结网，亡羊补牢，皞积之劳，亦收寸进。其得一也。学海汪洋，师友睽绝，私门讲学，聚书已难。幸近高密，时沐流风(夹注:高密去青岛百三十里，康成故里也)，叨接兰台(夹注:汉藏秘书之官观)，常供秘笈。摭所闻见，实其简编，孵彼嘉言，攘为己出。虽不敢久假不归，然亦恶知其非有。其得二也。先生述之，门人记之，传习有录，日知成书，登此鳣堂(夹注:见《后汉书·杨震传》)，益渐俭腹。用以札牒，以存爬梳。虽写定之难言，已呴濡之有自，留之他日，或以覆瓿;遗诸子弟，聊愈兼金，鉴覆辙与前车，认识途于老马，其得三也。

此三得可谓先生笔耕不辍的动力，对于当下时代，也不无警醒之意义。

先生的日记诚然是座学问的宝库，但更是所知识的迷宫。日记内容皆用毛笔以文言写就，夹杂大量铺陈用典的骈文以及诗词掌故，且不加标点，更有英、日、德等诸国文字以及大量的数学推理公式穿插其间。再加上先生书法兼学百家，可以想见日记里行、草、篆、隶荦荦大观的场面。先生日记六十余年来未能得以刊行于世，以至先生之学久不为世人所知，此为一重要原因。

据有幸读过《万年山中日记》的杨方笙先生介绍，“日记统用‘青岛华昌大印’连史纸16开乌丝栏笺，毛笔书写，单面折页，每面十行，行楷兼用，斐然可观。”[13] 因先生治学往往纵横贯通，喜做骈文而兼喜楹联，因此，“日记中不仅选录大量前人联语，自己还撰做了不少题赠对、格言对、集句对，尤喜能充分体现汉字精巧特点的灯谜、酒令等。”从中不难想见日记内容的博杂。

兹录先生于1935年在山东大学任教时的日记一则，与诸君共飨:

1933年5月3日，曰:

“学术史最不易作，非淹贯各科，兼有史才者不办。庄周《天下篇》和太史公极富学术价值的日记《论六家要旨》，综论诸家学术思想，为其滥觞。班固《艺文志》，方具雏形。于今二千余年，尚未有完备之著作也。《宋元学案》为理性思想史，《畴人传》为天算家略传，《佩文斋书画谱》为艺术稗乘，未足为学术史也。近人支伟成《清代朴学大师列传》专传朴学，偏重宗派，于学术思想，尚少汇通，然形式粗具，实受欧史之暗示。梁公所著，才气横溢，取法极正，惜体大而思未精，既怀传世之心，又急售世之利，是其所短。比年学风走速成之路，陈半熟之品，凡百皆然，梁公未能免于风气也。”

此为任初先生读罢1929年上海民智书局出版的梁启超《中国近三百年学术史》后写下的感受。先生向来主张做学问要“勾通文理之邮”(用现在的话来说，就是“不分文理”，讲究“多学科交叉”)，先生以历代典籍为例，强调学术史“非有淹贯各科”并“兼有史才者”所不易做，即使对于道德文章兼备的梁任公也以此批评之。先生这样要求别人，同时也是这样要求自己的，“致力实学，莫逐虚名”贯穿于先生的一生，其藏于箧中，没于日记的著述远远多于其付梓之作。

可以说，几乎没有人能够读懂这些日记里的所有内容，但从另一方面又可以说，几乎每个人都能够从这些日记中找到属于自己的东西。由此，以文及人，若要了解先生，读懂先生，想来也绝非一人之力，一日之功。

凤翥龙翔，银钩铁划

任先生书法以颜体为本，兼融诸家之长，楷、行、草、隶、篆并工，造诣甚高。

在日本留学期间，先生书法主学何绍基，后来到武汉大学任教则专临《郑文公碑》及《张黑女碑》，在河南大学时又学颜鲁公及钱南园等法帖，皆得其神。据曾侍奉先生临池的东床快婿钟集先生回忆，“先生原学颜鲁公，后兼学百家，造诣甚高。在坪石时，师生慕名求墨宝者极多，先生通常多写行书条幅，亦有中堂、对联、横披、扇面、匾额等，有时一日多至20余帧，落款皆有所不同。写大字匾额，不须钩边。先生撰《罗文干墓志铭》后，亲自寸楷书写，从早晨七时许开始，一直写到午后一时，一气呵成，书法超绝，从纸背见笔力均匀进纸，洵为艺术珍品。”[14]

先生曾谈学书之法云，“写字以唐字为底，横平正直缓缓写”，“欲求用世则沿明而下，取法近贤，以博其用;欲求自得则溯晋而上，尚友古人，以究其蕴。”[15] 现藏于澄海师豫堂的《黄际遇论鲁公书法》条幅云:“多宝塔碑最窘束，而世人尤喜，正如杜少陵诗佳气满纸，而学者徒取其硬涩，此殆曹子建所谓‘兰茝馨香，人之所嗜，而海畔有逐臭之夫者也’”，可见先生对于历代书法有着自己独到的见解。

据说，先生有一癖好叫做“宿墨不可用”，每次写作都要现磨鲜墨才好，且写字绝不能临阵随意一番，一定要在早晨精力充沛时胸有成竹而写，所谓胸有成竹就是要在先一天或晚上要考虑好怎样下笔，怎样构思。正如饶宗颐先生对任初先生的评价——“善书，顾不轻于下笔。”[16]

有一次，恰好钟集及其小友吕渭纶侍奉先生左右，先生说明晨要写幅字送还人家，钟集和吕渭纶一大早就起来磨墨，两个人的效率很高，不一会儿就磨好了，钟集还捎带手把待写的纸小心折好，以方便书写。不一会儿，先生散步回来正准备挥毫，但见

纸张有折痕便说道："这张纸不用了，写字的纸不可折，呆板不得。再者，依照折痕写字丧失书法贵在自然的精神，尤其行草书，大可不必预设框架，反为所限而流于艰涩呆滞，有失本真，这种做法算不得是个真正的书法家。"可怜见的，钟集只好将纸张弃置不用。平日里先生写字也从不随便，即便是上课写板书亦是如此。尤其是给中文系的学生上课时，其板书一律用篆文书写，称："中文系高年级的学生嘛，应该学！"[11] 任初先生板书篆书既快且好，被学生赞为"银钩铁划"。

在中山大学时，每每有人登门求字，赞先生为中山大学"一枝笔"。对此任初先生常答道："中山大学之内有'枝半笔'，我只能算是'半枝笔'，真正的一枝笔是侯过教授（侯教授时为广州中山大学农学院林学系系主任、教授——作者注）"[17]。既有自谦之义亦有自诩之辞，这也是先生自信之处吧。

1922 年"八二风灾"，任初先生亲自书写《三字经楷书帖》并于上海出版，该帖体现了颜筋柳骨的书艺精髓，为当时学校提供书法教学的范本。任初先生将所得稿费全部捐出用于救灾。

先生之风，山高水长 [18]

琴棋书画，号为四雅，先生精于其二；骑术技击，可谓两难，先生承袭一身。但就是这样一个"动静皆宜"之人却有一致命软肋——不会游泳。

任初先生虽生于海滨，却一直视水为畏途，此中原因颇令人费解。据说先生早年间曾由著名相士看流年，云："晚岁有水厄，能救尔者尔子也。"当时先生权当戏言，未尝挂怀。后岁，先生研读周易有年，曾自占一卦，亦有将厄于水难之兆，与相士之言竟然无二，自此暗暗吃惊，乃至有些耿耿于怀了。一次与张作人教授谈及此事，张听罢哈哈大笑，适逢先生四子家枢中学结业，奉侍严尊在侧，张教授见其健壮结实，风华正茂，就说道："那就延请名师，训练家枢游泳吧！"果然，家枢转读于坪石中大附中高中部后，每天下午放学，必往北江训练游泳，日日如是。先生也常至岸畔，笑迎四子游归。相士之言固不足取信，而自测之兆与之暗合似也不能为凭，然任初先生一生的重大变故的确与水有着直接关系。

现代史上中国数学博士第一人胡明复(1891-1927)

1925 年 11 月，先生由上海乘飞鲸号轮船返乡，船行至福建诏安时触礁。当一船人眼看着船随时可能沉没而迫切盼望救援时，屋漏偏逢连夜雨，又遇见一群海盗趁火打劫。先生十多年的日记、文稿以及随身的财物不是被海浪卷走就是遭海盗洗劫，仅只身脱险。后来先生回忆时留下这样的记载："乙丑，飞鲸沉舟之难，急时自祷于天，谓幸而免，归葬父事毕，不再行役。"（《复姚秋园书》）尽管先生并不迷信，但危急之时仍不免"自祷于天"，并将遇难的原因归咎于其"久负家山，食言誓墓"，于是发誓如果此次得以幸免，给父亲扫墓后将不再远行，想来这也应是其第二年即受聘于广州国立中山大学的原因之一。

但计划不如变化，1928 年，经不住时任河南省主席的冯玉祥将军再三诚挚邀请，任初先生决定北上开封，担任国立开封中山大学校务主任兼数学系教授，并于第二年 5 月被任命为河南中山大学校长兼河南省教育厅厅长。此后，因时局动荡，任初先生又几经辗转播迁。虽亦有涉水远行，所幸安全无虞。

1945 年抗战胜利，散播四处的中山大学师生陆续迁返广州。时为中山大学数学天文系主任的任初先生也携四子家枢乘坐校方租用的大船与部分教师及家眷同返。

舟楫一路沿北江而下，正值秋高气爽，加之心情舒畅，先生早已将占卜之言淡忘，而是一心一意辅导家枢学习数学，希望其到广州后能顺利考取中大数学系。自登船之日，每天晨起，必出题若干令其演算，待至准确无误，方由家枢搀扶至船尾出恭，几乎形成习惯。谁料到了 10 月 21 日这天，船行至清远白庙，风云突变，水急浪湍。巧的是，那一日先生为家枢增加了演算题目，家枢作业尚未完成，先生不想打扰，遂独自一人赴船尾，竟不幸落水。

家枢闻声，衣服也来不及解脱，急入江中抢救。虽抓住任初先生，但当时风高浪大，且身有衣物，始终无法返回坐船，而家枢已经疲力尽。正当一筹莫展之际，有一大船迎面驶来，教务长邓植仪同教授们向该船水手求援，并愿酬以重金。谁料答道："我船祖训，从不落水救人，因救一必失一，请谅请谅！"一线希望化为尘埃。此时，后面学生乘坐的帆船赶到，六百多位同学纷纷下水寻觅搜索，几十分钟过去，杳无踪影。最后，有一渔船正在撒网捕鱼，经请求，愿施义举，终于，先生和四子家枢被一同

救起。校医立即抢救，家枢很快苏醒过来，但任初先生却因肺部积水过多，终于与世永别！[19]

任初先生游历人间六十载，临水而生又随水而逝，文理兼通、中西学贯，然生性淡泊，不求闻达。致力教育垂四十年，万里迢递，四海桃李。虽时局艰难期间，亦诲人不倦，讲诵不辍。胜利凯旋之日，却不幸没水罹难。正值学术壮年不幸殒命，怎不令人嗟叹。时国民政府明令褒扬，称其“志行高洁，学术渊深。启迪有方，士林共仰”。任初先生是我国有史以来由政府明令褒扬的第二位数学家（第一位为胡明复先生，系中国人攻读数学专业在国外获得博士学位的第一人，曾参与创建了中国最早的综合性科学团体——中国科学社，以及最早的综合性科学杂志——《科学》，1927 年 6 月 12 日在无锡溺水身亡，年仅 36 岁）。

任初先生追悼会那天，中央教育部特派要员前来执事。各界名士如于右任、陈立夫、戴笠、柳亚子、胡适、梁实秋、老舍等 80 多人均致送挽词花圈。受业老舍挽曰：“博学鸿才真奇士，高风亮节一完人”；硕儒姚梓芳撰《澄海黄任初教授墓碑》有言：“笃信好学，守死善道，斯二语惟君足以当之。”

诚哉斯言！

本文的写作得到了山东大学数学院院长刘建亚教授的大力支持，四川大学数学学院罗懋康教授多次给予了细致的指点，潮汕文化研究中心提供了珍贵的资料，在此一并致谢！

参考文献

1. 唐刘长卿《湘中忆归》诗有“迢递万里帆，飘摇一行客”，宋元绛《贺王禹玉》诗有“星辰影落三阶下，桃李阴成四海间”。
2. 陈景熙 :《黄际遇先生年谱简编》，陈景熙、林伦伦主编《黄际遇先生纪念文集》，汕头大学出版社 2008 年版，第 63-94 页。
3. 宣统三年五月初九，《唐景崇等为请照章录用廷试游学毕业生事奏折》，载中国第一历史档案馆 :《宣统二年归国留学生史料续编》
4. 详见《黄际遇日记（节本）》，1932 年 12 月 14 日；1933 年 3 月 9 日，3 月 21 日，11 月 17 日，11 月 24 日。
5. 张友余 :《黄际遇传》，陈景熙、林伦伦主编《黄际遇先生纪念文集》，汕头大学出版社 2008 年版，第 45 页。
6. 《黄任初教授未克南来》，《国立中山大学日报》1929 年 1 月 18 日。
7. 《河南大学校史》2002 年 9 月第 1 版。
8. 黄义祥 :《三进中大任教的黄际遇教授》，《中山大学校报》（校友专刊），2000 年 7 月上旬，（增）第 36 号。
9. 张云 :《黄任初先生文钞》序，广州国立中山大学 1949 年版，第 1 页。
10. 林莲仙 :《缅怀黄任初师》，《汕头文史 · 潮汕教育述往》1991 年第 9 辑，第 172-179 页。
11. 何其逊 :《岭南才子亦名师——怀念黄际遇教授》，《中山大学校报》1984 年 11 月 10 日。
12. 《万年山中日记》第七册小序。
13. 杨方笙 :《黄际遇和他的 <万年山中日记>——纪念先生诞生 110 周年，逝世 50 周年》，载饶宗颐主编 :《潮学研究》第四辑，汕头大学出版社 1995 年版，第 295 页。
14. 钟集 :《记黄际遇先生》，陈景熙、林伦伦主编《黄际遇先生纪念文集》，汕头大学出版社 2008 年版，第 188 页。
15. 《万年山中日记》1933 年 5 月 2 日。
16. 饶宗颐《黄际遇教授传》，载《暹罗澄海同乡会成立周年纪念刊》，1949 年泰国曼谷，第 35 页。
17. 吕渭纶 :《怀念黄际遇先生》，《汕头史志》1995 年第 3 期，第 10—12 页。
18. 范仲淹《严先生祠堂记》语“云山苍苍，江水泱泱，先生之风，山高水长”，发人“神化为岳，魂归于川”之联想，后句入正文。
19. 博学鸿才真奇士，高风亮节一完人——黄际遇教授遇难记》，1988 年 10 月黄际遇先生四子黄家枢先生口述，陈训先整理，《岭南文史》2010 年第 2 期。

数学史上最富有传奇色彩的数学家——伽罗瓦

纪念伽罗瓦诞辰200周年

邓明立

法国传奇数学家伽罗瓦，年仅21周岁便去世，可能是最英年早逝的数学家。以他名字命名的有“伽罗瓦群”、“伽罗瓦域”和“伽罗瓦理论”。而这些则是抽象代数学的标准术语。数学家及数学史家给出的公论是：他的死使数学的发展被推迟了几十年。当然历史不能假设，数学的发展也不能臆断，我们难以想象：如果伽罗瓦并非如此的“短寿”，那么现代的数学将会是什么样子。

时间： 1832 年 5 月的某个清晨。
地点： 法国巴黎冈提勒的阁拉塞尔湖畔。
场景： 两名法国青年互相举着枪，在相距 25 步的地方，填弹，射击。其中一位青年被对手的枪射中腹部，由于没有医生在场，这名青年随后去世。

革命中的法国见证了又一次决斗，这已经不是什么新鲜事。在当时狂热的革命浪潮中，只有寥寥数人意识到，法国，甚至全世界，又失去了一个伟大的头脑。

决斗中被击中的青年名字叫做伽罗瓦（E. Galois, 1811-1832），他是一位颇具传奇色彩的数学家。数学家一般被认为是不食人间烟火，而且不能提起任何人的兴趣和引起任何人的共鸣，但伽罗瓦绝对是个例外，在全部数学史上，再没有比伽罗瓦更有说服力的例子了，无数学子因为伽罗瓦的故事而走上数学的道路。今年恰逢伽罗瓦诞辰 200 周年，我们有必要说下这段历史。

方程惹的祸

有文献记载，自人类文明诞生以来，就有了数学。古埃及文明、古巴比伦文明都曾孕育了繁荣的数学文化，这种文化反映在天文、宗教、艺术等各个方面。

汹涌的幼发拉底河和底格里斯河灌溉了肥沃的美索不达米亚平原，也孕育了高度的数学文明。从巴比伦时期起，已有简单的代数公式来计算二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解，即

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}。$$

塔塔利亚最早给出了三次方程的一般解法

阿拉伯数学的突出成就表现在代数方面，《代数学》集中体现了阿拉伯人处理代数方程的方法观。至此，代数学的主要任务就是解方程。

欧洲数学直到文艺复兴才得到解放，《代数学》传到欧洲后，人们开始尝试去解三四次方程。按照当时的风俗，学者们不公开自己的成果，而是作为挑战别人和获取声望的工具。这还有个故事，塔塔利亚得出了三次方程的解，但被卡尔达诺（G. Cardano, 1501-1576）用某种办法窃取并将其发表在《大术》中，于是二者之间的争吵开始变成一部无厘头剧。

三次方程得到解决后，卡尔达诺的学生费拉里（L. Ferrari, 1522-1565）又解决了四次方程，其解法也发表在《大术》中，而现在解三次方程的公式被称为“卡尔达诺公式”。其实卡尔达诺是个百科式的人物，其成就涉及数学、物理、医学方面，他还是最早提出复数概念的数学家。但卡尔达诺性格十分古怪，而且嗜赌如命，他七十一岁时通过占星术推算出自己将在 1576 年 9 月 21 日去世，但是到那一天时，他活得像头壮牛，为了保全自己大星象家的名声，就自杀了。

三、四次方程可解性，就是这些方程的解可以通过方程的系数经过加、减、乘、除以及开方等运算得出来，这种根的表示称为根式解或代数解。三、四次方程可解性的问题得到解决后，五次及五次以上的方程可解性似乎不是个难题，但这道题目出奇的难，300 年间，竟然没有得到解决。

在这个过程中，拉格朗日（J. L. Lagrange, 1736-1813）的工作最为重要，1770 年他发表《关于代数方程解的思考》，讨论了三、四次方程能根式解的原因，发现三次方程有一个二次辅助方程，四次方

卡尔达诺（1501-1576）

费拉里（1522-1565）

鲁菲尼（1765-1822）

程有一个三次辅助方程，并将这些辅助方程称为原方程根的“预解函数”。他试图进一步推广这种方法，但在五次以上的方程遭到失败，于是便猜测五次方程不能根式解，但未能证明。

1799 年间，意大利数学家鲁菲尼（P. Ruffini, 1765-1822）用拉格朗日的方法证明不存在一个预解函数能满足低于五次的方程，并明确提出要证明高于四次的一般方程不能用代数方法求解。

尽管取得了一系列进展，但这个问题似乎很难解决。

初生牛犊不怕虎

英年早逝常使人哀伤不已，特别是那些极有才能的数学家。阿贝尔（N. H. Abel, 1802-1829）1802 年 8 月 5 日出生于挪威，1829 年便因贫困去世。16 岁时，阿贝尔就开始学习牛顿、欧拉（L. Euler, 1707-1783），拉格朗日和高斯（C. F. Gauss, 1777-1855）的经典数学著作。18 岁那年父亲去世，从此生活的重担就压在了他身上。19 岁时，阿贝尔解决了五次及五次以上方程有无根式解这道让数学家头疼不已的难题，无奈当时挪威无人能看懂。

这个青年人的数学思想已经远远超越了挪威国界，他需要与有同等智力的人交流思想和经验。当时挪威的数学充其量也就算是四流，连三流都算不上，没人能看懂阿贝尔的论文。于是阿贝尔将论文寄给丹麦的数学家去审，丹麦数学虽然比挪威强，但也强不了多少，因此也没人能看懂。于是乎阿贝尔萌生了到欧洲大陆的数学强国去谋

阿贝尔（1802-1829）

求与顶级数学家对话的想法。

踌躇满志的阿贝尔自费印刷了证明五次方程不可解的论文（鉴于经费原因，他把内容压缩在了 6 页上），并选择德国的柏林作为旅行的第一站。其实当时的法国是不可动摇的一流数学强国，阿贝尔为什么首选德国呢？主要是因为高斯，当时的德国数学虽是二流，但高斯却是超一流数学家，他的高度是无人可比拟的，如果能得到高斯的承认，那将会省去很多事情。

阿贝尔在柏林滞留了将近一年时间。虽然等候高斯召见的期望终于落空，这一年却是他一生中最幸运、成果最丰硕的时期。在柏林，阿贝尔遇到并熟识了克雷尔（Crelle, 1780-1855）。克雷尔是一个铁路工程师，也是热心数学的业余爱好者，他以创办了世界上最早专门发表创造性数学研究论文的期刊《纯粹和应用数学》杂志而在数学史上占有一席之地，这本期刊后被称为“克雷尔杂志”，阿贝尔关于五次方程的文章就发表在克雷尔杂志的第一期。正是由于阿贝尔的论文，克雷尔杂志才能逐渐提高声誉和扩大影响。

1826 年 7 月阿贝尔从柏林抵达巴黎。在那里他拜访了勒让德（A. M. Legendre, 1752-1833）、柯西（A. L. Cauchy, 1789-1857）等法国著名的数学家，但结果仍令人失望。在巴黎的半年，阿贝尔从满怀希望到渐生疑虑终至完全失望。1826 年底阿贝尔回到柏林，不久就染上了肺结核（另一说阿贝尔在巴黎便染上了肺结核），这在当时可是不治之症。

窘迫和无奈之下，阿贝尔只得回国，但处境却更加艰难。挪威当时到底是弱国，而且处境闭塞，孤陋寡闻，他们连一个普通大学教授的教职都不能提供给阿贝尔，阿贝尔的生活已经非常艰难。1829 年 1 月，阿贝尔的病情恶化，他开始大口吐血，并不时陷入昏迷。1829 年 4 月 6 日晨，这颗耀眼的数学新

阿贝尔被视为挪威的民族英雄。挪威皇宫有一尊雕像，这是一个大无畏的青年的形象，他的脚下踩着两个怪物——分别代表五次方程和椭圆函数

法国数学家柯西（1789-1857）被认为应该对阿贝尔的厄运负责

挪威数学家西罗（1832-1888）是研究阿贝尔工作的先驱之一

挪威数学家李 （1842-1899）是李群的创始人，出版了阿贝尔 选集

星便过早地殒落了。阿贝尔死后两天，一封信寄到了挪威，告知柏林大学已决定聘请阿贝尔担任数学教授，但阿贝尔已经永远读不到了。

读到此处，我们不禁要问：是谁该对伽罗瓦和阿贝尔迟迟未获得数学界承认的厄运负责呢？人们很自然会想起审评论文的柯西。

柯西是当时法国数学的领袖，数学史上论文最多的数学家之一。当时的柯西正年富力强，创造力旺盛，由于忙于自己的事而疏忽了阿贝尔的工作，又由于波旁王朝被推翻流亡国外而错过了伽罗瓦的论文，从而铸下大错。而柯西可能是当时唯一能理解伽罗瓦的法国数学家。关于柯西对伽罗瓦的论文的态度，历史上存在两种不同的说法。一种说法是柯西根本没有把这篇出自一个名不见经传的中学生之手的论文当回事，随手丢进了字纸篓。以致到现在，很多人都把柯西当作埋没伽罗瓦的罪魁。另一种比较可信的说法是，柯西看出了这篇论文的重要性，并且希望伽罗瓦重新写一篇论文，详细阐述他的理论。事实上第二种说法更可信。

阿贝尔虽然不幸地去世了，但是他的精神感召着挪威数学家。挪威虽小，却出了不少的数学家，继阿贝尔之后，挪威又有两位世界级的数学家，西罗（P. L. Sylow, 1832-1888）和李（M. S. Lie, 1842-1899），这两位数学家的工作均为群论，并且在数学大厦上永远留下了他们的名字。

阿贝尔的半身雕塑

西罗，挪威数学家。早年为一名中学教师，尽管教书占用了他大量的时间，但西罗还是挤出时间来研究阿贝尔的论文。在1862-1863学年中西罗得到了克里斯蒂安尼亚大学的临时职位，为学生讲授伽罗瓦理论和置换群。这可能是有记载的第一次讲述伽罗瓦理论。在西罗当年的学生中，有一位后来成为著名数学家，他就是李群理论的创始人——李。从1873到1881年，西罗同李合作，编辑出版了阿贝尔著作的新版本。1902年又与别人合作出版了阿贝尔的通信集。

历史不会忘记这位杰出的数学家，为了纪念挪威天才数学家阿贝尔诞辰200周年，挪威政府于2003年设立了一项数学奖——阿贝尔奖。这项每年颁发一次的奖项的奖金高达80万美元，相当于诺贝尔奖的奖金，是世界上奖金最高的数学奖之一。而首位得主正是法国的一位数学家——塞尔（J-P Serre,

1926-），塞尔 28 岁便因为稳定同伦群的计算突破而得到菲尔兹奖，我想这个记录恐怕要空前绝后了。而他现在所从事的问题，恰巧为伽罗瓦理论的逆问题：即给定一个群，是否有有理系数方程以它为群呢？这并不是一个简单的问题。

虽说阿贝尔的遭遇很不幸，但如果他的遭遇与另一位数学家比起来，简直可以说幸运的多。由于阿贝尔的早逝，高次方程在什么情况下可解的充要条件并没找到，而这个历史重任则交给了另一位比他小 9 岁，身世比他更坎坷的数学家——伽罗瓦。

傲慢与偏见

在距离法国巴黎 18 公里的地方，有一个宁静的小城镇，名叫堡拉瑞恩（Bourg La Reine），城里有一条伽罗瓦街，在大街的 54 号房的正面，立着一块纪念碑，上面写着：“法国著名数学家埃瓦里斯特 • 伽罗瓦，生于此。卒年 20 岁，1811-1832 年”。这块纪念碑是在 1909 年 6 月 13 日设立的，而它所纪念的人已经长眠于地下 70 多年了。

当时法国是公认的一流数学强国，没有之一。即使今天，法国数学依然很强，2010 年菲尔兹奖得主中有两位正是法国数学家吴宝珠（越南裔）和维拉尼（C. Villani）。巴黎综合工科学校和巴黎高等师范学校是令无数学生梦寐以求的院校，而这两所学校的建立都得益于法国大革命。

在大革命前，法国的社会矛盾已到不可调和的地步。由于波旁王朝残酷的统治，巴黎人民再也忍无可忍，关于这一段的描述，法国作家狄更斯的《双城记》无疑最具代表性：那是最美好的时代，那是最糟糕的时代；那是智慧的年头，那是愚昧的年头；那是信仰的时期，那是怀疑的时期；那是光明的季节，那是黑暗的季节；那是希望的春天，那是失望的冬天；我们拥有一切，我们一无所有；我们全都在直奔天堂，我们全都在直奔相反的方向——简而言之，那时跟现在非常相象，某些最喧嚣的权威坚持要用形容词的最高级来形容它。说它好，是最高级的；说它不好，也是最高级的。

数学家蒙日（1746-1818）是巴黎高工的第一任校长

数学家孔多塞（1743-1794）在法国大革命时被送上断头台

1789 年巴黎人民攻占了巴士底狱，里面虽然只有 6 个政治犯，但却是史上最伟大的起义。法国的革命风暴吓坏了欧洲大陆的其他君主，他们纷纷组织反法同盟。1792 年法国军队在瓦尔密战役中打败了外国干涉军，获得了难得的喘息之机。为了正在进行的战争，法国迫切需要工程师构建堡垒、修筑道路和桥梁以及从事有关枪炮方面的工作，1795 年法国巴黎综合工科学校应运而生，著名数学家蒙日（G. Monge，1746-1818）是这所学校的第一任校长。

在这之前的 1794 年，巴黎高师也成立了，傅里叶（J. Fourier, 1768-1830）被聘为该所院校的教授，而这也是伽罗瓦的母校，可惜母校将这名桀骜不驯的学生给开除了。

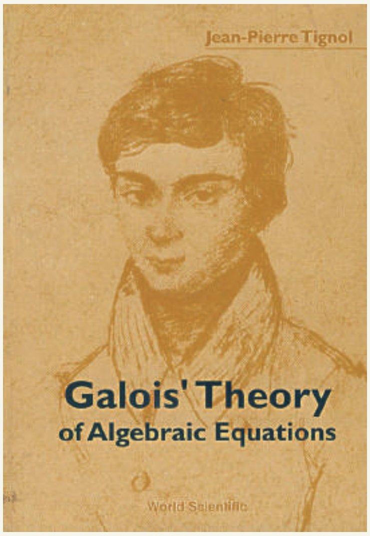
伽罗瓦生于 1811 年 10 月 25 日，这时的法国大革命正如火如荼，不过革命的血腥气息没有那么浓了。这也是著名的拿破仑时代，由于拿破仑对数学和历史的热爱，法国的数学取得了长足的进步，无数数学家与拿破仑交上了朋友。但从巴黎起义到拿破仑称帝之前，整个革命可谓血雨腥风。革命狂潮中的人民将矛头指向了那些在科学院享受政府津贴的院士和科学家们，当时的口号就是：“共和国不需要科学家！”拉瓦锡（A. L. Lavoisier, 1743-1794）、孔多塞（M. M. Condorcet, 1743-1794）等科学家被送上了断头台。尤其是孔多塞，他是著名的数学史专家，具体负责了巴黎综合工科学校和高等师

范学校的组建工作，以撰写的欧拉传记中“欧拉死了，他停止了计算和呼吸”而闻名，竟然也被残忍地杀害。大革命虽然促进了法国科学的发展，但为数不少的科学家在大革命中被送上断头台，更为可悲的是，法国科学院的院士们变得畏畏缩缩、老态龙钟，他们显然被大革命吓破了胆。

伽罗瓦还没学会说话，拿破仑就已经迫不及待地布置侵俄战争。1812 年，侵俄战争失利，拿破仑帝国趋于崩溃。1814 年 4 月拿破仑战败，法兰西第一帝国灭亡。继而波旁王朝复辟，法国又开始了封建王朝统治。1815 年 3 月 14 日，被监禁在厄尔巴岛的拿破仑卷土重来，发动了“百日政变”。伽罗瓦的父亲正是在这期间当选为堡拉瑞恩市的市长，而且一直干了 15 年。伽罗瓦的母亲是位当地法官的女儿，聪明而有教养，但个性倔强，甚至有些古怪。她是伽罗瓦的启蒙老师，主要教授他希腊语和拉丁语，为他打下了极好的语言基础。

拿破仑发动“百日政变”后，惊恐的反法同盟立刻组织数倍于拿破仑的兵力侵犯法国，双方在滑铁卢展开激战，不幸的是，拿破仑遭到了失败。在敌人兵锋指向巴黎的时刻，有人建议拿破仑把巴黎综合工科学校和高等师范学校的学生派上战场，这一建议被拿破仑断然拒绝，并留下了永恒的话语：我怎么能为了取金蛋而杀掉下蛋的母鸡呢？这句话的代价是：拿破仑被流放到圣海伦岛，但他保证了法国数学几十年内统治世界，单从此项就能看出拿破仑不愧为伟大的君主。伽罗瓦的少年时代就是在这样的动荡不安、风浪迭起的年代里度过的。

1823 年 10 月，伽罗瓦 12 岁了，



印有伽罗瓦头像的“伽罗瓦代数方程理论”一书

他离别了双亲，考入路易 • 勒格兰皇家中学，即现在路易 • 勒格兰高等专科学校，开始接受正规教育。

伽罗瓦确实是一位聪明机敏的学生，在中学的前两年，他是个优等生，特别是希腊语和拉丁语成绩突出，多次获奖，但当时他并不能算是出类拔萃的学生。第三学年（1826 年），他对修辞学没有下足够的功夫，因而只得重读一年。这件使伽罗瓦感到难堪的坏事，却给他创造了接触数学的机会。校方批准他可以去听数学课。这时他已经 15 岁了。与年幼起就对数学产生浓厚兴趣，而后来在数学上取得伟大成就的数学家牛顿（Newton, 1643-1727）、欧拉、高斯、柯西相比，伽罗瓦接触数学似乎太晚了。

总有人是为数学而生的，伽罗瓦似乎便是这样一个人。伽罗瓦一接触数学，立即就被数学的神秘迷住了，以至于老师不止一次提醒他要顾及其他学科。他如饥似渴地吸取数学营养，但很快就不满于教科书的贫乏、琐碎，同时对那些不谈推理方法而只注重形式和技巧问题的数学方法感到厌倦。于是，他毅然抛开教科书，直接阅读数学大师的专著。勒让德的经典著作《几何原理》，使他领悟到数学推理方法的严密性；拉格朗日的《解数值方程》、《解析函数论》等著作，不仅使他的思维更加严谨，而且其中的思想方法对他的工作产生了重要的影响；接着他又研究了欧拉、高斯和柯西的著作，为自己打下了坚实的数学基础。学习和研究数学大师的经典著作，从中学习最先进的数学思想，了解当时数学发展的动态，这是伽罗瓦获得成功的重要途径。学完了这些数学大师的著作，他坚信自己能做到的绝不会比他们少。伽罗瓦的一位老师说：“他被数学的鬼魅迷住了心窍”。不过，忽视了其他学科导致了他首次（1828 年）报考巴黎综合工科学校失败。

1828 年 10 月，伽罗瓦从初级数学班升入高级数学班。这时阿贝尔早已完成了自己在代数方程的工作而全身投入椭圆函数的研究当中，但伽罗瓦毫不知情，他也开始涉足这一领域。他遇到了才华横溢、热情宽厚的数学教授理查德（L. P. E. Richard）。他是一位令人尊敬的学者，25 岁时就已是一名数学教授了。他讲课优雅动人，思维清晰深刻，很受学生们的欢迎，特别是他具有发掘和培养科学英才的敏锐判断力和高度责任感。经他发现和培养的著名科学家，除了伽罗瓦以外，还有海王星的预测者、著名的天文学家维利叶（L. Verrier, 1811-1877）和 19 世纪杰出的数学家埃尔米特（C. Hermite, 1822-1901）。

理查德发现伽罗瓦具有敏锐的洞察力，他不仅能很快地学会和

伽罗瓦头像

掌握现成的知识和方法，而且能领悟和发现新的思想方法。理查德认定伽罗瓦具有非凡的数学天赋，并断言 :“伽罗瓦只适宜在数学的尖端领域中工作”。面对老师的赏识和鼓励，少年伽罗瓦更加努力地学习。当时，年仅 17 岁的伽罗瓦开始着手研究关于方程理论、整数理论和椭圆函数理论的最新著作，并取得了初步成果。1829 年 3 月，伽罗瓦在理查德老师的帮助和推荐下，发表了他的第一篇论文，题目是“周期连分数的一个定理的证明”，刊登在法国数学家热尔岗（Gergonne, 1771-1859）于 1818 年创办的第一个专业性数学杂志《纯粹和应用数学年刊》上，他更为清楚地论述和说明了欧拉与拉格朗日关于连分式的结果，这标志着伽罗瓦学术生涯的开始。

正当学术上取得重大成就时，伽罗瓦的生活却发生了重大变故。在伽罗瓦准备再次报考巴黎综合工科学校的前夕，他深深爱戴的父亲，由于受不了当地怀有恶意的牧师的诽谤，于 1829 年 7 月 2 日饮恨自杀了。这次可怕的打击及接踵而来的不幸，给伽罗瓦的心灵留下了深深的印记。之后不到一个月，伽罗瓦参加了巴黎综合工科学校的入学考试。伽罗瓦对这次考试充满信心，老师和同学们对伽罗瓦的天赋和学识也深信不疑，但是他的希望又一次化为泡影。在入学前的面试中，主考人故意提出一些人为制造的、错综复杂的问题刁难伽罗瓦，伽罗瓦认为问题提得不恰当，只作了简单回答。接着主考人又就对数提出了一些问题，伽罗瓦认为这些问题过于简单。伽罗瓦的傲慢态度无疑使主考人感到难堪和不自在。伽罗瓦想对主考人介绍自己在数学上的研究成果，没说几句，主考人竟然放声狂笑起来，因为他们绝不相信眼前这位羸弱的少年会对他们谈论如此高深的数学问题。伽罗瓦对主考人的狂傲终于忍受不住了，他不顾一切地将黑板擦布扔向主考人。就这样，伽罗瓦第二次蒙受了落榜的耻辱，再一次被综合工科学校拒之门外。

伽罗瓦不是那种备受社会关注和特殊培养的骄子，他面对的是接二连三的打击、社会的压制、命运的挑战。年轻的伽罗瓦并没有屈服，尽管父亲的死及两次落考使伽罗瓦悲痛不已，但他仍然“沉着而镇静”。伽罗瓦听从理查德教授的劝告，报考了巴黎高等师范学校，1829 年 10 月 25 日他被录取入学，生活费用总算有了保证。

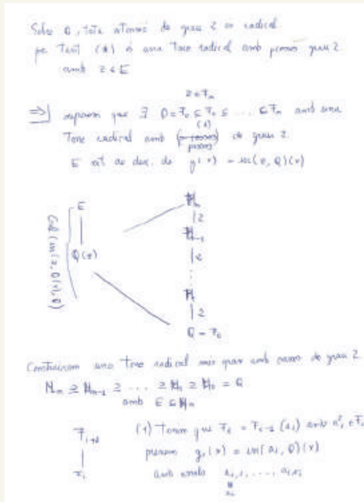
当时的高等师范学校可没有综合工科学校这么出名，伽罗瓦报考高等师范显然是不情愿的。这种情况一直到 1861 年才得到改变，达布（Darboux, 1842-1917）在这

一年同时考上了工科学校和师范学校，而且都是第一名，但达布毅然选择了高师，从而开了一个先例，从此大批优秀数学家成了高等师范学校的毕业生，如风靡一时的布尔巴基学派成员几乎全部毕业于高等师范学校。

就在入学前的 1829 年 5 月 25 日和 6 月 1 日，伽罗瓦先后将研究方程根式解充要条件的成果写成论文，呈送法国科学院。科学院请柯西做论文的主审，这时正值阿贝尔去世不久。

柯西是当时法国乃至全世界最杰出的数学家之一，一生发表过 800 多篇论文。当时他已经研究过作为群论先驱的置换理论，并且后来就群论本身也广泛地进行过研究。但伽罗瓦的论文新概念较多，论述过于简略，柯西便建议他再次修改论文。于是，伽罗瓦又写了一篇详细的论文，于 1830 年 2 月呈交法国科学院。这次论文的主审是科学院常务秘书傅里叶（J. B. J. Fourier, 1768-1830）。可惜，傅里叶还没来得及审查伽罗瓦的论文，就在这年的 5 月因病去世了，在他的遗物中未能发现伽罗瓦的手稿。这使伽罗瓦感到愤怒。他写信质问法国科学院，为什么对“小人物”的研究成果如此轻慢。在这种情况下，科学院只好建议伽罗瓦再次呈交他的论文。伽罗瓦于 1831 年 1 月第三次提交他的论文，题目是“关于方程根式解的条件”。在论文后，伽罗瓦还附上了一篇简短绪言，他请求审稿人至少要仔细读完他写的论文。

法国科学院委托泊松（S-D. Poisson, 1781-1840）和拉克鲁瓦（S. F. Lacroix, 1765-1843）审查伽罗瓦的论文。这两位数学家虽然认真



伽罗瓦的手稿

地审阅了这篇论文，可得出的结论却是“不可理解”。在他们给科学院的报告中说：“我们已经尽了我们最大努力来研究伽罗瓦的证明，他的推理显得不很清楚，到目前为止，我们还不能对它作出正确评价，因为有说服力的证明还没有得到。因此，在这篇报告中，我们甚至不能给出他的证明思想。”事实上，他们没有完全看懂伽罗瓦的文章。这样，伽罗瓦的伟大发现再次被学术界否定了。

这一系列不幸的遭遇接连落在青年伽罗瓦身上，使他感到自己成了一个恶劣的社会机构的牺牲品，这个机构常常化天才为庸常 。他很自然地咒骂万恶的压迫制度，正是这个制度将他的父亲逼上了绝路。在他胸中正酝酿着一场与社会抗争的暴风骤雨。

伽罗瓦的失败不过是当时社会的一个缩影，波旁王朝残酷的统治，迫使巴黎人民再度起义，法国“七月革命”爆发了，伽罗瓦对这个社会的厌恶已经到了不可忍受的地步。没有资料显示伽罗瓦以前的政治立场，参与政治也许是自己的一时冲动，也许是对这个社会的极端愤慨。他立即卷入了这场风潮，成为一名勇敢的战士，开始了自己的政治生涯。

七月革命源于查理十世的敕令，敕令破坏了 1814 年《宪章》的精神，严重侵犯了资产阶级的利益，人民群众的生活更加惨淡。1830 年 7 月 27 日，几千名工人和手工业者走上街头，与军警发生冲突。28 日黎明，起义开始。工人、手工业者、大学生和国民自卫军建筑街垒，夺取武器库，攻占市政厅。7 月 29 日，起义者控制了巴黎，占领卢浮宫和杜伊勒里宫，外省发动的起义也取得胜利，但起义的成果被菲利浦（L. Philippe, 1773-1850）窃取。整个起义的过程中，没有巴黎高师的学生。

高等师范学校当时是法国最保守的学校之一，这里的生活方式与修道院极为相似。吃饭前和早课前后，学生们都要大声朗读祈祷文，睡觉前必须听某一宗教题目的谈话，每个月还要做一次忏悔。学校还规定，如果学生一连两个月不做忏悔的话，就要被开除出校。这种保守沉闷的学习和生活环境，使伽罗瓦感到非常压抑。

师范学校的校长吉尼奥（M. Guigniault）坚决反对学生们参加 7 月 27 日－ 29 日推翻波旁王朝的示威游行活动，甚至将学校的大门锁上，防止学生们上街。伽罗瓦不顾一切地想溜出校门，投入到街上那情绪激昂的人群中去，但他几次努力都失败了。1830 年 11 月，19 岁的伽罗瓦勇敢地参加了资产阶级共和派激进分子组成的“人民之友协会”，他是师范学校唯一参加这个组织的人，同时他还报名参加了国

法国 19 世纪著名的浪漫主义油画家德拉克洛瓦 (E.Delacroix，1798—1863) 反映法国七月革命的画作《自由领导着人民》

民自卫军炮兵队，他的政治生涯正式开始了。

1830 年 12 月 5 日，《学校公报》发表了一篇嘲讽校长吉尼奥在七月革命中投机行为的文章，并援引一封署名“师范大学一学生”的公开信，用事实揭露了吉尼奥的不光彩行为。吉尼奥恼羞成怒，未经调查就认定这封信是伽罗瓦写的。4 天后，吉尼奥在尚未得到批准的情况下，滥用校长职权，宣布开除伽罗瓦的学籍。而这篇文章是否真的出自伽罗瓦之手，至今还是一个未解之谜，伽罗瓦本人对此也未置可否。不过在这一事件中，伽罗瓦成了唯一的受害者。1831 年 1 月 8 日，国民教育委员会批准了开除伽罗瓦的决定。于是，这位 19 世纪最有才华的青年被剥夺了最后深造的机会。

离开了学校，同时也失去了生活费的来源，他只好住在母亲那里。但他不愿给不幸的母亲再增加负担，1831 年 1 月 9 日，他在《学校公报》上刊登了一则启事，说以后每逢星期四下午他将在凯洛特小书铺讲授高等数学，讲座将向听众介绍他自己不曾公开讲授的若干理论。在当时的法国还没有如此年轻的科学家，因生活所迫而靠讲授自己的学术见解谋生，这也说明伽罗瓦具有常人少有的坚强高傲的个性。除此之外，辍学后的伽罗瓦把更多的精力和热情都投入到日见激烈的政治活动中去。

1831 年 4 月初，“人民之友协会”举行了一次 200 人规模的庆祝胜利的宴会。为了避免与警察发生冲突，预先准备了措词谨慎的祝酒词。与会者频频举杯，不断抨击政府。在宴会将结束时，伽罗瓦充满激情地一手举杯一手持刀，站起来说道：“为了路易 • 菲利浦干杯！”会场顿时大乱起来。第二天，伽罗瓦以教唆谋害法兰西国王生命未遂罪而被捕入狱。由于拿不出确凿的证据，再加上共和党人律师的尽力辩护，法庭只好宣布伽罗瓦无罪释放。

1831 年 7 月 14 日，伽罗瓦率众上街示威游行时再次被捕，并被判处 9 个月监禁，押在圣佩拉吉监狱。监狱的环境非常恶劣，几十个人关在一间牢房里。伽罗瓦在拥挤嘈杂的牢房里顽强地进行数学研究工作，他整理了以前的论文，研究了阿贝尔的椭圆函数，并为两部著作写了序言，准备出狱后再版。

1832 年 3 月 16 日，伽罗瓦因病被转移到一家私人医院中服刑。这个医院的领导人福尔特里埃（Faultrier）也为警察局做情报工作。1832 年 4 月 29 日，伽罗瓦刑满释放。重获自由的伽罗瓦，决定要在一个月内尽情享受自由者的轻松和快乐。伽罗瓦的好友舍瓦烈（A. Cheralier）这时正在孟尼尔孟坦的圣西门公社里，过着安闲恬静的生活，他写信邀请伽罗瓦与他一起分享着田园式的清闲，以躲避尘世的纷扰。伽罗瓦拒绝了，他准备在 6 月初离开巴黎，去做他想做的事。

但是，一场意想不到的灾难又一次降临在他的头上。

伽罗瓦在福尔特里埃的家里遇到了一个青年女子，对她一见倾心，并和她相处了一段日子。但后来的发展由于另一个男人的加入而发生了急剧的变化。为了了结这场感情纠葛，两人决定于 5 月 30 日展开一场决斗。

思想日渐成熟的伽罗瓦，并不是仅凭一时的感情冲动去参加这场决斗的。他预感到自己在这场决斗中可能身遭不幸，于是，他在参加决斗的前一天，异常冷静地写下

漫画作者：康永君

了三封著名的信。一封是致 N. L. V. D.（这个人是谁，至今还是个谜）的信，信中说：“你们的任务很简单：你们应当证实，我是违背自己的意愿而参加决斗的。”

第二封信是写给全体共和派的朋友们的，他激动地写道：“我将成为一个下流的卖俏女人的牺牲品而死去。”在信中谈到这场决斗时，伽罗瓦说：“苍天作证，我曾用尽方法试图拒绝这场决斗，只是出于迫不得已才接受了挑战。”从这两封信中，我们清楚地看出，伽罗瓦并不是盲目冲动地拿自己宝贵的生命来了结这场个人纠纷的，而是经过了种种努力，想用其他和平方式来解决两人之间的纠葛。仅凭我们对伽罗瓦个性的了解，也不难想象的出，伽罗瓦是会接受这场挑战的。

第三封信是写给他的好友舍瓦烈的，这封长信主要谈论数学问题。它显示了伽罗瓦在生命即将结束的时刻，仍然惦记着他一生为之奋斗的事业——数学。在信中，伽罗瓦概括总结了自己几年来的研究成果，面对这些凝聚着自己的智慧和心血，又被一些学术权威多次否定的论文，伽罗瓦坚信它们是正确的，因此，他委托舍瓦烈妥善保管，并在适当的时候，“请你公开向雅克比和高斯请教，并请他们发表自己的意见，但不是谈论定理正确与否，而是谈论这些定理的意义”。

死神正在一步一步地向伽罗瓦走来，他的头脑异常清醒。他快速而认真地审校他的论文，然而时间太紧迫了，他不得不在论文的空白处写下了这么一句话：“这个论据需要补充。现在没有时间。”人们无不为伽罗瓦临死前所表现出的镇静和高尚的敬业精神而感动。

第二天，即 5 月 30 日的清晨，伽罗瓦和他的对手如约来到冈提勒的阁拉塞尔湖畔。两人在相隔 25 步的地方互相射击，一颗子弹无情地射中了伽罗瓦的腹部。一生刚直不屈的伽罗瓦倒下了，倒在了青春的草地上。几小时后，当地的一个农民偶然发现了他，把他送往科申医院。第二天，即 5 月 31 日，这位未满 21 岁的数学家与世长辞了。

优美的理论

1828 年伽罗瓦开始研究方程论时，他决心要解决这个阿贝尔不曾完成的问题。阿贝尔在 1826 年得到的阿贝尔定理：

不是所有五次方程都有根式解。

伽罗瓦进一步指出哪些方程可根式解，哪些不可以根式解：

一个代数方程可根式解，当且仅当它对应的群是可解群。

伽罗瓦解决高次方程不可解的理论现在被称为伽罗瓦理论。在代数方程论方面，拉格朗日的工作具有历史性贡献，他在 1770 年前后，利用统一的方法（现在称为拉格朗日预解式方法），详细分析了二次、三次、四次方程的根式解法，提出了方程根的排列置换理论是解决问题的关键所在。他的方法对于求解低次方程卓有成效，但对一般的五次方程却没有任何明确的结果，致使他对高次方程的求解问题产生了怀疑。所以，他预见到也许五次及以上的一般方程没有根式解（但未能给出证明）。

在拉格朗日工作的影响下，高斯解决了一类特殊的代数方程的可解性问题，鲁菲尼于 1799 年首次证明了高于四次的一般方程不能用根式法求解，但其“证明”并不完善。后来阿贝尔于 1824-1826 年

伽罗瓦之墓

修正了鲁菲尼证明中的缺陷，严格证明了一般的五次或五次以上的代数方程不可能有根式解。

此外，阿贝尔在研究工作中需要解决两类问题：一是构造任意次数的代数可解方程；二是判定已知方程是否可用根式求解。阿贝尔试图全面刻画可用根式求解的方程的特性，但因早逝而没能完成这项工作，他只解决了第一类问题。几年后，伽罗瓦接过他的工作，用群的方法彻底解决了代数方程的可解性问题，创立了所谓的“伽罗瓦理论”。

伽罗瓦是通过改进拉格朗日的思想来研究可用根式求解的代数方程的特性的。因为对于一般方程来说，拉格朗日预解式的构造并不存在明确的方法，而对于较特殊的方程，要构造预解方程也需要一定的技巧。伽罗瓦的思想是设法绕开拉格朗日预解式，他把代数方程可解性理论问题转化为与方程相关的置换群及其子群结构的分析问题，根据置换群的结构确定方程根的结构，这是伽罗瓦工作的重大发现。

伽罗瓦系统研究方程根的排列置换性质，首次定义了置换群的概念，他认为了解置换群是解决方程理论问题的关键。在他 1831 年的论文中，伽罗瓦首次提出“群”这一名称，他把具有封闭性的置换的集合称为“群”。实际上，这只是抽象群的一条重要性质而已。

伽罗瓦的工作中引进了三个具有决定意义的概念：伽罗瓦群、正规子群、可解群，并利用它们三者之间的内在关系系统解决了代数方程可解性问题。

首先，伽罗瓦注意到每个方程都可以与一个置换群联系，即与它的根之间的某些置换组成的群联系，现在称之为伽罗瓦群。对于任一个取有理数值的关于根的多项式函数，伽罗瓦群中的每个置换都使这函数的值不变。反过来，如果伽罗瓦群中的每个置换都使这个函数的值不变，则这多项式函数的值是有理的。因此一个方程的伽罗瓦群完全体现了它的根（整体）的对称性。伽罗瓦为了刻画可用根式求解的代数方程的特性，将每个方程对

应一个域，即含有方程全部根的域（现在称之为方程的伽罗瓦域），这个域又对应一个群，即这个方程的伽罗瓦群。这个方程是否可用根式求解的关键是：这个方程的系数域是否可以经过有限次添加根式而扩张为根域。伽罗瓦经过认真研究，引入了域上的自同构群的概念，使域与群发生了联系，即建立了伽罗瓦域的子域与伽罗瓦子群之间的一一对应关系。

伽罗瓦的第二个重要概念是正规子群。它是伽罗瓦将二项方程作为辅助方程进行研究时引入的。正规子群概念的进入及其性质、作用的研究，是伽罗瓦工作的又一重大突破。利用它可以区分合成群与单群的概念；利用它的性质还可以判别已知方程能否转化为低次方程的可解性问题。他的思想方法大致是这样的：首先定义正规子群的概念，即群 G 的子群 N 叫做 G 的正规子群，是指对于每个 $g \in G$，$g^{-1}Ng=N$；其次是寻找极大正规子群列，确定极大正规子群列的一系列合成因子。如果一个群所生成的全部合成因子都是素数，就得到了伽罗瓦的第三个重要概念：可解群。

伽罗瓦所用的“可解群”术语非常恰当。他利用这一概念刻画了用根式解方程的特性，给出了一个方程可用根式解的判别准则：一个方程可用根式解的充要条件是这个方程的伽罗瓦群是可解群。虽然这一准则不能使一个确定方程的精确求解更为简单，但它确实提供了一些方法，可以用来得出低于五次的一般方程，以及二项方程和某些特殊类型方程的可解性的有关结果，还可以直接推论出高于四次的一般方程的不可解性。

伽罗瓦的这种思想方法与众

法国数学家若尔当（1838-1922）被称为使伽罗瓦理论显著增色的第一人

不同，他没有像他的前辈那样直接进行计算，而是提出群的概念，研究群的结构，从观念上突破了传统的思维方式，使人们从偏重计算的研究方式转变为用“群结构”观念思维的方式，并用这种观念构造新的证明。

伽罗瓦的奠基性工作及其思想中孕育的开创精神，并未得到他同时代人的充分赏识和理解，其原因不是人为的偏见，而是当时人们认识上的不足。伽罗瓦死后，他的全部数学著作由他的弟弟转给了舍瓦烈，但舍瓦烈找不到愿意出版这些著作的人。随着时间的推移，伽罗瓦的名字渐渐地被人们遗忘了。一直到 1846 年，即伽罗瓦去世后 14 年，刘维尔在其主办的《纯粹与应用数学》杂志上编辑出版了伽罗瓦的部分文章，并受到法、英、德、意大利等国数学家的关注。特别是法国数学家若尔当（M. E. C. Jordan, 1838-1922）1870 年出版的《置换与代数方程专论》首次清晰和完整地介绍了伽罗瓦的理论。此后，群论和伽罗瓦的工作开始慢慢归入数学的主流，不过那已经是伽罗瓦身后半个世纪的事情了。

阿贝尔、伽罗瓦的一生如同倏忽即逝的流星，但他们却在天际留下了永恒的光芒。也许是上天的有意安排，当他们与柯西、傅里叶这样的巨星相遇时，没有产生更为绚烂的碰撞，而是擦肩而过，徒令后人唏嘘。我们既无法设想阿贝尔和伽罗瓦在受到不公正对待时心中的愤恨，我们也很难想象如果柯西和傅里叶地下有知将作何感想！毕竟历史不能假设。但我们知道两百年来，伽罗瓦的传奇经历激励了一代又一代人为数学而奋斗；两百年过去了，伽罗瓦及其成就仍然横亘在现代数学的入口处，无数人瞻仰乃至膜拜，却从未被超越亦或取代。谁也说不清楚，伽罗瓦的一生，到底是天纵英才还是天妒英才？

作者介绍：

邓明立，河北师范大学副校长，数学教授，本刊编委。

山南海北

weibo.com 数学微博文摘 —— 选自新浪微博

除注明出处外，均选自《数学文化》微博 http://t.sina.com.cn/mathematicalculture

@数学文化：《数学之美挂历欣赏》：陈省身出资两万亲自设计了“数学之美”挂历；其中12幅画页分别为复数、正多面体、刘徽与祖冲之、圆周率的计算、高斯、圆锥曲线、双螺旋线、国际数学家大会、计算机的发展、分形、麦克斯韦方程和中国剩余定理。这是陈先生心目中的数学之美。

@数学文化：好书推荐：1979年一部获普利策大奖的书轰动了美国，它就是《GEB：一条永恒的金带》。书名中的G指伟大的数学、数理逻辑家哥德尔（Gödel），E指杰出画家埃舍尔（Escher），B是古典音乐大师巴赫（Bach）。这本书从巴赫的《音乐的奉献》联想到埃舍尔的绘画和哥德尔的不完全定理——它们的平行在哪儿呢？

@ 果壳网 :【慢科学，给科学多点时间】科学也进入了“大跃进”时期？未经推敲的数据就敢公布，理应淘汰的文章也能发表。一些科学家实在不能忍了，“慢科学运动”应运而生。他们主张减少科学出版数量、增加数据透明度，呼吁人们给科学留一点慢速增长的空间。

http://www.guokr.com/article/57496/

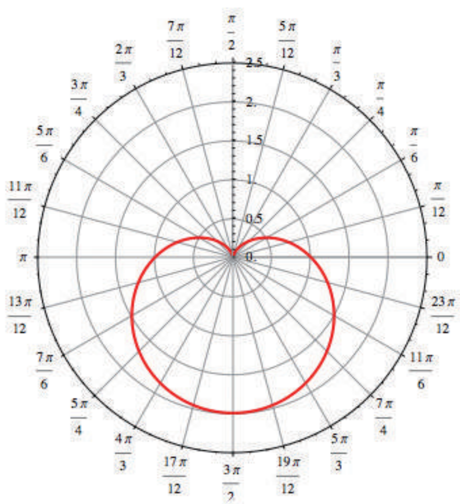
@ 木遥：两件我从前不知道的事，都是从我最近参加的 workshop 上的闲谈中听说的：1. 人们尽管在十九世纪就知道了 π 和 e 是超越数，但是直到今天，人们不但不知道 π+e 是不是超越数，甚至连它是不是无理数都不知道。（这最后一点是令我惊奇的。）2. 希尔伯特曾经说过：我们也许过几年就能得到一个黎曼猜想的证明，也许再过几十年就能证明费马大定理，但是我们也许再过一千年也不会知道 2 的 √2 次方是不是超越数。（最后这件事构成他的第七问题的一个特例。）结果，1934 年人们就证明了 2 的 √2 次方是超越数，上世纪末证明了费马大定理，而至今也没有证明黎曼猜想，并且暂时看不出任何希望。

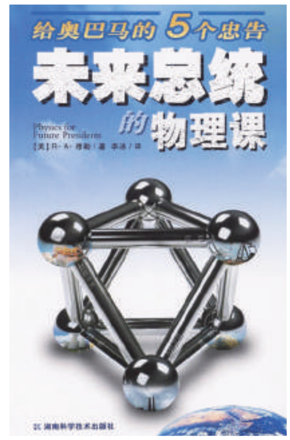
@ 数学文化：总统和数学：秘鲁前总统藤森很有意思：第一个亚洲人做了南美国家元首；大学学的是农业，毕业于秘鲁国立农业大学农业工程系；又是美国威斯康星大学数学硕士；当过数学老师；当过国立农大校长；还曾在电视台做过节目主持人。1990 年当选总统；连任之选击败前联合国秘书长德奎利亚尔。2000 年因竞选舞弊下台。

@ 数学文化：总统和数学：想过当数学家的美国总统是格兰特。他回忆在西点军校念书时，“理想是在母校拿个数学副教授；然后再跳槽到一个更牛的学校当个正教授”。但他发现“周围环境事与愿违”，于是离开象牙塔去打仗，当过南北战争联邦军总司令；因战功进了白宫。1878 年成为第一位到达中国的美国前总统；见了李鸿章。

@死理性派：【数学家的爱情故事】一年的七夕又来了，其实七夕在古时只能算是妇女节，但现在大多数人都把它当成情人节来过了。既然如此，那么死理性派也来谈谈风月吧。关于数学家的爱情，总是闪耀着智慧之光，让人着迷。

http://www.guokr.com/article/57837/





@奥卡姆剃刀：近日某部门请科普作者推荐好的科普书，我推荐的是《未来总统的物理课》，作者美国伯克利加州大学物理学教授穆勒博士，曾获“天才奖”，是美国政府首席顾问。我专门写了读书笔记（个别数字可能不准确）http://songshuhui.net/archives/45225#comments。环保非常重要，但其本质是个科学问题，这本书揭示了能源与环保的真相。

@数学文化：陈省身墓碑昨在南开揭幕：墓碑由两块石头组成，一块是汉白玉，另一块是贴在白色汉白玉上的黑色花岗岩。墓碑横截面为曲边三角形，象征高斯 - 邦内 - 陈（Gauss-Bonnet-Chern）公式的简单情形。正面如一块黑板，上半部是陈省身在美国任教时手书讲义中的高斯 - 邦内 - 陈公式。

http://news.163.com/11/0618/22/76S7AORE00014JB6.html

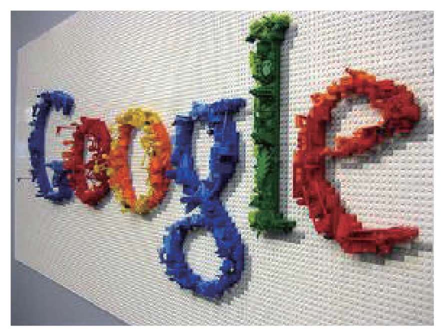
@蔡天新：陈省身墓，昨日摄于南开大学。数学家陈省身和夫人葬于河边的一块空地上，离南开南门仅 10 余米，旁边是省身楼和周恩来塑像。有 7、8 张石凳散落四周，常有同学老师闲坐其上，大理石的墓碑上除了名字、生卒年，还刻有他的一页数学手稿。

数字微博

@数学文化：何大一加州理工学院主修物理和数学，1974年以第一名成绩毕业。因发现分子生物学的突飞猛进将是科研的当红领域，于是到哈佛医学院读医，1978年医科毕业。他精通数学和概率，20出头时曾在赌场玩牌赢钱太多被“请”出赌场。因发明鸡尾酒疗法，获美国总统奖，入选美国《时代周刊》风云人物。

@rainskywalker：Google 恶搞苹果微软几大财团。Google 参与竞拍了北电的6,000多项专利，它的出价数额让其他竞争者大惑不解，但让数学爱好者们津津乐道。Google 的第一次出价是1,902,160,540美元——出自与孪生素数倒数之后收敛有关的布朗常数；接着 Google 开价2,614,972,128美元——源自 Meissel–Mertens 常数；最后 Google 提出了圆周率 Pi 相关的数——31.4159亿美元。知道为什么吗？ Google 的老板是数学系毕业的，要露一手。

http://www.cnbeta.com/articles/147659.htm



@李航博士：斯坦福大学统计教授 Diaconis 院士的一个著名研究成果是他证明洗扑克牌要洗七次才能洗干净 http://en.wikipedia.org/wiki/Persi_Diaconis 不愧是魔术师出身的数学家。听过 Diaconis 的讲演，他讲排序学习。印象深的是他很投入，讲演中会时不时地闭上眼睛，完全进入他的世界。

开心一刻

@数学文化：在老外的书店里，看到一本图文并茂的书，叫《Chinglish》，主要是中国大街的中英对照。比如乡村食斋译成 Eat the Room in the Village，拿铁咖啡译成 Coffee with iron，紧急出口译成 Exit for importance，小心坠落译成 Take care to fall，名烟名酒译成 Smoke famous name。大标语加配图让人叹为观止。

@catnobell：chinglish 太多了。火车上，贵阳被翻译为 expensive sun，汽车站入口翻译成 enter mouth…

@蔡澜：看过一部电影的字幕，有人说：are you kidding? 翻成：你是琪婷？对方回答：No. I am serious. 不，我是希丽斯。

@数学文化：近视的数学老师发脾气了。“最后一排的那个同学，二次方程的求根公式是什么？”“不知道。”“那二次方程几个根？”“不知道。”“上周五讲过的。你昨晚干什么了？”“昨晚和朋友喝啤酒了。”老师脸都紫了。“你还有脸告诉我！我问你怎样通过考试？”“噢，我不考试。我是电工，刚才来这儿修电灯的。”

@全球奇闻趣事：这是一孩子对数学帝写的词，名曰《江城子·葛军传奇》：拿到试卷透心凉，一紧张，公式忘，似曾相识，解法却不详，向量几何两茫茫，看数列，泪千行。两小时后出考场，见同窗，共悲伤，如此成绩无脸见爹娘，待到老师发卷日，去坟场，饮砒霜。

@数学文化：某老师语录：我们死都不怕还怕求导吗？然后开始讲授微分求导问题…

@4399 游戏：为什么屈原要在端午节那天死了？因为他害怕第二天要高考。文综不会，理综不会，数学英语不会，唯一语文有点把握，但写作文又规定“文体不限，诗歌除外”。

@TD-刘松磊：某台突发新闻直播，主播：“本台最新消息：我市发生一起恶性伤人事件，两名歹徒打伤我一百一十名干警，夺路而逃…”播完之后，主播自己也觉得纳闷，这歹徒也太嚣张啦，居然打伤了一百多个干警，还夺路而逃。再仔细一看：“…110 干警…”

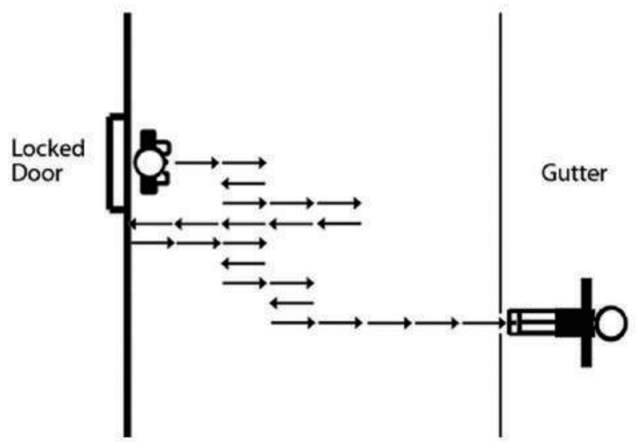
数学中竟然还有这样的定理！

果壳网

谁说数学是枯燥的？在数学里，有很多欢乐而又深刻的数学定理。这些充满生活气息的数学定理，不但深受数学家们的喜爱，在数学迷的圈子里也广为流传。

喝醉的小鸟

定理：喝醉的酒鬼总能找到回家的路，喝醉的小鸟则可能永远也回不了家。



假设有一条水平直线，从某个位置出发，每次有 50% 的概率向左走 1 米，有 50% 的概率向右走 1 米。按照这种方式无限地随机游走下去，最终能回到出发点的概率是多少？答案是 100% 。在一维随机游走过程中，只要时间足够长，我们最终总能回到出发点。

现在考虑一个喝醉的酒鬼，他在街道上随机游走。假设整个城市的街道呈网格状分布，酒鬼每走到一个十字路口，都会概率均等地选择一条路（包括自己来时的那条路）继续走下去。那么他最终能够回到出发点的概率是多少呢？答案也还是 100% 。刚开始，这个醉鬼可能会越走越远，但最后他总能找到回家路。

不过，醉酒的小鸟就没有这么幸运了。假如一只小鸟飞行时，每次

都从上、下、左、右、前、后中概率均等地选择一个方向，那么它很有可能永远也回不到出发点了。事实上，在三维网格中随机游走，最终能回到出发点的概率只有大约 34% 。

这个定理是著名数学家波利亚（George Pólya）在 1921 年证明的。随着维度的增加，回到出发点的概率将变得越来越低。在四维网格中随机游走，最终能回到出发点的概率是 19.3% ，而在八维空间中，这个概率只有 7.3% 。

“你在这里”

定理：把一张当地的地图平铺在地上，则总能在地图上找到一点，这个点下面的地上的点正好就是它在地图上所表示的位置。

也就是说，如果在商场的地板上画了一张整个商场的地图，那么你总能在地图上精确地作一个“你在这里”的标记。

1912 年，荷兰数学家布劳威尔（Luitzen Brouwer）证明了这么一个定理：假设 D 是某个圆盘中的点集，f 是一个从 D 到它自身的连续函数，则一定有一个点 x ，使得 $f(x) = x$ 。换句话说，让一个圆盘里的所有点做连续的运动，则总有一个点可以正好回到运动之前的位置。这个定理叫做布劳威尔不动点定理（Brouwer Fixed Point Theorem）。

除了上面的“地图定理”，布劳威尔不动点定理还有很多其他奇

妙的推论。如果取两张大小相同的纸，把其中一张纸揉成一团之后放在另一张纸上，根据布劳威尔不动点定理，纸团上一定存在一点，它正好位于下面那张纸的同一个点的正上方。

这个定理也可以扩展到三维空间中去：当你搅拌完咖啡后，一定能在咖啡中找到一个点，它在搅拌前后的位置相同（虽然这个点在搅拌过程中可能到过别的地方）。

不能抚平的毛球

定理：你永远不能理顺椰子上的毛。

想象一个表面长满毛的球体，你能把所有的毛全部梳平，不留下任何像鸡冠一样的一撮毛或者像头发一样的旋吗？拓扑学告诉你，这是办不到的。这叫做毛球定理（Hairy Ball Theorem），它也是由布劳威尔首先证明的。用数学语言来说就是，在一个球体表面，不可能存在连续的单位向量场。这个定理可以推广到更高维的空间：对于任意一个偶数维的球面，连续的单位向量场都是不存在的。

毛球定理在气象学上有一个有趣的应用：由于地球表面的风速和风向都是连续的，因此由毛球定理，地球上总会有一个风速为 0 的地方，也就是说气旋和风眼是不可避免的。

气候完全相同的另一端

定理：在任意时刻，地球上总存在对称的两点，他们的温度和大气压的值正好都相同。

波兰数学家乌拉姆（Stanislaw Marcin Ulam）曾经猜想，任意给定一个从 n 维球面到 n 维空间的连续函数，总能在球面上找到两个与球心相对称的点，他们的函数值是相同的。1933 年，波兰数学家博苏克（Karol Borsuk）证明了这个猜想，这就是拓扑学中的博苏克 - 乌拉姆定理（Borsuk-Ulam theorem）。

博苏克 - 乌拉姆定理有很多推论，其中一个推论就是，在地球上总存在对称的两点，他们的温度和大气压的值正好都相同（假设地球表面各地的温度差异和大气压差异是连续变化的）。这是因为，我们可以把温度值和大气压值所有可能的组合看成平面直角坐标系上的点，于是地球表面各点的温度和大气压变化情况就可以看作是二维球面到二维平面的函数，由博苏克 - 乌拉姆定理便可推出，一定存在两个函数值相等的对称点。

当 $n = 1$ 时，博苏克 - 乌拉姆定理则可以表述为，在任一时刻，地球的赤道上总存在温度相等的两个点。对于这个弱化版的推论，我们有一个非常直观的证明方法：假设赤道上有 A、B 两个人，他们站在关于

球心对称的位置上。如果此时他们所在地方的温度相同，问题就已经解决了。下面我们只需要考虑他们所在地点的温度一高一低的情况。不妨假设，A 所在的地方是 10 度，B 所在的地方是 20 度吧。现在，让两人以相同的速度相同的方向沿着赤道旅行，保持两人始终在对称的位置上。假设在此过程中，各地的温度均不变。旅行过程中，两人不断报出自己当地的温度。等到两人都环行赤道半周后，A 就到了原来 B 的位置，B 也到了 A 刚开始时的位置。在整个旅行过程中，A 所报的温度从 10 开始连续变化（有可能上下波动甚至超出 10 到 20 的范围），最终变成了 20；而 B 经历的温度则从 20 出发，最终连续变化到了 10。那么，他们所报的温度值在中间一定有“相交”的一刻，这样一来我们也就找到了赤道上两个温度相等的对称点。

平分火腿三明治

定理：任意给定一个火腿三明治，总有一刀能把它切开，使得火腿、奶酪和面包片恰好都被分成两等份。…

而且更有趣的是，这个定理的名字真的就叫做“火腿三明治定理”（Ham Sandwich Theorem）。它是由数学家亚瑟 • 斯通（Arthur Stone）和约翰 • 图基（John Tukey）在 1942 年证明的，在测度论中有着非常重要的意义。

火腿三明治定理可以扩展到 n 维的情况：如果在 n 维空间中有 n 个物体，那么总存在一个 $n-1$ 维的超平面，它能把每个物体都分成“体积”相等的两份。这些物体可以是任何形状，还可以是不连通的(比如面包片)，甚至可以是一些奇形怪状的点集，只要满足点集可测就行了。

感谢 @ 死理性派 新浪微博和果壳网为我刊供稿

关于折纸的若干事

木遥

1927 年，在德国国立建筑学院（即后世著名的包豪斯学院）的一次预备课程上，教师 Josef Albers（他战后成为耶鲁大学设计系的系主任）带着一卷报纸走进课堂，对学生们说道：

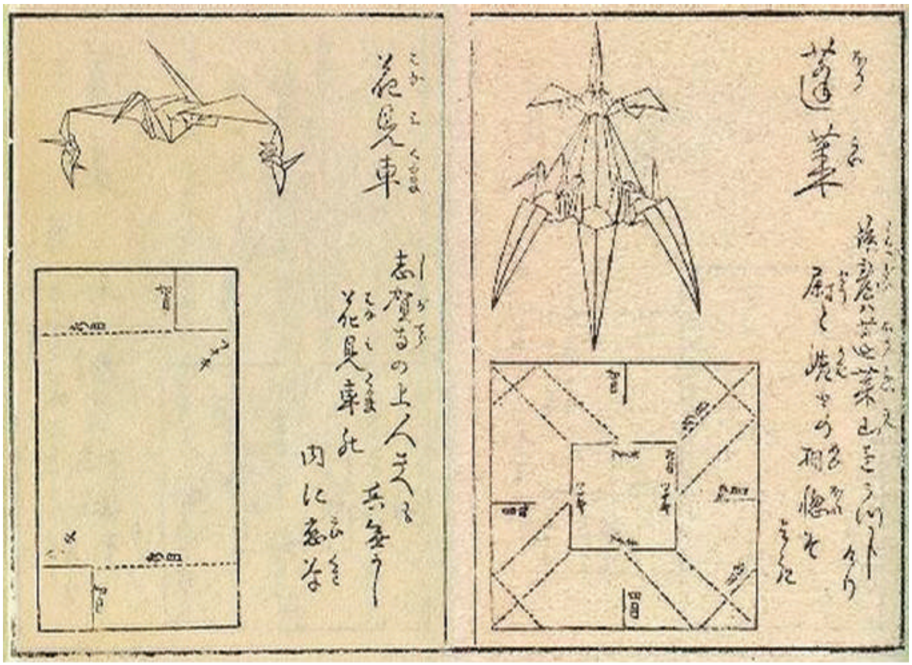
女士们先生们，我们很穷，没什么钱。我们浪费不起时间，也浪费不起材料。所有的艺术都得从材料上开始动手，所以我们必须先来看看我们能搞到什么材料，不要直接想着去制作什么成品。我们目前先考虑的应当是巧妙地利用材料，而不是美。我们的学习应当引出建设性的思考。我希望你们利用这些报纸，搞出一些你们现在还没见过的东西来。我希望你们尊重材料，合情合理地使用它们，保持它们的内在特征。如果你们能不用剪刀和胶水就更好了。

有一些当时的学生作业被保存了下来。其中一份是这样的：在一张圆形纸片上画出一系列同心圆，沿着它们作为折痕依次交替折成峰和谷。（考虑到折痕是曲线，这不太容易做到，但是并不是不可能的。）然后，一个出人意料的，呈现出马鞍形的漂亮结构出现了。

在人们目前所知道的文献里，这样的折纸结构还是第一次出现。

我们每个人都知道怎么折一个纸飞机或者纸鹤，不过恐怕也仅限于此。折纸毫无疑问是一门历史久远得已不可考证的艺术，在漫长的历史年代中，一些简单的折纸技术在中国和日本代代流传。1797 年日本三重县桑名市长円寺的僧人义道一円出版的《秘传千羽鹤折形》被认为是世界上第一本折纸书，记载了当时所知道的大量折纸图案。

人们意识到折纸有其技术上的复杂可能性，但研究其科学上的应用和研究价值，还是相当近期的事。二十世纪的日本折纸艺术家吉泽章被认为是现代折纸艺术的鼻祖。他一生发明出了超过五万种新的折纸图样，更重要的是，他建立了描述折纸技术的标准语言，至今仍旧



秘传千羽鹤折形影印

为全世界所通用。在海外，他被广泛看作是日本的一名文化大使。1983 年，日本天皇授予他旭日章，这是日本国民所能获得的最高荣誉勋章之一。

到上世纪八十年代，人们开始注意到折纸可以作为一个数学问题被加以研究。归根结底，一个折纸作品一旦被展开，就不外乎体现为一张纸片上的若干折痕，这些折痕满足某些特定的数学性质。反过来，给定一个人们心目中的折纸作品的模样，如何设计出相应的折痕，这在从前是一件完全依赖于折纸艺术家的经验的困难技巧，而今天却可以通过特定的方式转化为一种可以被标准流程所回答的数学问题。上世纪九十年代，美国科学家 Robert Lang 写出了一个名为 treemaker 的电脑程序，允许人们输入任何自己心目中想要的形状，然后电脑会计算出为了折出该形状所需的折痕图样。从那一天起，折纸艺术彻底进入了自由王国。

这件事情听起来像是科学家们完全心血来潮的业余爱好。可是大多数科学技术领域的发展所体现出的一条必然规律在这里也发生了作用：一种纯粹基于兴趣的，看起来毫无实际用途的研究，最终会以出乎人们意料的方式在现实生活中产生应用。2004 年，日本宇宙科学研究所在发射太阳能飞船时意识到，为外太空航行提供能源所需的太阳能板需要尽可能大的展开面积，而这些太阳能板又必须能够被折叠到尽可能小的状态才能在发射过程中装进狭小的飞船船舱。而折叠和展开的过程都必须尽可能简单，才能在无人环境中顺利完成，

吉泽章的折纸作品

以上三幅为 Lang 借助电脑创作出的作品

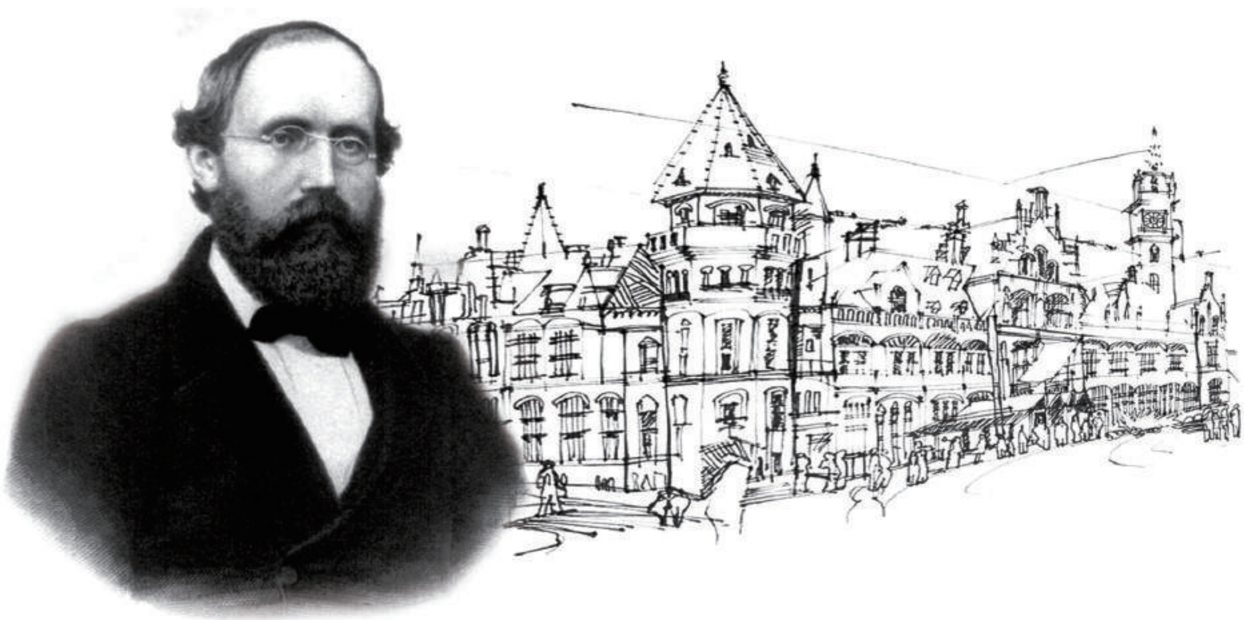
这正是折纸技术所要研究的问题。于是，东京大学宇宙科学研究所教授三浦公亮发明了一种折纸方法，提供了一个完美的解决方案。这一方案今天称为三浦折叠法，被广泛地应用于各种生产领域，甚至包括轮胎的胎纹设计。折纸技术还被用于设计人造血管支架，因为这种支架需要被折叠得足够小才能被放入血管，在到达指定位置后再被展开成一段人造血管，这一设计是由牛津大学的中国科学家由衷研究员带领的研究小组发明的。

在这个领域里事实上还存在着大量未能解决的问题，它甚至构成了数学中一个特别的分支：折纸数学。所有从事这一领域的科学家几乎一开始都只是被折纸过程所蕴含的简单而纯粹的美所吸引，但是事实上，他们的工作开启了一个科学和工程学的宝库。这一美妙的结果是人们始料不及的。

作者介绍：

木遥，北京大学数学系本科毕业，美国加州大学洛杉矶分校数学博士。是本刊特约撰稿人。

Riemann



黎曼猜想漫谈(五)

卢昌海

23 哈代定理

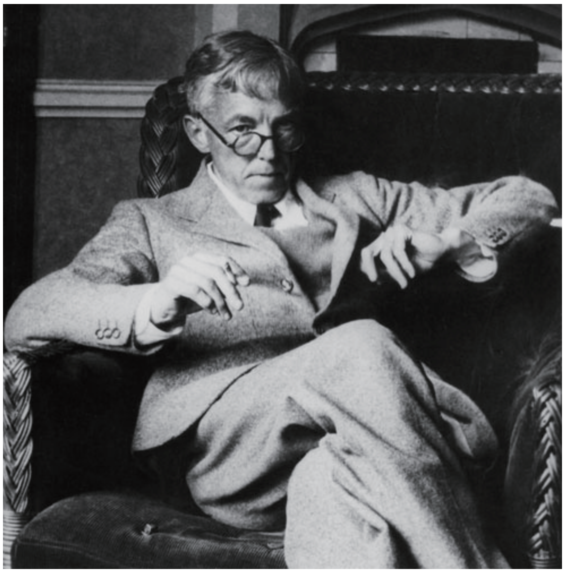
就在玻尔和兰道研究零点分布的同时，另一位为黎曼猜想而着迷的数学家——哈代——也没闲着。1914 年，即与玻尔 - 兰道定理的提出同年，哈代的研究也取得了突破性的结果。这便是我们在第 1 节中提到的那个“令欧洲大陆数学界为之震动的成就”。在黎曼猜想的研究中，这一结果被称为哈代定理：

哈代定理：黎曼 ζ 函数有无穷多个非平凡零点位于 critical line 上。

哈代一生对数学有着诸多的贡献，哈代定理这一名称有时也被用来表示复变函数论中的一个定理。

我们知道（详见第 22 节），无论阿达马，Vallée-Poussin，还是玻尔，兰道，在哈代之前人们所做的有关黎曼猜想的所有解析研究，都没能证明哪怕一个零点落在 critical line 上。那时人们所知的有关 critical line 上的零点的全部结果只有我们在第 8 节中提到的 1903 年格拉姆给出的 15 个零点以及 1914 年（与哈代定理同年）Backlund 计算的 79 个零点。全部都是零星计算，且涉及的零点数少得可怜。而忽然间，来自英伦岛上的哈代居然不动声色地一举把 critical line 上的零点数目扩大到了无穷，不仅远远超过 Backlund 的区区 79 个零点，也远远超过了后世所能给出的任何具体计算结果。因为无论用多高明的计算方法，无论用多强大的计算设备，也无论用多漫长的计算时间，任何具体计算所能验证的零点数目都是有限的，而无论多大的有限数量相对于无限来说都只是一个“零”。

Riemann



哈代
Godfrey Harold Hardy

因此哈代定理虽没有给出 critical line 上任何一个具体的零点数值，但它通过对这些零点的存在性证明为黎曼猜想提供了强有力的支持 [注 23.1]，这种支持从某种意义上讲超越了任何可能的具体计算。这样的一个结果出现在人们对黎曼 ζ 函数非平凡零点还知之甚少的 1914 年，而且还出现在与欧洲大陆数学界颇为疏离的英国，不能不令欧洲大陆的数学家们感到震动。

哈代定理的证明可以从一个有关 $\xi(s)$ 的积分表达式

$$\frac{2\xi(s)}{s(s-1)}=\int_0^{\infty}\left[G(x)-1-\frac{1}{x}\right]x^{-s}dx$$

入手。这里 $0<\mathrm{Re}(s)<1$，被积表达式中的函数 $G(x)$ 定义为：

$$G(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2x^2}.$$

我们在第 5 节中介绍过，$\xi(s)$ 的零点与黎曼 ζ 函数的非平凡零点重合，并且它是一个整函数，性质比黎曼 ζ 函数来得简单。在黎曼猜想的研究中这是一个十分重要的辅助函数。证明哈代定理的基本思路便是设法从上式中找出与 $\xi(s)$ 在 critical line 上的零点分布有关的约束条件来。为此，第一步是从上式中解出 $G(x)-1-1/x$。这与我们在第 4 节中介绍过的从 $\ln\zeta(s)$ 与 $J(x)$ 的积分表达式中解出 $J(x)$ 来是完全类似的，其结果也类似：

$$G(x)-1-\frac{1}{x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{2\xi(z)}{z(z-1)}x^{z-1}dz\ ,$$

其中积分上下限中的 a 满足 $0<a<1$。从 $G(x)$ 的定义中不难看到（读者可以自行证明）$G(x)$ 在复平面上 $-\pi/4<\mathrm{Im}\ \log(x)<\pi/4$ 的锲形区域内解析。进一步的研究还表明，在这一锲形区域的边界上 $G(x)$ 存在奇点，特别是，当 x 从锲形区域内逼近 $i^{1/2}$（即 $e^{\pi i/4}$）时，$G(x)$ 及其所有导数都趋于零。

另一方面，假如 $\xi(s)$ 在 critical line 上只有有限多个零点，那么只要 t 足够大，$\xi(1/2+it)$ 的符号就将保持恒定（请读者想一想这是为什么？）。换句话说，只要 t 足够大，$\xi(1/2+it)$ 要么是恒正函数，要么是恒负函数。由于 $\xi(s)$ 在 critical line 上为实数（参阅第 11 节），且 $\overline{\xi(s)}=\xi(\overline{s})$（参阅第 22 节），$\xi(1/2+it)$ 作为 t 的函数是一个偶函数，因此我们只需考虑 $t>0$ 的情形即可。显然，t 的这种大范围特征对上式右端的积分（积分限中的 a 取为 1/2）会产生可观的影响。这种影响究竟有多大呢？哈代经过研究发现，它足以破坏 $G(x)$ 在 $x\to i^{1/2}$ 时的所有导数都趋于零这一结果。这就表明 $\xi(s)$ 在 critical line 上不可能只有有限多个零点！ 而这正是哈代定理。

限于篇幅，我们略去了证明，概括的讲，它主要包括三个步骤：1.（容易）消去左端的 $-1-1/x$ 及右端被积函数中的 $1/z(z-1)$ 以简化表达式。具体做法是用算符 $x(d^2/dx^2)x$ 作用于 $G(x)$ 的积分表达式的两端。2.（容易）证明简化后的左端 $H(x)=x(d^2/dx^2)xG(x)$ 在

注 23.1

在历史上，这种存在性证明由于其非构造性的特征，曾被以 L.E.J.Brouwer（1881-1966），赫尔曼·外尔，A.Heyting（1898-1980）等为代表的数学哲学“三大流派”之一的直觉主义 (Intuitionism) 所排斥。但是存在性证明是数学中极其重要的方法，在很大程度上体现了逻辑与推理的力量，就像一个高明的侦探不需要跑到罪犯家中将之拿下就可以断定谁是凶手。直觉主义抛弃的东西实在太多，最后就连代表人物之一的外尔也不得不承认，在直觉主义中“数学家们痛苦地看着数学大厦中自己深信基础坚实的许多部分在他们的眼前化为了迷雾”。

Riemann

$x \to i^{1/2}$ 时具有与 $G(x)$ 一样的行为，即所有导数都趋于零。3.（较难）证明 $\xi(1/2+it)$ 在 t 很大时具有恒定的符号对 $2\xi(z)x^{z-1}$ 的积分产生的贡献足以使得 $H(x)$ 在 $x \to i^{1/2}$ 时的高阶导数无法为零。

哈代定理在研究黎曼猜想的征程上无疑是一个了不起的成就。但是它距离目标究竟还有多远呢？ 却是谁也答不上来。从字面上看，黎曼 ζ 函数共有无穷多个非平凡零点，而哈代定理所说的正是有无穷多个非平凡零点位于 critical line 上，两者似乎相差不多。可惜的是，"无穷"这一概念却是数学中最微妙的概念之一，两个"无穷"之间非但未见得相同，简直可以相距要多遥远有多遥远，甚至无穷远！ 因此为了知道我们离目标究竟还有多远，我们还需要比哈代定理更具体的结果。

幸运的是，这样的结果很快就有了，离哈代定理的出现仅仅相隔了七个年头。在研究黎曼定理的征程中，时间动辄就以几十年计，因此七年应该算是很短的时间。这回出现在英雄榜上的人物除了哈代外，还有李特尔伍德（John Edensor Littlewood, 1885-1977）。

24 哈代－李特尔伍德定理

哈代一生除了对数学本身的卓越贡献外，还有两段与他人合作的经历在数学史上被传为佳话。其中一段是与印度数学奇才拉马努金（Srinivasa Aiyangar Ramanujan, 1887-1920）的传奇合作，另一段便是与李特尔伍德。李特尔伍德与哈代一样，是英国本土的数学家。我们曾在第 1 节中介绍过，英国的数学界自牛顿 - 莱布尼茨论战以来渐渐与欧洲大陆的数学界孤立了开来。1906 年，当李特尔伍德还是剑桥大学三一学院（Trinity College）的一位年轻学生的时候，这种孤立所导致的一个有趣的后果落到了他的头上。他当时的导师巴恩斯（Ernest William Barnes, 1874-1953）在那年的暑期前随手写给了他一个函数，轻描淡写地告诉他说这叫做 ζ 函数，让他研究研究这个函数的零点位置。初出茅庐的李特尔伍德不知 ζ 函数为何方神圣，领命而去倒也罢了，但巴恩斯居然能漫不经心地把这样的课题交给当时还是"菜鸟"（尽管算是比较厉害的"菜鸟"）的李特尔伍德，说明他对欧洲大陆在近半个世纪的时间里对这一函数的研究，以及由此所显示的这一课题的艰深程度基本是一无所知。

不过巴恩斯虽有对"敌情"失察之过，把任务交给李特尔伍德却是找对了人，因为李特尔伍德很快就成为了英国第一流的数学家，而在这过程中巴恩斯所给的这个课题不无促进之功。若干年后，当李特尔伍德终于体会到黎曼猜想的艰深程度，甚至开始怀疑其正确性（参阅第 9 节）的时候，他并没有后悔当时接下了这一课题，因为一位真正优秀的数学家在面对一个绝顶难题的时候，往往会被激发出最为敏锐的数学灵感。

拿到课题后的第二年，李特尔伍德就发现这个 ζ 函数与素数分布之间存在着紧密的关联。对于欧洲大陆的数学家来说，这种关联已不足为奇，因为它早在四十八年前就被黎曼发现了。但在闭塞的英国数学界，欧洲大陆在这方面的工作当时还鲜为人知。这其中恰好与李特尔伍德同在三一学院的哈代是一个例外。尽管李特尔伍德的发现不是原创的，但他能独立地重复黎曼的部分工作，其功力之不凡还是给年长的哈代留下了深刻的印象。此后李特尔伍德在曼彻斯特大学教了三年书，1910 他获得三一学院的教职后重返剑桥，由此开始了与哈代长达三十七年亲密无间的合作生涯，直至 1947 年哈代去世为止。

李特尔伍德
John Edensor Littlewood

Riemann

哈代与李特尔伍德的合作堪称数学史上的典范。在他们合作的极盛时期，欧洲学术界流传着许多有关他们的善意的玩笑。比如玻尔（玻尔 - 兰道定理中的玻尔）曾开玩笑地说当时英国共有三位第一流的数学家：一位是哈代，一位是李特尔伍德，还有一位是哈代 - 李特尔伍德。而与之截然相反的另一个玩笑则是说李特尔伍德根本就不存在，是哈代为了自己的文章一旦出现错误时可以有替罪羊而杜撰出来的人物。据说兰道（玻尔 - 兰道定理中的兰道）还专程从德国跑到英国来证实李特尔伍德的存在性。

哈代 - 李特尔伍德对 critical line 上零点的研究起点与哈代定理相同，也是上面提到的 $G(x)$ 与 $\xi(s)$ 之间的积分表达式。在哈代定理的证明中，如我们在上文及注释中看到的，着眼点是 $2\xi(s)x^s/s(s-1)$ 在整个 critical line 上的积分。这一着眼点其实已经为哈代定理的结果埋下了伏笔，因为既然研究的是整个 critical line 上的积分，所得到的当然也就只是有关整个 critical line 上零点总数的笼统结果。为了得到能与黎曼猜想对零点的描述相比较的结果，我们需要的不仅是对整个 critical line 上零点总数的研究，更重要的是要了解 critical line 上位于区间 $0\le \mathrm{Im}(s)\le T$ 的零点数目。为此，哈代 - 李特尔伍德研究了 $2\xi(s)x^s/s(s-1)$ 在 critical line 上任一区间的积分，即：

$$I(x,s,k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-ik}^{s+ik}\frac{2\xi(z)}{z(z-1)}x^{z-1}dz\ ,$$

其中 $\mathrm{Re}(s)=1/2$。通过对这一积分的细致研究，哈代与李特尔伍德发现 critical line 上不仅有无穷多个，而且其趋于无穷的速度起码是 KT（其中 K 为大于零的常数）。他们发表于 1921 年的这一结果在数学界并无确切的名称，我们在这里将它称为哈代 - 李特尔伍德定理 [注 24.1]，它的完整表述如下：

哈代 - 李特尔伍德定理：存在常数 $K>0$ 及 $T_0>0$，使得对所有 $T>T_0$，黎曼 ζ 函数在 critical line 上 $0\le \mathrm{Im}(s)\le T$ 的区间内的非平凡零点数目不小于 KT。

那么哈代 - 李特尔伍德定理距离目标——黎曼猜想——有多远呢？我们可以回忆一下第 5 节中黎曼的三个命题中的第一个，即：在 $0\le \mathrm{Im}(s)\le T$ 的区间内（不限于 critical line 上），黎曼 ζ 函数的零点总数大约为 $(T/2\pi)\ln(T/2\pi)-(T/2\pi)$。这个命题于 1905 年被曼戈尔特（H. C. F. von Mangoldt，1854-1925）所证明，这也是黎曼的三个命题中迄今唯一得到证明的命题。与这个命题相比，我们可以看到一个令人沮丧的结果，那就是哈代 - 李特尔伍德定理所给出的 critical line 上零点下限的渐近估计相对于零点总数来说，其渐近比例为零！真是不比不知道，一比吓一跳，原来花了这么大功夫所得到的这些结果从纯比例的角度看竟是如此地“微不足道”。这就是我们与黎曼猜想的距离，这就是黎曼猜想的难度。

但尽管如此，哈代 - 李特尔伍德定理是有关黎曼 ζ 函数非平凡零点在 critical line 上具体分布的第一个解析结果。在当时也是唯一一个这样的结果。这一纪录总共维持了 21 年，直到 1942 年才被塞尔伯格所打破。

25 数学世界的独行侠

在二十世纪的数学家中，塞尔伯格（Atle Selberg, 1917-2007）是非常独特的一位。当数学的发展使得数学家之间的相互合作变得日益频繁的时候，塞尔伯格却始终维持了一种古老的独行侠姿态，他所走的是一条独自探索的道路。塞尔伯格于 1917 年

注 24.1

在数学界，以哈代 - 李特尔伍德命名的最主要的定理是 Hardy-Littlewood Maximal Theorem，但这一定理并不经常被简称为哈代 - 李特尔伍德定理，因此“哈代 - 李特尔伍德定理”这一名称可算是半个空缺，这里我们就用他们在黎曼猜想领域内的这一成就来填补这半个空缺。

注 25.1

这一公式叫做哈代 - 拉马努金公式，它所描述的是将一个任意正整数分解为正整数之和的可能方式数。但是哈代 - 拉马努金公式虽然非常复杂，却仍只是一个近似的结果。Rademacher 及塞尔伯格所做的是将它改进为精确的结果。

Riemann

塞尔伯格
Atle Selberg

出生在寒冷的北欧国家挪威。年少的时侯他常常一个人独自静坐在他父亲的私人图书室里阅读数学书籍。那段经历与他后来近乎孤立的研究风格遥相呼应。就在那时，他接触到了有关印度数学奇才拉马努金的故事。那些故事，以及拉马努金的那些有如神来之笔的奇妙公式深深地吸引了他。随着阅读的深入，塞尔伯格自己的数学天赋也渐渐显现了出来。在二十岁那年，他已经可以对哈代与拉马努金的一个著名的公式作出改进[注 25.1]。遗憾的是，同样的结果在一年之前已经由德国数学家 Hans Rademacher（1892-1969）做出并发表了。

在二战期间,欧洲的许多科学家被迫离开了家园，整个欧洲的科学界变得沉寂凋零。但塞尔伯格仍然留在了挪威，在奥斯陆大学（University of Oslo）独自从事数学研究。随着战事的深入，学校里不仅人越来越少，到后来连外界的学术期刊也无法送达了。塞尔伯格与数学界的交流彻底地中断了。但这种在常人看来十分可怕的孤立，在塞尔伯格眼里却有一种全然不同的感觉。他后来回忆当时的情形时说:“这就像处在一座监狱里，你与世隔绝了，但你显然有机会把注意力集中在自己的想法上，而不会因其他人的所作所为而分心，从这个意义上讲我觉得那种情形对于我的研究来说有许多有利的方面”。这个道理虽然浅显，但真正能忍受这种孤立的环境，并善加利用的人却是少之又少，塞尔伯格是其中之一。

战争结束后的 1946 年，塞尔伯格应邀出席在丹麦首都哥本哈根举行的斯堪的纳维亚数学家大会（Scandinavian Congress of Mathematicians），并做了报告，向数学界介绍他在战争期间所做的工作。这其中最重要的就是我们将在下节中介绍的他在黎曼猜想方面的成就。在那段战火纷飞、纳粹横行的黑暗岁月里，欧洲的数学界几乎分崩离析，数学家们走的走，散的散，下岗的下岗、参战的参战，真正留在本土从事研究且作出重大贡献的人很少，以至于玻尔（Harald Bohr）曾对来访的美国同行戏称说战时整个欧洲的数学新闻可以归结为一个词，那就是塞尔伯格！

塞尔伯格的卓越贡献一经曝光很快引起了著名的美国“猎头公司”普林斯顿高等研究所的注意。普林斯顿高等研究所我们曾在第 17 节中提到过。与那些每一条林荫道、每一间咖啡屋都散发着悠远历史的欧洲学术之都相比，创建于 1930 年的高等研究所显得十分年轻。但它却在极短的时间内声誉鹊起，成为了世界级的学术中心。这一崛起在很大程度上得益于它在二战期间吸引了从欧洲来到美国的许多第一流的学者，这其中包括像爱因斯坦（Albert Einstein, 1879-1955）与哥德尔（Kurt Gödel, 1906-1978）这样的绝世高手。战争结束后，在高等研究所任教的赫尔曼•外尔（Hermann Weyl, 1885-1955）向塞尔伯格发出了邀请。外尔本人就是被普林斯顿高等研究所“猎取”的来自欧洲的顶尖数学家，他曾是希尔伯特在哥廷根大学的继任者，但外尔的妻子是犹太人，这使他们在德国难以立足。塞尔伯格接受了外尔的邀请，于 1947 年来到高等研究所，1949 年成为正式成员。1950 年，塞尔伯格因其在黎曼猜想及其它领域的杰出贡献，与法国数学家洛朗•施瓦茨（Laurent Schwartz , 1915-2002）共同获得了数学界的最高奖：菲尔兹奖。

菲尔兹奖委员会对塞尔伯格获奖贡献的描述是：发展推广了 Viggo Brun 的筛法（The Sieve Methods）；获得了有关黎曼 ζ 函数零点的重要结果；（与保罗•埃尔德什一起）给出了一个素数定理的初等证明，以及对任意算术序列中素数研究的推广。

Riemann

普林斯顿高等研究所是学术交流与合作的天堂，它与战时奥斯陆大学的与世隔绝有着天壤之别。但塞尔伯格的研究风格并没有因环境而变化，他一如既往地走着一条孤立研究的道路 [注 25.2]，并且和当年的高斯一样，他有许多工作没有发表。年轻的时候，他的孤立使他未能及早发现 Rademacher 已经发表的文章，以至于重复了后者的工作。如今，在他的声誉如日中天时，他的孤立却让其他数学家的心里忐忑了起来，担心自己辛苦劳作的结果是在重复塞尔伯格早已完成的工作。在塞尔伯格落户普林斯顿二十几年后的一天，正是这种担忧让年轻的蒙特哥麦利踏上了普林斯顿之旅，从而有了我们在第 17 节中叙述过的那个数学与物理交汇的动人故事。

26 临界线定理

对于我们这个系列来说，在塞尔伯格的工作中最重要的，显然是他有关黎曼 ζ 函数非平凡零点的研究。他的这一研究是在二战期间进行的。出于对拉马努金的兴趣，塞尔伯格对剑桥大学的“三剑客”：拉马努金、哈代、及李特尔伍德的工作进行了深入的研究。其中哈代与李特尔伍德所证明的有关黎曼 ζ 函数非平凡零点分布的哈代 - 李特尔伍德定理引起了他极大的兴趣。哈代 - 李特尔伍德定理是一个非常精彩的定理，但它的结果却太弱，因为——如我们在第 24 节中所说——它所能确立的位于 critical line 上的零点数目相对于零点总数来说，其渐近比例等于零。

塞尔伯格想要做的是改进这一结果。

哈代与李特尔伍德都是英国顶尖的数学家，虽然他们的结果距离解决黎曼猜想还非常遥远，但他们的这一工作思虑周详，推理严谨，几乎没有留下任何空隙让别人去填补。他们所用的方法已经被推到了极致，这一点哈代与李特尔伍德自己也很清楚，在论文中他们明确表示用这一方法已经难以取得进一步的结果。

因此，要想改进哈代与李特尔伍德的结果，就必须突破他们所用的方法。我们知道（详见第 23、24 节），在哈代与李特尔伍德所用的方法中很关键的部分就是对 $2\xi(s)x^s/s(s-1)$ 的积分进行研究。哈代最初研究的是 $2\xi(s)x^s/s(s-1)$ 在 $(1/2-i\infty, 1/2+i\infty)$ 的积分，而在哈代与李特尔伍德的合作研究中，为了得到 critical line 上零点分布的细致结果，这一积分范围被细化成了 critical line 上的任意区间 $(s-ik, s+ik)$，其中 $\mathrm{Re}(s)=1/2$。从积分区间的角度讲，这一推广已经达到了极致。

那么想要突破哈代与李特尔伍德的方法，该从哪里下手呢？塞尔伯格把目光盯在了被积函数上。塞尔伯格发现，如果我们用一个适当的函数对哈代与李特尔伍德所用的被积函数 $2\xi(s)x^s/s(s-1)$ 进行“调制”，就有可能使对其积分的研究变得更为精准。为此他把自己的注意力放在一个更普遍的积分：

$$I(x,s,k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-ik}^{s+ik}\frac{2\xi(z)}{z(z-1)}\varphi(z)\varphi^*(z)x^{z-1}dz$$

上。这个积分与哈代与李特尔伍德所用的积分相比多了一个被积因子 $\varphi(z)\varphi^*(z)$，这个因子就是塞尔伯格引进的调制函数。

那么什么样的调制函数比较有利于对这个积分进行研究呢？塞尔伯格认为应该选一个能够对 $\xi(z)$ 在零点附近的行为进行某种控制的函数。这种函数的一个比较容易想到的选择是 $\varphi(z)=[\zeta(z)]^{-1/2}$。由于 $\zeta(z)$ 与 $\xi(z)$ 具有同样的零点，因此用这个调制函数可以完全消去 $\xi(z)$ 的零点。但这个选择有一个不利之处，那就是它在 $z=1$ 处具有奇异性。为了避免这一奇异性对 $\varphi(z)$ 的解析延拓造成麻烦，塞尔伯格对 $[\zeta(z)]^{-1/2}$ 的展开式 $[\zeta(z)]^{-1/2}=\Sigma\alpha_n n^{-z}$ 进行了截断处理，他引进了一个新的级数 $\varphi(z)=\Sigma\beta_n n^{-z}$。这个新级数的系数 β_n 在 n 小于等于某个大数 N 的时候定义为 $[1-\ln(n)/\ln(N)]\alpha_n$，而在 $n>N$ 时则为零。这样 $\varphi(z)$ 至多只有 $N+1$ 项，是一个有限级数，从而对所有的 z 都解析。另一方面，在 N 很大时它是对 $[\zeta(z)]^{-1/2}$ 的近似，因此通过对 N 进行调节，塞尔伯格可以对 $\zeta(z)$ 在零点

注 25.2

塞尔伯格一生只有一篇论文是与人合作的，合作者是我们在第十七节中提到的那位促成了蒙特哥麦利与戴森会面的印度数学家周拉（周拉的交际能力之强由此可见一斑）。除此之外，即使在菲尔兹奖委员会提到的他与埃尔德什一起得到的素数定理的初等证明中，他也不曾与埃尔德什合写论文（这件事情后来还不幸演变成他与埃尔德什之间一段很不愉快的经历，这是题外话）。

附近的行为进行某种控制。

这一调制函数果然不负厚望，通过它的辅助，塞尔伯格经过复杂的计算与推理，终于证明了一个比哈代 - 李特尔伍德定理强得多的结果。这个结果被称为临界线定理（Critical line Theorem）：

> **临界线定理**：*存在常数 $K>0$ 及 $T_0>0$，使得对所有 $T>T_0$，黎曼 ζ 函数在 critical line 上 $0\le\mathrm{Im}(s)\le T$ 的区间内的非平凡零点数目不小于 $KT\ln(T)$。*

有的读者可能会问：这个定理为什么不叫做塞尔伯格定理？那是因为“塞尔伯格定理”这一名称已经名花有主了。不过即便如此，人们有时也的确仍把临界线定理称为塞尔伯格定理。

塞尔伯格得到这一结果是在 1942 年，当时欧洲的战火仍在燃烧，奥斯陆大学仍处于与世隔绝之中。外界的数学家们固然大都不知道他的这一重大结果，塞尔伯格本人也不确定自己是否又会像当年改进哈代与拉马努金的工作那样重复别人已经完成的东西。战争一结束，当他听说邻近的特隆赫姆理工学院（Institute of Technology in Trondheim）已经收到了在战争期间无法送达的数学杂志，就专程前往，花了一星期的时间查阅文献。这一次他没有失望，二十一年来数学界对黎曼 ζ 函数非平凡零点的解析研究基本上仍停留在哈代 - 李特尔伍德定理的水平上，孤独的塞尔伯格远远地走到了时代的前面。

那么塞尔伯格的这一临界线定理究竟强到什么程度呢，让我们再回忆一下在第 5 节中提到，并在后面章节中屡次被引述的黎曼的三个命题中的第一个（也是唯一一个被证明的）命题：在 $0<\mathrm{Im}(s)<T$ 的区间内（不限于 critical line 上），黎曼 ζ 函数的零点总数大约为 $(T/2\pi)\ln(T/2\pi)-(T/2\pi)$。将这个结果与塞尔伯格的临界线定理相比较，显然可以看到（请读者自行证明）：**临界线定理表明黎曼 ζ 函数在 critical line 上的零点在全部非平凡零点中所占的比例大于零**！就这样，从玻尔、兰道到哈代、李特尔伍德，再到塞尔伯格，经过一系列艰辛的解析研究，数学家们所确定的位于 critical line 上的零点数目终于超过了 0%，达到了一个“看得见”的比例，这在黎曼猜想的研究中是一个重要的里程碑。

27 Levinson 方法

塞尔伯格的临界线定理表明 critical line 上的非平凡零点所占比例大于零。那么这个比例究竟是多少呢？塞尔伯格在论文中没有给出具体的数值。据说他曾经计算过这一比例，得到的结果是 5%-10%[注 27.1]。另外，中国数学家闵嗣鹤（1913-1973）在牛津大学留学（1945-1947）时曾在博士论文中计算过这一比例，得到了一个很小的数值。这些结果或是太小，或是没有公开发表，在数学界鲜有反响。总的来说，塞尔伯格的结果更多地是被视为一种定性的结果：即首次证明了位于 critical line 上的零点占全体非平凡零点的比例大于零。

有关这一比例的具体计算时隔二十多年才有了突破性的进展。这一进展是由美国数学家列文森（Norman Levinson, 1912-1975）做出的。列文森小时候家境非常贫寒，父亲是鞋厂工人，母亲目不识丁且没有工作，但他在十七岁那年成功考入了著名的高等学府麻省理工学院（MIT）。在麻省理工的前五年，列文森在电子工程系就读，但他选修了几乎所有的数学系研究生课程，并得到著名数学家诺伯特 • 维纳（Norbert Wiener, 1894-1964）的赏识。1934 年列文森转入数学系，这时他的水平已完全具备了数学博士的资格。于是维纳帮他申请了一笔奖学金，让他去哈代所在的剑桥大学访问一年。次年列文森返回麻省理工，立即拿到了博士学位。列文森在学术生涯的早期先后经历了美国的经济大萧条及麦卡锡主义（McCarthyism）的盛行，几次面临放弃学术研究的境况，但最终还是幸运地度过了难关。

列文森在傅里叶变换、复分析、调和分析、随机分析、非线性微分及积分方程等领域都做出过杰出的贡献。他二十八岁时就在美国数学学会出版了有关傅里叶变换的专著，这通常是资深数学家才有机会获得的殊荣；他在非线性微分方程领域的工作于 1953 年

注 27.1

也有说是 1% 左右。这种比例指的都是下界，5%-10% 指的是至少有 5%-10% 的非平凡零点在 critical line 上。

Riemann

列文森
Norman Levinson

获得了美国数学学会每五年颁发一次的博谢纪念奖（Bôcher Memorial Prize）；他 1955 年完成的著作《常微分方程理论》一出版就成为这一领域的经典著作。但他最令世人惊叹的则是在年过花甲，生命行将走到尽头的时候忽然在黎曼猜想的研究中获得了重大突破，给出了 critical line 上零点比例的一个相当可观的下界估计。

列文森对零点比例的研究采取了与哈代、李特尔伍德及塞尔伯格十分不同的方法。他的基本思路来源于 $\zeta(s)$ 与其导数 $\zeta'(s)$ 的零点分布之间的关联。早在 1934 年，Andreas Speiser（1885-1970）就曾证明过黎曼猜想等价于 $\zeta'(s)$ 在 $0<\mathrm{Re}(s)<1/2$ 上没有零点。1974 年列文森与蒙特哥麦利合作证明了 Speiser 结果的一个定量版本，那就是 $\zeta'(s)$ 在 $\{-1<\mathrm{Re}(s)<1/2, T_1<\mathrm{Im}(s)<T_2\}$ 内的零点数目与 $\zeta(s)$ 在 $\{0<\mathrm{Re}(s)<1/2, T_1<\mathrm{Im}(s)<T_2\}$ 内的零点数目之比渐近于 1。有了这一结果，人们就可以通过研究 $\zeta'(s)$ 的零点分布得到有关 $\zeta(s)$ 在 critical line 上的零点数目的信息 [注 27.2]，这正是列文森所做的。与上述结果的发表同年，列文森通过这种方法得到了对 critical line 上零点比例的估计。

列文森的计算在刚开始的时侯给出了一个非常乐观的结果：98.6%！他把自己的一份手稿交给了同事 Gian-Carlo Rota（1932-1999），并且幽默地宣称自己可以把这个比例提高到 100%，但他要把剩下的 1.4% 留给读者去做。Rota 信以为真，便开始传播“列文森证明了黎曼猜想”的消息。这很快被证明是一个双重错误：首先，在列文森的方法中，即使真的把比例提高到 100%，也不等于证明了黎曼猜想（请读者结合 [注 27.3] 思考一下这是为什么）；其次，很快就有人在列文森的证明中发现了错误。幸运的是，这一错误并没有彻底摧毁列文森的努力，只不过那个奇迹般的 98.6% 掉落尘埃变成了 34%。列文森最终把自己论文的标题定为：“黎曼 Zeta 函数超过三分之一的零点位于 $\sigma=1/2$”。这里的 σ 就是 $\mathrm{Re}(s)$。如果我们用 $N_0(T)$ 表示 critical line 上区间 $0<\mathrm{Im}(s)<T$ 内的零点数目，而 $N(T)$ 表示 critical strip 上区间 $0<\mathrm{Im}(s)<T$ 内的零点数目（这也就是满足 $0<\mathrm{Im}(s)<T$ 的全部非平凡零点的数目），则列文森的结果可以表述为 [注 27.3]：

> **列文森临界线定理**：存在常数 $T_0>0$，使得对所有 $T>T_0$，$N_0(T) \geq (1/3)\,N(T)$。

列文森的这一结果是继塞尔伯格之后在这一领域中的又一个重大进展，它不仅为 critical line 上的零点比例给出了一个相当可观的下界，更重要的是，列文森的这种把 $\zeta(s)$ 与 $\zeta'(s)$ 的零点分布联合起来进行研究的方法——被称为列文森方法——为许多后续研究奠定了基础。

注 27.2

确切地讲，从上述结果中得到的是有关 $\zeta(s)$ 在 critical line 之外——即 $0<\mathrm{Re}(s)<1/2$——的零点数目的信息（请读者想一想我们为什么不提 $1/2<\mathrm{Re}(s)<1$）。但由此可以很容易地推出有关 critical line 上零点数目的信息。

注 27.3

与塞尔伯格的情形类似，“Levinson 定理”这一名称也已名花有主，在本文中我们把形如 $N_0(T) \geq C\,N(T)$ 的定理均称为临界线定理，除对塞尔伯格的结果不加冠语外，其余的一律以证明者的姓氏来区分。另外需要指出的是，Levinson 的原始论文所讨论的比例是针对 $N_0(T+U)-N_0(T)$ 与 $N(T+U)-N(T)$（U 是一个与 T 有关的正数），而不是直接针对 $N_0(T)$ 与 $N(T)$ 的，不过在比例小于 100% 时这两者等价（比例等于 100% 时则不等价）。

Riemann

28 艰难推进

运用列文森方法进行零点研究的第一个后续工作是由他本人做出的。1975 年，即紧接着上述研究的那一年，列文森把 critical line 上零点比例的下界估计提高到了 0.3474。这虽然是一个很小的推进，但这种计算每一个都异常繁复，而列文森当时的身体状况已经极差，他能够完成这样的计算委实是一个奇迹。事实上那已是他生命中的最后一个年头，那一年的十月十日列文森因患脑瘤在他的学术故乡波士顿（麻省理工所在地）去世。

在列文森之后，数学家们艰难地推进着列文森的结果，但速度极其缓慢。1980 年中国数学家楼世拓与姚琪证明了 $N_0(T) \geq 0.35\ N(T)$；三年后康瑞（Brian Conrey）证明了 $N_0(T) \geq 0.3685\ N(T)$。这些都是在小数点后的第二位数字上做手脚，1989 年康瑞终于撼动了小数点后的第一位数字，他把比例系数提高到了 0.4，即：

> **Conrey 临界线定理**：存在常数 $T_0>0$，使得对所有 $T>T_0$，$N_0(T) \geq (2/5)\ N(T)$。

这是迄今为止数学家们在这一方向上获得的最好结果。康瑞认为自己的证明还有改进的空间，但计算实在太过复杂，不值得花费时间了。他的说法是：如果可以把估计值提高到 50% 以上，那就值得去做，因为那样的话人们至少可以说大部分零点都在 critical line 上。可惜康瑞认为他的证明能够改进的幅度不会超过几个百分点，不可能达到 50%。目前数学家们普遍认为用列文森方法不可能把对 critical line 上零点比例的下界估计推进到 100%。

虽然数学家们在推进 critical line 上零点比例的下界估计时进展缓慢，但在这一过程中他们也得到了许多相关的结果。这其中很重要的一类结果是关于简单零点在全部非平凡零点中所占比例的。数学家们普遍猜测，黎曼 ζ 函数所有的零点都是简单零点（这其中也包括平凡零点，但平凡零点的简单性是容易证明的），这被称为简单零点假设（Simple Zero Conjecture），它是一个迄今尚未得到证明的命题。简单零点假设也得到了许多数值及解析结果的支持。1979 年 D. R. Heath-Brown 对列文森方法做了改进（塞尔伯格也做了同样的工作，但没有发表），使之给出的比例变成有关简单零点的比例，从而把列文森 1975 年的结果转变成至少有 34.74% 的非平凡零点位于 critical line 上，并且都是简单零点。类似地，康瑞临界线定理指的也是至少有 2/5 的非平凡零点位于 critical line 上，并且都是简单零点。除此之外，由于简单零点假设通常与黎曼猜想联系在一起，有时甚至被视为是黎曼猜想的一部分，因此也有一些数学家研究了在传统的黎曼猜想成立——即所有非平凡零点都位于 critical line 上——的前提下简单零点在非平凡零点中所占的比例。比如蒙特哥麦利在 1973 年证明了如果黎曼猜想成立，则至少有 2/3 的非平凡零点是简单零点。

除了对黎曼 ζ 函数的零点进行研究外，数学家们对与之关系密切的 ξ 函数（参阅第 5 节）及其导数的零点分布也作了研究。比方说康瑞 1983 年的结果针对的实际上是 $\xi(s)$ 及其各阶导数，他所得到的主要结果为：

$\xi(s)$ 的零点至少有 36.85% 在 critical line 上。
$\xi'(s)$ 的零点至少有 81.37% 在 critical line 上。
$\xi''(s)$ 的零点至少有 95.84% 在 critical line 上。
$\xi'''(s)$ 的零点至少有 98.73% 在 critical line 上。
$\xi''''(s)$ 的零点至少有 99.48% 在 critical line 上。
$\xi'''''(s)$ 的零点至少有 99.70% 在 critical line 上。

不仅如此，他还给出了有关高阶导数的渐近结果[注 28.1]。这其中 $\xi(s)$ 的零点由于恰好与 $\zeta(s)$ 的非平凡零点重合（参阅第 5 节），因此康瑞有关 $\xi(s)$ 零点的结果便是我们前面提到的 $N_0(T) \geq 0.3685\ N(T)$。从康瑞的结果中我们看到，有关 $\xi(s)$ 各阶导数的结果远比有关 $\xi(s)$ 本身的结果强得多，因此如果有什么办法能像列文森在 $\zeta(s)$ 与 $\zeta'(s)$ 之间建立的关联那样把有关 $\xi(s)$ 各阶导数的结果转化为有关 $\xi(s)$ 本身的结果（从而也就是有关 $\zeta(s)$ 的结果），那将对 critical line 上的零点估计产生突破性的影响。列文森在临

> **注 28.1**
> 这个渐近结果表明 $\xi^{(n)}(s)$ 的零点在 critical line 上的比例下界 p_n 当 $n\to\infty$ 时满足 $|1-p_n| \sim O(n^{-2})$。

终前曾认为自己有这样的办法，可惜他很快去世了，而迄今为止谁也没能找到这种办法。但即便如此，康瑞对 $\xi(s)$ 各阶导数的零点分布的研究依然是很有意义的，因为可以证明：如果黎曼猜想成立，则 $\xi(s)$ 及所有各阶导数的零点都必定位于 critical line 上。换句话说，只要发现 $\xi(s)$ 及其任意阶导数的任何一个零点不在 critical line 上，就等于否证了黎曼猜想，因此康瑞的结果可以被视为是对黎曼猜想很有力的间接证据。

29 哪里没有零点?

读者们也许注意到了，我们在前面各节中介绍的有关零点分布的解析结果沿袭着一条共同思路，那就是尽可能地捕捉位于 critical line 上的零点。从玻尔 - 兰道定理确立 critical line 是零点分布的汇聚中心，到哈代定理确立 critical line 上有无穷多个零点，到哈代 - 李特尔伍德定理确定该“无穷多”最起码的增长方式，到各种临界线定理确定 critical line 上零点比例的下界，到有关简单零点的类似结果，到 $\xi(s)$ 及各阶导数在 critical line 上零点比例的下界，所有这些努力都是在试图捕捉与 critical line 上的非平凡零点有关的性质。

这样的思路是非常合理的，因为黎曼猜想说的就是所有的非平凡零点都位于 critical line 上。如果我们能在 critical line 上把所有的零点一一“捉”到，自然就证明了黎曼猜想。但是，正如我们在这个漫长系列中所看到的，捕捉零点是一件极其困难的事情，这么多年来我们在 critical line 上捕捉到的零点数目还不到总数的一半。在这种情况下，我们不妨换一个角度来思考问题：既然我们还无法证明所有的零点都位于 critical line 上，那何不先试着排除掉某些区域呢？排除掉的区域越多，零点可以遁形的地方也就越少，这就好比是侦探寻找罪犯时把无关的人员排除得越干净，也就越有利于锁定罪犯。如果我们可以把 critical line 以外的所有区域——即 $\mathrm{Re}(s)<1/2$ 与 $\mathrm{Re}(s)>1/2$——全部排除掉，也同样就证明了黎曼猜想。

遗憾的是，在这方面数学家们获得的进展比直接捕捉零点还要少得多，简直可以说是少得可怜。从排除区域的角度上讲，最先被排除的是 $\mathrm{Re}(s)<0$ 及 $\mathrm{Re}(s)>1$，这是非常简单的结果（参阅第 5 节）。接着被排除的是 $\mathrm{Re}(s)=0$ 及 $\mathrm{Re}(s)=1$，这是非常困难的结果，它直接导致了素数定理的证明（参阅第 7 节），critical strip 的概念也由此产生。这些结果距今都已经超过一百年了，那么在时隔这么多年之后我们是否有能力把这种结果再推进一点，比方说把 critical strip 的右侧边界由 $\mathrm{Re}(s)=1$ 向左平移为 $\mathrm{Re}(s)=1-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$)，从而把 $\mathrm{Re}(s)\geq 1-\varepsilon$ 的区域排除掉呢 [注 29.1]？不幸的是，我们还没有这个能力。无论把 ε 取得多小，一百多年来也始终没人能够把 $\mathrm{Re}(s)\geq 1-\varepsilon$ 的区域排除掉。迄今为止，数学家们所能证明的只有诸如 **critical strip 之内曲线 $\mathrm{Re}(s)=1-c/\ln[|\mathrm{Im}(s)|+2]$ ($c>0$) 右侧的区域内没有非平凡零点之类的结果**。这一结果的基本形式是 de la Vallée-Poussin 于 1899 年给出的，距今也有一百多年了，数学家们在这方面所做工作之有限由此可见。

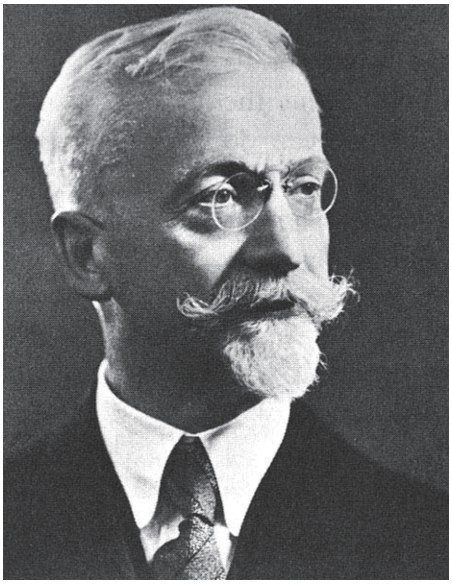
由于曲线 $\mathrm{Re}(s)=1-c/\ln[|\mathrm{Im}(s)|+2]$ 在 $\mathrm{Im}(s)\to\infty$ 时无限逼近于 $\mathrm{Re}(s)=1$，因此我们无法利用这一结果将 critical strip 的右侧边界向左平移哪怕一点点。

30 监狱来信

在前面各节中，我们介绍了数学家们在证明黎曼猜想的漫长征途上所作出的多方面尝试。这些尝试有些是数值计算（第 8-15 节及附录），它们虽然永远也不可能证明黎曼猜想，却有可能通过发现反例而否证黎曼猜想——当然，迄今为止并未有人发现反例；有些则是解析研究（第 22-29 节），它们具有证明黎曼猜想的潜力，但迄今为止距离目标还很遥远。如果小结一下的话，那么这两类尝试虽然很不相同，却都可以被归为直接手段，因为它们的目标都是黎曼猜想本身。

注 29.1

由于零点分布的对称性，在这种情况下 critical strip 的左侧边界也将相应改变。人们有时把 critical strip 的边界可以向内平移称为准黎曼猜想（Quasi-Riemann Hypothesis）。



埃利 • 嘉当
Élie Cartan

昂利 • 嘉当
Henri Cartan

既然这两类直接手段都遇到了困难，那我们就要问这样一个问题：除这些直接手段外，还有没有别的手段可以帮我们研究黎曼猜想，或带给我们启示呢？答案是肯定的。

事实上，黎曼猜想虽然是一个极为艰深的难题，但这种连续几十年甚至更长时间无法解决的难题在科学上是并不鲜见的。科学家们对付这种难题的大思路其实很简单，那就是直接手段行不通时，就采用间接手段。当然，大思路虽然简单，具体采取什么样的间接手段，可就大有讲究了。一般来说，常用的间接手段有两类：第一类是研究与原问题相等价的问题——那样的问题一旦被解决，原问题自然也就解决了 [注 30.1]；第二类则是研究与原问题相类似、但却更简单的问题——这类手段虽不能解决原问题，却有可能带给我们启示。更重要的是，在原问题实在太艰深时，这类手段往往比其它手段更具可行性。

就目前我们对黎曼猜想的了解而言，它看来是属于那种“原问题实在太艰深”的情形，因此我们首先要介绍的间接手段就是“往往比其它手段更具可行性”的第二类间接手段。这类手段在科学研究中有着广泛应用。比如物理学家们遇到很困难的三维空间中的问题时，往往转而研究二维、一维，甚至零维空间中与原问题相类似的问题。又比如生物学家们从事一些不宜在人体上作尝试的研究时，往往转而用动物作为研究对象。最近比较热门的用凝聚态体系模拟基础问题的做法，也是第二类间接手段的例子 [注 30.2]。这类手段通俗地讲，其实就是研

注 30.1

除研究等价问题外，人们有时还会研究比原问题更普遍的问题。有读者可能会问：那样的问题难道不应该与原问题同样困难、甚至更难吗？是的，一般来说，与一个难题相等价或更普遍的问题本身也不太可能是省油的灯，只不过解决难题往往需要灵感，而不同的问题（哪怕是等价的问题）所能激发的灵感是不同的，因此研究那样的问题有时能起到意想不到的作用。

注 30.2

这方面的一个例子，是利用石墨烯（graphene）中的电子运动与相对论量子力学中无质量粒子运动的类似性，来研究后者（参阅拙作《石墨烯——从象牙塔到未来世界》）。此外，2009 年受到过一些媒体关注的用特定流体中的声子运动来模拟黑洞附近光子行为的所谓“声学黑洞”（sonic black hole）也是一个例子。

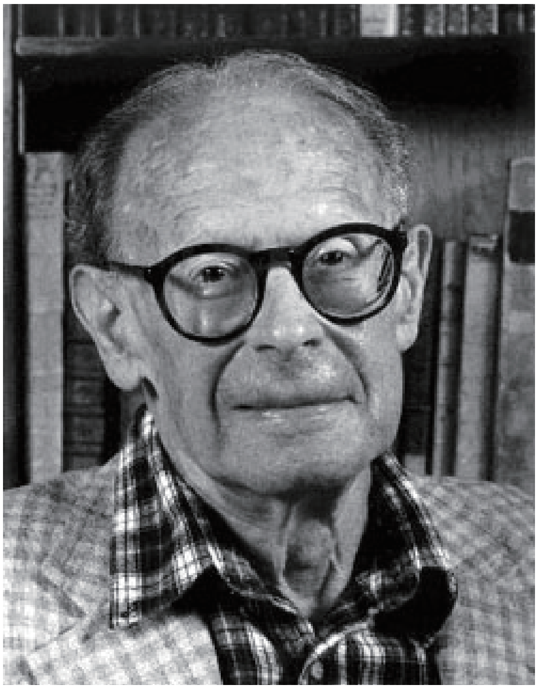
究“山寨版”的问题。只不过与经济领域中的“山寨版”产品被四处喊打不同，科学领域中的“山寨版”问题不仅不违规，对它们的研究还广受鼓励。有时候，在“山寨版”问题上的突破，甚至能成为重大的科学成就，并获得重大的科学奖项。黎曼猜想就是一个很好的例子，它的艰深与重要，使得“山寨版”的黎曼猜想也“鸡犬升天”，变成了非同小可的问题，研究或解决它的数学家甚至可以获得数学界的最高奖，堪称是“史上最牛”的“山寨版”。

需要补充说明的是，“山寨版”黎曼猜想的重要性并不仅仅来自于“正版”黎曼猜想的艰深与重要，它本身以及它与其它数学领域的关联也有着不容忽视的重要性。

为了介绍这种“史上最牛”的“山寨版”，让我们把时光暂时拉回到 1940 年。

1940 年 4 月，著名的法国几何学家埃利 • 嘉当（Élie Cartan, 1869-1951）收到了一封奇怪的信件，它的寄信人地址是位于法国海滨城市鲁昂（Rouen）的一座军事监狱。一位著名数学家居然收到监狱来信，那会是一封什么样的信件呢？照常理来说，最大的可能性是某位民科的杰作，对于法国数学家来说，情况尤其如此。因为在这方面，法国科学院可谓是开了风气之先——自从一个多世纪前它为费马大定理悬赏以来，民科信件便如雪片般地飞到了法国数学家的手里。那热情，就连一百多年的时光也不足以使之熄灭。自那以后，知名法国数学家收到民科来信就不再是新鲜事了。不过嘉当收到的这封信件却有些不同，因为它的寄信人地址虽然很“民间”，字迹却颇为熟悉，因为那字迹属于一位真正的数学家。那数学家不仅嘉当认识，更是他那数学家儿子昂利 • 嘉当（Henri Cartan, 1904-2008）的好朋友。那位数学家的名字叫做安德烈 • 韦伊（André Weil，1906-1998），他一生的许多重要工作虽然还有待于此刻拿在嘉当手里的这封监狱来信来揭开序幕，但当时的他就已在代数、分析、数论等诸多领域中享有了一定声誉。五年前，他还与几位志同道合的年轻数学家（其中包括昂利 • 嘉当）一同，创立了一个数学学派——布尔巴基（Bourbaki）学派。

嘉当对字迹的细心留意使那封监狱来信免遭了被弃之垃圾桶的命运，也为我们的黎曼猜想之旅增添了一段新的故事。



安德烈 • 韦伊
André Weil

31 与死神赛跑的数学家

身为数学家的韦伊怎么会跑到监狱里去的呢？这还得从他早年的一些经历说起。

韦伊是一位早熟的数学家，自九岁开始就在一份中学数学刊物上展露头角，对数学的喜爱则达到了着迷的程度。据说有一次他不小心摔了一跤，他那后来成为哲学家的妹妹所想到的安慰办法，居然是立刻去把他的数学书找来。十六岁时，韦伊进入了一所名为 École Normale Supérieure 的学校，这个校名翻译成中文是一个很土的名字，叫做“高等师范学校”。但莫看名字不起眼，它实际上却是一所为法国培养了十二位诺贝尔奖得主及十位菲尔兹奖得主的一流学府。在那里，韦伊参加了曾经证明过素数定理（参阅第 5 节）的著名数学家阿达马的讨论班，并开始研读包括黎曼在内的一些数学大师的著作。此外，他还结交了精研印度及东方文化的教授西勒万 • 列维（Sylvain Lévi, 1863-1935）。受后者影响，他一生都对印度文化怀有

Riemann

罗尔夫•奈望林纳
Rolf Nevanlinna

浓厚兴趣。自十九岁起，韦伊开始在欧洲各地游历，每到一处都结交了不少朋友。1930-1932 年间，他到自己神往已久的印度生活了两年多，亲自接触了这个古老国度的文化。1935 年，他还访问了苏联，结识了一些苏联数学家。

但他万万不曾想到的是，对印度文化的钟爱及与苏联数学家的友谊在不久之后将给他带来巨大的麻烦，甚至险些让他葬身异国他乡。

受印度教中某些和平主义思想的影响，在二战前夕的 1939 年夏天，韦伊作出了逃避兵役的决定。为此，他和妻子来到了北欧国家芬兰，打算以此为跳板前往美国。在芬兰期间，他沿袭了自己喜好游历的习惯，一边在各处旅行，一边与几位苏联数学家展开通信联络，讨论数学问题。几个月后，二战爆发，芬兰与苏联的关系趋于紧张，韦伊与苏联人的通信开始引起芬兰方面的警惕：一个外国人，不远千里，来到芬兰，专门与苏联人联系，这是什么行为？芬兰方面的警惕很快变成了韦伊的厄运。1939 年 11 月底，苏芬战争爆发，韦伊这位曾经访问过苏联，当时仍与苏联人频繁通信，甚至还很巧合地在战争爆发前游历过苏芬边境的法国人，几乎立刻就被当成苏联间谍抓捕归案。

在韦伊的物品中，芬兰警察发现了俄文信件，其中还夹带着疑似间谍符号的奇怪记号（其实是数学符号）[注 31.1]。此外，芬兰警察还发现了一个名叫尼古拉•布尔巴基（Nicolas Bourbaki）的可疑人物的卡片。这就让事情更说不清了，因为尼古拉•布尔巴基是韦伊等人为布尔巴基学派所取的笔名（跟间谍的化名差不多），而那卡片则只不过是韦伊等人用自己的幽默感制作出的道具。可惜战云笼罩下的芬兰警察没有心情玩幽默，数学符号也好，幽默道具也罢，通通被视为了间谍证据——至于你信不信，芬兰警察反正信了。

韦伊帮苏联人做间谍一事就这样被定了罪——而且是死罪。他的人生之旅走到了最危险的时刻。在这冰天雪地的异国他乡，有什么人能将他从死神手里救回呢？

临刑前的傍晚，韦伊在冰冷的死牢中等待最后一个夜晚的降临，当地的警察局长却正在参加一个热闹的晚宴。人生的际遇有时是很有戏剧性的。与苏联人讨论数学看似无害，却为韦伊带来了死罪；而警察局长的晚宴看似无益，却成为了韦伊的救命稻草。因为参加晚宴的宾客中有一位数学家名叫罗尔夫•奈望林纳（Rolf Nevanlinna, 1895-1980）。此人恰好是韦伊的朋友。韦伊在被审讯时曾经提到过这位朋友，可惜没管用，因为谁也不相信一位“苏联间谍”的话，更懒得去核实。奈望林纳是赫尔辛基大学（University of Helsinki）的数学教授，在全世界数学家的行列里虽排不到前列，在芬兰却是很著名的数学家[注 31.2]，名声之大甚至连警察局长也认识。于是警察局长走到奈望林纳身旁，与他聊起了近日的“打黑”成果。他告诉

注 31.1

据韦伊后来回忆，那信件是著名苏联数学家列夫•庞特里亚金（Lev Pontryagin，1908-1988）的来信。

注 31.2

顺便提一下，奈望林纳的学生当中有一位很著名的人物：Lars Ahlfors（1907-1996）。他是第一届菲尔兹奖的得主，所著《复分析》（Complex Analysis）一书是该领域最著名的教科书。

Riemann

奈望林纳:“我们明天将处决一名间谍，他声称认识您。通常我是不会为这类琐事打扰您的，但既然我们都在这里，我很高兴能有机会直接咨询一下您。”奈望林纳就问：“他叫什么名字？”警察局长回答说：“安德烈•韦伊。”奈望林纳大吃了一惊，自己的朋友居然变成间谍，这真是“眼睛一眨，老母鸡变鸭”了！虽然他对事情的原委一无所知，但还是建议警察局长不要处决韦伊，而改为驱逐出境。

这一建议救了韦伊的命。他被芬兰警方送往瑞典边境驱逐出境，瑞典警方随即逮捕了他，将他送往英国，如此几经接力，韦伊于 1940 年 2 月被送回到了法国警方手里。法国警方则以“逃避兵役”(desertion) 为由将他收押在前面提到的海滨城市鲁昂的军事监狱中，等候判决。

我们在第 25 节中介绍“独行侠”塞尔伯格时曾经提到过，战争造成的孤立在塞尔伯格眼里有一种全然不同的感觉，他将之比喻为是处在一座监狱里，虽然与世隔绝，却有机会把注意力集中在自己的想法上，从而对研究来说有许多有利的方面。塞尔伯格后来果真利用那样的孤立时光，在黎曼猜想研究中取得了重要进展（即临界线定理）。现在，我们有了一个更好的例子来印证塞尔伯格的感觉，那就是韦伊。与塞尔伯格的比喻不同，韦伊可是货真价实地蹲了监狱，他所取得的成果也确实对得住那样的经历。而且很巧的是，他那成果也与黎曼猜想有关——确切地说是跟“山寨版”的黎曼猜想有关。他那成果原本是应该等到出狱之后才发布的，但死里逃生的经历使他对命运感到了迷惘，为防不测，他决定将成果写成信件先发出去，于是就有了嘉当所收到的那封监狱来信。

韦伊的经历和成果引起了很多数学家的“眼红”。昂利•嘉当在读了父亲转给他的韦伊的监狱来信后，毫不隐讳地向韦伊表示了“羡慕”之心：“我们都没那么幸运，能像你那样不受干扰地坐下来工作”。韦伊的印度朋友、哈代的学生 Tirukkannapuram Vijayaraghavan (1902-1955) 则不止一次地感慨道：“如果能有六个月或一年时间蹲监狱的话，我肯定能证明黎曼猜想。”这种幽默感想必是从他老师哈代那儿学来的，其可信度当然也只能与哈代的明信片（参阅第 1 节）相比。事实上，如果蹲六个月或一年的监狱就能证明黎曼猜想的话，数学家们肯定会抢破脑袋去把牢底坐穿的，毕竟，与我们题记所引的蒙特哥麦利那句话相比，蹲监狱这种代价实在算不上什么。韦伊本人对自己在监狱中取得的成果也深感自豪，在给妻子的信中表示：“我的数学工作进展得超乎我最大胆的期望，我甚至有点担心——假如只有在监狱里才工作得这么好的话，我是不是每年都该把自己关起来两三个月？”

这样“不受干扰”的“好日子”并没有持续太久，1940 年 5 月初，对韦伊的判决下来了，他因逃避兵役被判五年监禁。不过这判决带有一个宽限条件，那就是假如他愿意去战斗部队服役的话，就可以免除监禁。韦伊接受了这一条件（幽默归幽默，坐牢毕竟是不好受的）。他没想到的是，这一选择使他在与死神的赛跑中又一次鬼使神差般地脱了身，因为仅仅一个多月后，随着法国在二战中的败退，海滨城市鲁昂就落入了德国人手中，尚被关押在军事监狱里的囚犯则全部遭到了德军的枪杀。

战争仍在继续，但不久之后，韦伊利用一份伪造的肺炎证明骗过军方，如愿以偿地实施了当初前往芬兰时就拟定的赴美计划。1941 年初，韦伊全家抵达纽约，开始了全新的生活。到达美国后，他在利哈伊大学 (Lehigh University)、芝加哥大学等地任过教，最终则落户于普林斯顿高等研究所，安然度过了自己的学术晚年。韦伊的一生在数学上有着颇多建树，“山寨版”的黎曼猜想只是他的研究方向之一。韦伊在这一方向上的研究持续了很多年，他虽不是这一方向的开创者，却对其发展起到了承前启后的作用，并且还对代数几何 (algebraic geometry) 的发展起到了促进作用。韦伊没有获得过菲尔兹奖，但他所从事的将代数几何的方法与数论实践相结合的研究，使他于 1979 年获得了数学界的另一个著名奖项：沃尔夫奖。此外，他所开创的研究领域使几位其他数学家获得了菲尔兹奖。

卖了半天关子，这“山寨版”的黎曼猜想究竟是什么样子的呢？说起来有些出人意料，它虽然只是“山寨版”——因而比“正版”简单，但对多数读者来说，其表述却远比“正版”复杂，对科普来说更是堪称坚果。接下来，我们就要来啃一啃这枚坚果（不排除崩坏牙齿的可能性）。

未完待续

西塞罗发现阿基米德之墓（本杰明•威斯特的油画，1797 年作）

数学奖章上的数学故事

欧阳顺湘

有许多用著名数学家的名字来命名的数学奖，如费马奖、康托奖和欧拉奖等等。 其中许多是“单项奖”，奖励在某些方面（往往是用来命名的数学家有所建树的领域）成就卓著的数学家。如欧拉奖（Euler Prize）自 1993 起在每年的国际组合数学年会上颁发给在组合数学领域有突出贡献的数学家。也有不少“终身成就奖”,著名的有 2001 年设立的阿贝尔奖。该奖由挪威王室一年一度颁给杰出数学家，奖金达 80 万美元，媲美诺贝尔奖奖金，是世界上奖金最高的数学奖。

这里我们聊聊国际数学家大会和国际数学教育大会上颁发的奖项，欣赏奖章，了解相关的数学家和数学知识。

菲尔兹

国际数学家大会上四大奖项

在德国数学家联合会（Deutsche Mathematiker-Vereinigung, 简称 DMV）主席康托的积极努力下，首届国际数学家大会（International Congress of Mathematicians, 缩写为 ICM）于 1897 年在瑞士苏黎世召开。自 1900 年在巴黎召开了第二次会议后，每四年举行一次。但后因二战而停办。1950 年国际数学联盟（International Mathematical Union, 缩写为 IMU）成立，国际数学家大会的传统才得以恢复。现在国际数学家大会最令人瞩目的要事之一便是开幕式上颁发的四大奖项：菲尔兹奖、奈望林纳奖、高斯奖和陈省身奖。

菲尔兹奖

菲尔兹奖由加拿大数学家约翰 • 查尔斯 • 菲尔兹（John Charles Fields, 1863-1932 年）建议设立。菲尔兹早年游学美国、欧洲，与诸多大数学家共事。其后返回加拿大致力于提升数学的地位。如在他努力下，1924 年世界数学家大会在加举行。他自上个世纪 20 年代末开始筹备该奖，并遗嘱捐赠 $47,000 给奖项基金。菲奖在 1936 年首颁；后从 1950 年起每隔 4 年颁发一次，奖励 40 岁以下数学成就杰出者，且旨在鼓励获奖者进一步的研究。获奖者一般为 2 至 4 人。该奖有“数学界中诺贝尔奖”之称，其实它早期并无今日如此声誉，这很大程度上源于历届获奖者给它带来的荣耀。

菲尔兹奖章（正）

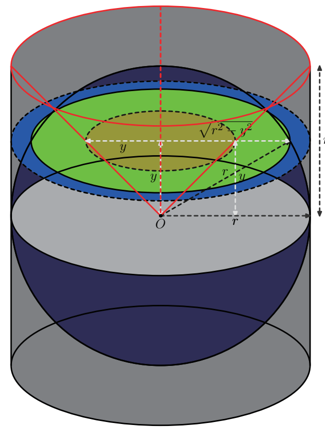
菲尔兹奖包括一面金质奖章和一笔不算多的奖金（目前为 15,000 加元）。奖章正面有古希腊数学家阿基米德的头像（Archimedes, 前 287- 前 212 年）和希腊文“Α Ρ Χ Ι Μ Η Δ Ο ϒ Σ”，意为“阿基米德的（头像）”；头像周边刻拉丁文“TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI”，此来源于一世纪罗马诗人马尼利乌斯（Manilius）的著作《天文学》，意为“超越他的心灵，掌握世界”。此外奖章设计者（Robert Tait McKenzie）名字之缩写 RTM 及设计年份 MCNXXXIII（即 1933 年，第二个 M 字母以 N 代）也刻在奖章上。获奖者的名字则会被刻于奖章边轮。

菲尔兹奖章（反）

菲奖章背面刻有意为“聚全球数学家，为杰出著作而颁”的拉丁文“CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI OB SCRIPTA INSIGNIA TRIBUERE”。文字和树枝的背景为球体嵌进圆柱体（“圆柱容球”）的示意图，这象征着阿基米德的得意之作《论球与圆柱》中最著名的一个结果：球与其外切柱体的面积（体积）之比为 2 : 3。阿基米德对此如此骄傲，以致他希望人们在他的墓碑上刻下球与圆柱体的关系图。确实，阿基米德计算各种面积所用的“穷竭法”可以被视作后世微积分学所用“无穷小分析”的起源。

传说正沉思于几何问题的阿基米德被鲁莽无知的罗马士兵杀死之后，罗马将军马塞勒斯悲伤不已，不但给阿基米德立墓，备极哀荣，并按他生前的愿望在碑上刻球内切于圆柱的图形。在公元前 73 年，时任西西里岛财务官的罗马著名政治家、哲学家西塞罗（Marcus Tullius Cicero, 前 106- 前 43 年）去叙拉古（Syracuse）探访阿基米德之墓。其时阿基米德去世才 137 年，当

今日意大利西西里岛阿基米德家乡叙拉古的“阿基米德的坟墓”遗址



球与其外切柱体的面积（体积）之比为 2 : 3：若设球半径为 r，则球面积为 $4\pi r^2$，体积为 $4/3\pi r^3$；而其外切柱体面积为 $6\pi r^2$，体积为 $2\pi r^3$（本图附圆锥及截面图，可作为 64 页图的参考）

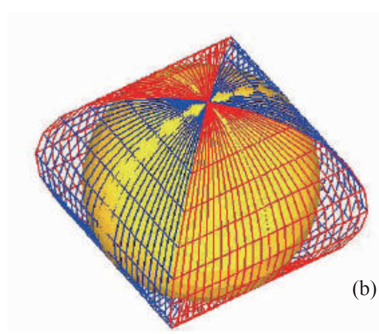
地人却已对阿基米德之墓一无所知，否认有这样一个墓。通过一番搜索，西塞罗终在杂草丛中凭此球内切圆柱图案辨认出阿基米德的墓，并派人去清理繁芜，铺砌道路。西塞罗在他的文章中写道，找到阿基米德之墓后，他告诉叙拉古人，此刻他和叙拉古最杰出的人在一起，而这正是他一直在寻求的。后来一些画家还将此刻情景凝固在油画中。其中著名的有美国画家本杰明•威斯特（Benjamin West, 1738-1820）1797 所作的油画“西塞罗发现阿基米德之墓”（1804 年他另作一幅稍有差别的画）。两个名人穿时空的重逢确是值得纪念的。这种对文明的尊重弥足珍贵的另一个原因是对数学家的尊重在西塞罗那个时代是少见的。西塞罗曾写道“几何学在希腊人中享有极高声誉，没有什么比数学更加荣光的了；但我们（罗马人）却只满足于那些用来计算和测量的数学知识”。

类似于阿基米德的“穷竭法”和圆柱容球的比例 2 : 3，我国三国时代魏国数学家刘徽也应用类似的极限思想求出了圆面积、一些锥体（如阳马与鳖臑）的体积。而且他还在评注我国算术名著《九章算术》时正确地猜测了球体积与其外切牟合方盖体积之比等于圆与其外接正方形的面积之比（即 π : 4）。这里所谓的“牟合方盖”是一个立方体从纵横两个方向做内切圆柱的共同部分，因其外型酷似上下相对（牟合）的方伞（盖）。中国家庭日常生活中常用的食物罩就类似牟合方盖的一半。

原来在《九章算术》的“少广”章中记有“开立圆术”，认为直径为 D 的球体积公式为

$$V=\frac{9}{16}D^3。$$

(a)



(b)

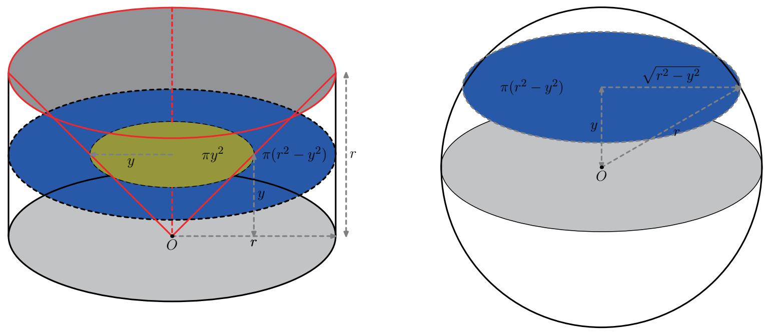
(a) 直交圆柱 (b) 内切圆球牟合方盖

(a) (b)

祖暅原理示意图

奈望林纳奖章（正）

奈望林纳奖章（反）



半球体积与圆柱体去掉锥体剩余部分体积相同（横截面（图中蓝色部分）面积相同）

如果将 π 取值为 3，则该公式相当于认为球体积与其外切圆柱体积之比为 3:4。刘徽指出这是错误的，但他自己没能求出牟合方盖的体积从而得出正确的球体积计算公式，而是将这个问题留给了后人，“以俟能言者”。

刘徽去世之后 200 余年，南北朝时期的祖冲之、祖暅父子共同提出了祖暅原理：所有等高处横截面积相等的两个同高立体，其体积也必然相等（“缘幂势既同，则积不容异”）。该原理在西方常被称为卡瓦列里原理，因由意大利几何学家卡瓦列里（Bonaventura Francesco Cavalieri, 1598 年 -1647 年）重新发现。这可以看作是微积分学发展历程中自阿基米德的穷竭法之后的一大进步。祖氏父子正是利用此原理算出牟合方盖的体积从而得出球体体积。

刘徽提出的球体体积与牟合方盖的体积之比则是祖暅原理的直接推论：因为我们可将球体当作由横截的圆累积而成；若将这些横截圆改为外接该圆的正方形，则所得立体即是牟合方盖。我们这里仅简单介绍如何用祖暅原理来理解阿基米德提出的比例。

在底面半径和高均为 r 的圆柱体中倒立一个以圆柱体上表面为底，下底面圆心为顶点的圆锥。易由勾股定理得知半径为 r 的半球“赤道”上方 y 处横截面（半径为 $\sqrt{r^2-y^2}$ 的圆）的面积为 $\pi(r^2-y^2)$；而等高处圆柱体的横截面的面积（恒为 πr^2）去掉锥体的横截面积（πy^2）为 $\pi(r^2-y^2)$。由祖暅原理，半球体积等于圆柱体中除去圆锥体所剩部分之体积。我们知道内嵌圆锥体体积是柱体体积的三分之一，因此半球体积是 $\frac{2}{3}$ 倍此圆柱体体积。

奈望林纳奖

奈望林纳奖由国际数学联盟于 1981 年设立，奖励在信息科学的数学方面有突出贡献的年轻数学家。它类似于菲尔兹奖，得奖者必须在获奖那一年不大于 40 岁。该奖包括一枚奖章和部分奖金，每四年在国际数学家大会颁发，且获奖者的名字也会被刻在奖章边轮。奈望林纳奖于 1982 年首颁，有“计算机科学中诺贝尔奖”之称。奈望林纳奖是以纪念在 1980 年去世的芬兰最著名的数学家之一罗尔夫•奈望林纳（Rolf Herman Nevanlinna, 1895-1980 年）。奈望林纳在函数论方面贡献卓著，且在 20 世纪 50 年代开启了

意大利米兰的卡瓦列里的雕像

高斯奖章（正）

高斯奖章（反）

芬兰的计算机项目。

1982 年，国际数学联盟接受赫尔辛基大学对该奖的资助。奖章正面为奈望林纳的头像以及文字“ROLF NEVANLINNA PRIZE”（“奈望林纳奖”）以及很小的字符“RH 83”（示意此奖章由设计者 Raimo Heino 于 1983 年首次铸造），反面的两个图案都和赫尔辛基大学有关。奈望林纳是赫尔辛基大学的教授，并曾任校长。右下角是赫尔辛基大学的校徽，环绕校徽有赫尔辛基大学的名字“UNIVERSITAS HELSINGIENSIS”。左上角是文字“Helsinki”的编码，这和该奖的表彰内容相得益彰。例如，2010 年获得奈望林纳奖的 Daniel Spielman 的一个主要贡献即是关于编码理论的。

高斯奖

高斯奖由德国数学家联合会和国际数学联盟共同设立，以纪念“数学王子”高斯（Carl Friedrich Gauss, 1777-1855），主要用于奖励在数学之外的应用领域，如经济、技术乃至日常生活中有深刻影响的数学家。

高斯奖设立于 2002 年，并于 2006 年在马德里召开的第 25 届国际数学家大会上首次颁发。高斯奖包含一笔奖金和一枚奖章；奖金目前为一万欧元，资金来源于 1998 年在柏林召开的 ICM 的结余。高斯奖章正反图案均以数学中的基本元素点、线、曲线来构图。正面勾勒出高斯的头像，并刻文“For Applications of Mathematics”（“为应用数学”）；反面为一曲线、一点和一方框组成的图以表示高斯的伟大成就之一：以最小二乘法来确定行星的轨迹。这是应用数学的典范。

1801 年元旦，意大利天文学家皮亚齐（Giuseppe Piazzi）发现了后来被命名为谷神星的小行星。皮亚齐跟踪观测了 40 天后由于谷神星运行至太阳背后

高斯绘谷神星的轨迹图

2006 年 9 月，国际数学联盟主席鲍尔爵士前往日本将首届高斯奖颁给伊藤清

而丢失。科学家们开始了利用皮亚齐的观测数据来预测谷神星出现位置的竞赛。时年只有 24 岁的高斯运用早在 1794 年就创立的最小二乘法理论，准确地预测了谷神星的轨迹。同年底，天文学家 Zack 在很接近高斯预测的位置上重新发现了谷神星。

1809 年高斯在题为《围绕太阳沿圆锥曲线轨道公转的天体的运动理论》一文中，正式发表了最小二乘法理论。此前法国的勒让德（Adrien-Marie Legendre）也独立发现了最小二乘法原理。不过高斯对最小二乘法的贡献确实很大。他在 1822 年证明了回归分析中最小二乘法在一定意义上是最优的。他还利用最小二乘理论，得出了拉普拉斯等人苦思不得的误差分布——现在常称的高斯分布。德国曾经流通的 10 马克纸币，以及一枚纪念高斯的纪念币上，都有象征正态分布密度函数的“钟形”曲线图。

获得首届高斯奖的日本著名数学家伊藤清（Kiyoshi Itō, 1915-2008）的工作即是高斯奖表彰对象的范例。伊藤清揭示了随机王国的牛顿定律，开创了“随机分析”学。获得 1997 年的诺贝尔经济学奖的美国经济学家 Robert Merton 和 Myron Scholes 提出进行期权定价的 Black- Scholes 模型即基于伊藤清的工作。虽然早在 1900 年，法国数学家 Bachelier 就已经在他的博士论文中应用布朗运动来研究金融问题了，但伊藤清还是对他自己所研究的纯粹概率理论能在金融数学里有着深刻的应用感到吃惊。

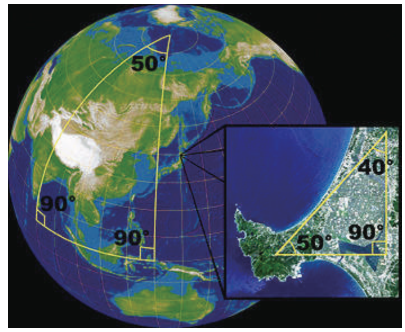
陈省身奖章（正）

陈省身奖章（反）

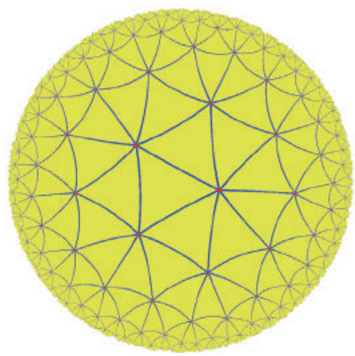
陈省身奖

陈省身奖是首个以华人名字命名的国际数学大奖，它由陈省身基金和国际数学联盟共同设立，以纪念我们都很熟悉的数学家陈省身（Shiing-

天津南开大学陈省身楼旁的陈省身先生及其夫人郑士宁女士的纪念碑（附：左下角为碑顶）（王龙 摄）



地球上大范围三角之和大于π，而局部三角可以近似看作平面三角形，其和等于π



双曲三角之和小于π

Shen Chern, 1911-2004），奖励给那些在数学领域有杰出终身成就的个人。陈省身奖于 2010 年在印度海德拉巴市（Hyderabad）举行的第 26 届国际数学家大会上首颁。

陈奖含一笔奖金和一枚奖章。奖金为 50 万美元，一半奖励给数学家本人，另一半奖金由获奖人捐助给一些支持数学的研究、教育和其它活动的社会机构，以推动数学的发展。

陈奖也获得哈里斯•西蒙斯基金的支持。西蒙斯（James Harris Simons，1938 年出生）算是陈省身先生的学生，也是他数学上的“六个朋友”（参《陈省身传》）之一，他们曾合作得到几何理论对理论物理学具有重要意义的 Chern-Simons 理论。西蒙斯在 1970 年代放弃数学去经商，现为著名的投资家。他还大力支持科学事业，特别是数学事业。

陈省身奖章正面为时年 73 岁的陈省身头像，左为陈先生的中文签名，右为英文签名，右边签名下方刻“1911-2004”，表明他的出生和去世年份。奖章反面为陈省身 1944 年证明的广义高斯 - 博内定理（又名陈 - 高斯 - 博内定理）

$$x(M)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_M \mathrm{Pf}(\Omega)\text{。}$$

这个公式的最简单情形就已经足够有趣：曲面上测地三角形的总曲率（高斯曲率的曲面积分）等于它的三角之和与 π 的差。因此正曲率曲面（如球面）上的三角形三角之和大于π，而负曲率曲面（如双曲几何曲面）上的三角形三角之和小于π。零曲率曲面（欧几里得平面）上，三角之和正好为π。

与陈奖章类似的是最近在南开大学省身楼旁揭幕的陈氏夫妇纪念碑（今

克莱因奖（正）

弗赖登塔尔奖（正）

克莱因奖章、弗莱登塔尔奖章的反面

年为陈省身诞辰 100 周年）。纪念碑正面为黑色花岗岩造“黑板”，上刻陈手书高斯 - 博内公式的证明，下刻陈省身夫妇的姓名。纪念碑整体横截面为（双曲几何曲面上的）曲边三角形，示意前述高斯 - 博内公式的简单情形。

国际数学教育大会上两大奖项

2004 年，在丹麦哥本哈根举行的第十届国际数学教育大会上，首次颁发了国际数学教育的两项大奖：克莱因奖与费赖登塔尔奖，以纪念两位分别在二十世纪上、下半世纪为数学教育做出巨大贡献的著名数学家和数学教育家克莱因和费赖登塔尔。这两个奖每两年颁发一次，并在国际数学教育家大会上宣布。奖章正面分别为被命名者的头像，反面同为国际数学教育委员会的标志。

克莱因奖

菲利克斯 • 克莱因（Christian Felix Klein, 1849-1925）是德国数学家和数学教育家，他最著名的工作是发表爱尔兰根纲领（将各种几何用它们的基础对称群来分类）。他在晚年致力于数学教育，并任于 1908 年成立的国际数学教育委员会的第一任主席。是他曾建议函数概念和微积分应成为中学的必修课。他的《高观点看初等数学》（Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus Ⅰ, 1908, Ⅱ, 1909）影响深远，被译为多种文字（含中译）。

弗赖登塔尔奖

弗赖登塔尔（Hans Freudthal, 1905-1990）是荷兰数学家和数学教育家。他年轻时就以拓扑学和李代数方面成就著称，分别为大数学家霍普夫（Heinz Hopf）、布劳威尔（L. E. J. Brouwer）的学生和助手。1951 年起他成为荷兰皇家科学院院士。

和许多著名数学家到晚年才开始关注数学教育不同，早在 1936 年，刚取得博士学位时年 31 岁的弗赖登塔尔就在荷兰组织了著名的“数学教育研究小组”。他从 1954 年起担任了荷兰数学教育委员会主席，并于 1967-1970 年间任国际数学教育委员会的主席，召开了第一届国际数学教育大会，创办了《数学教育研究》。弗赖登塔尔发表了几百篇（部）关于数学教育的著述。其中重要的有：《作为教育任务的数学》、《播种和除草》、《数学结构的教学现象》。他的工作奠定了现实数学教育的理论和实践基础，明确了现代数学教育改革的目标和方向。

写于德国比勒费尔德

2011 年 7 月

期权的数学

刘小清

早就许诺为《数学文化》的读者介绍数学在金融中的应用，待提起笔来，我才意识到，现代金融业发展至今日，所采纳和发展的数学工具和方法已经如此丰富多彩，绝非拙笔可以一文尽述的了。于是决定且先介绍关于期权的数学，抛砖引玉，激发好奇的读者去进一步了解数学在金融中更多的应用。

《数学文化》曾载文《华尔街最著名的数学家》，介绍日本概率学家伊藤清 (Kiyoshi Itō)。他建立的随机微分方程及伊藤公式是解决期权定价、对冲等问题的数学法宝。 伊藤的名字响彻了华尔街，这是不争的事实。然而说到影响华尔街的数学家，则他既非前无古人也非后无来者。历史上开启现代数理金融学先河的，当推一百多年前法国巴黎的博士生路易斯 • 巴舍利耶（Louis Bachelier）。与伊藤并非以解决金融问题作为研究初衷不同，巴舍利耶主动地跟踪当时巴黎交易所股市的跌宕起伏，希望创造出行之有效的数学工具来描述和分析股票价格变动的过程。有概率修养的读者都明白，中心极限定理是概率论的核心成果。它说的是：大量独立随机变量的平均数是以正态分布为极限的。深谙此定理之精髓，巴舍利耶巧妙地构造出一种增量独立的随机过程：布朗运动。提起布朗运动，物理学家和数学家往往联想到爱因斯坦和维纳（布朗运动也称维纳过程），其实巴舍利耶的工作比他们来得更早。如果记布朗运动在时间 t 时的位置为 W_t，则 W_t 必须满足以下性质：

(1) $W_{t_1}-W_{t_0}, W_{t_2}-W_{t_1}, \cdots, W_{t_{n+1}}-W_{t_n}$ 相互独立；

(2) 任意增量 $W_{t_{n+1}}-W_{t_n}$ 服从如下正态分布

$$E(W_{t_{n+1}}-W_{t_n})=0,\quad Var(W_{t_{n+1}}-W_{t_n})=t_{n+1}-t_n,$$
$$t_0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n.$$

巴舍利耶通过布朗运动

$$S_t=S_0+\sigma W_t$$

来描述股票价格，使得股票的若干近似性质比如马尔科夫性（即未来的价格与历史无关）、增量的独立正态分布等，都得到了简洁的刻划。巴舍利耶敏锐地意识到了随机过程与偏微分方程之间的联系。通过高斯概率密度函数

$$f(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}},$$

他把布朗运动和热传导方程沟通了起来。而这其中的奥妙其实就在于 $f(t,x)$ 恰好是热传导方程的基本解。巴舍利耶所推导的偏微分方程，便是日后随机分析理论中著名的福克 -

路易斯·巴舍利耶
Louis Bachelier

普朗克-柯尔莫哥洛夫（Fokker-Planck-Kolmogorov）方程。布朗运动的引入，大大方便了巴舍利耶进一步研究股票期权的定价问题。股票期权是一种衍生证券合约，合约确定了一个执行价格 K。以看涨期权为例，等时间来到期权的到期日 T 时，假如股票的价格 S 高于 K，期权的持有人将获得 $S–K$ 的收益，假如股票的价格 S 低于或等于 K，则收益为零。假如你是个投资者，判断牛市来临，你可以买看涨期权，如果最终股价真的上涨了，则你和买股的人一样有钱赚，如果下跌，则你不必继续跟着买股的人输钱，而你的投资成本，即期权的价格，相对于直接购买股票要低，此可谓四两拨千斤。

那么期权的价格怎么确定才合理呢？这就是现代金融理论和实务中最为引人入胜期权的定价问题。我个人的看法是一百年前的巴舍利耶已经基本破解了这个难题，他的结果距离荣膺诺贝尔奖的布莱克-舒尔茨（Black-Scholes）公式仅一步之遥。当年巴氏这份博士论文的评审，是经过了现代最伟大的数学家之一庞加莱之手的，并且受到这位数学大师的慧眼赏识，然而金融数学的研究却未因此而蔚然成风。尽管随后的几十年是概率论和随机过程研究发展的黄金时期，成果丰硕，而且在今天看来，这些成果有不少与巴舍利耶论文的工作是一脉相承的，但令人遗憾的是巴舍利耶本人却被忽视了。

学术界对巴舍利耶的再发现要一直等到上世纪的 50 年代。曾在二战中协助冯·诺依曼发明第一台计算机的美国统计学家伦纳德·萨维奇（Leonard Savage），在 1955 年前后向包括麻省理工学院的保罗·萨缪尔森（Paul Samuelson）在内的著名经济学家们寄出了半打明信片，激赏巴舍利耶的博士论文，提醒他们关注巴氏的工作。明信片如一石激浪，从麻省理工开始，迅速波及其他重要学术机构，促使包括萨缪尔森、莫顿（Robert Merton）、布莱克（Fischer Black）和舒尔茨（Myron Scholes）等顶尖人才进一步研究数理金融学，尤其是期权的定价问题。这终于导致了布莱克-舒尔茨期权定价公式的诞生。布莱克和舒尔茨的推导过程大致如下：

1. 假设股票价格遵从以下随机微分方程：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t ,$$

其中 μ 是股票的期望回报率，σ 是股价波动率，W_t 是布朗运动。该方程的解为带漂移项的几何布朗运动

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t} .$$

2. 构造投资组合：买入一份期权，沽空一定数目的股票。股票沽空的数目随股票价格的变动而调节，目标是使得投资组合变成无风险，即当股价稍微走低时，期权的损失正好为沽空股票的获利所弥补，而当股价稍微走高时，期权获利也正好为股票空头的损失所抵消。用数学的语言表达就是：使得投资组合的价值对股价的偏导数时刻为零。

3. 既然这是一个无风险的投资组合，那么它的回报应该等于无风险的利率（比如说储蓄利率）r，再利用伊藤公式，便可以导出期权价格 f 所满足的偏微分方程（BS 方程）：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf .$$

4. 由于看涨期权价格即为满足 BS 方程以及终值条件

介绍布莱克-舒尔兹公式的参考书

$$f(T,S)=\max(S-K,0)$$

的特解，利用热传导方程的基本解便可得到期权在时间 t 时的价格

$$f(t,S)=SN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2).$$

其中函数 N 为正态分布的概率分布函数。这就是著名的布莱克 - 舒尔茨公式（BS 公式），其中

$$d_{1,2}=\frac{\ln(\frac{S}{K})+(r\pm\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

多么精妙的推导和漂亮的结果啊！可惜好事多磨：布莱克和舒尔茨将他们的研究成果投稿给《政治经济期刊》（Journal of Political Economy），却惨遭退稿；转投《经济与统计评论》（Review of Economics and Statistics），再次被拒。幸亏芝加哥大学经济学大师米勒（Merton Miller）和法玛（Eugene Fama）相助一臂之力，文章的修改稿才最终获得《政治经济期刊》重新审稿并通过，发表于 1973 年。无巧不成书，文章发表后一个月，芝加哥期权交易所开张，期权交易员这下有了数学公式来计算自己心仪合约的价格了。德州有家电子仪器公司索性把 BS 公式编进专门的计算器，让交易员们揣着它进场交易。数学模型破天荒变成了金融市场一个不可分割的组成部分。到了 1984 年，若以交易量计，芝加哥期权交易所已经跃居第二，仅次于纽约股票交易所了。1997 年斯坦福大学的舒尔茨和哈佛的莫顿分享了该年度诺贝尔经济学奖，而加盟了高盛投资银行的布莱克却不幸已于 1995 年因病辞世，令人扼腕！

现在我们不妨来追究一下巴舍利耶的结果距离 BS 公式到底有多远呢。如果沿用上述数学符号，则巴舍利耶的定价公式其实是这样的：

$$f(0,S)=\int_{K-S}^{\infty}(S+x-K)\frac{1}{S\sigma\sqrt{2\pi T}}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2S^2T}}dx.$$

也就是说，如果他把这个积分积出来的话，便可得到 BS 公式在假设股价分布正态并忽略利率折现时的情形了！为了纪念巴舍利耶，彰显他对现代数理金融学里程碑式的贡献，全世界数理金融界决定成立以他的名字命名的金融学会，旨在通过国际交流来促进随机过程理论、统计方法以及其他数学理论在金融中的应用，推动金融业的发展。巴舍利耶金融学会每两年在地球上一处美丽的风景地举行学术大会。笔者有幸于 2002 年在希腊风光旖旎的克里特岛参加了学会的第二次年会，一瞻该领域大师们的学术风范和魅力。

细心的读者可能已经注意到：股票的期望收益率 μ，明明是作为所谓“漂移项”出现在股价的随机微分方程里的，可在 BS 公式里它却悄然消失了。直觉上人们容易认为期权的价格应该等于它在到期日可能得到的各种回报的折现值的

舒尔茨
Myron Scholes

布莱克
Fischer Black

平均，因此股票具有较高的“期望”收益难道不应该导致看涨期权具有较高的价值吗？如果你有这样的困惑，请别对自己的直觉和理解力感到不安。初学时这个问题也折腾过我的脑袋。就连布莱克和舒尔茨二位鼻祖对此也曾感到费解，尽管其偏微分方程的数学推导已然是天衣无缝的了。究竟直觉与理论的断裂发生在哪里呢？原来它就在我特意加上引号的期望二字上头。BS 公式诞生许多年之后，金融数学家哈里森（Michael Harrison）、克雷布斯（David Kreps）和普利斯卡（Stanley Pliska）才证明了期权定价的确可以通过求取回报函数折现值的数学期望而获得，但求取期望时所采用的测度却并非现实世界的原概率，而必须是使可交易资产（比如股票以及期权）与所选取的计价单位之商成为鞅过程的一个新的概率测度。

为了透彻地把他们的结论和 BS 公式关系演绎清楚，我不得不提及另一位概率学家吉尔萨诺夫（Igor Vladimirovich Girsanov, 1934-1967）和他的一个定理。吉尔萨诺夫应该算是莫斯科概率学派中的一位天资聪慧的后生。他的研究工作以随机过程和随机分析为主，在应用数学上也有独到贡献。值得一提的是，吉尔萨诺夫对经济现象与巴舍利耶有着几乎相同的强烈兴趣，曾经力排众议，倡导在经济学中运用定量方法和数学模型从事研究。吉尔萨诺夫 1960 年发表了一个关于测度变换的定理：

在测度 P 下带漂移项的布朗运动

$$\tilde{W}_t=W_t+\int_0^t\theta_s ds,$$

可以通过以

$$Z_t=\exp\left(-\int_0^t\theta_s dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t\theta_s^2 ds\right)$$

作为拉东 - 尼古丁导数的测度变换

$$\frac{dQ}{dP}=Z_T$$

转变成测度 Q 下的标准布朗运动。

借助这个定理我们可以来解释期权定价时所做的概率测度变

吉尔萨诺夫
Igor Vladimirovich Girsanov

换到底是怎么一回事了。假设市场中另有一只股票，其价格 $\tilde{S}_t$ 满足如下随机微分方程：

$$d\tilde{S}_t = \tilde{\mu}\tilde{S}_t dt + \tilde{\sigma}\tilde{S}_t dW_t .$$

现在我们构造一个投资组合策略 $\pi_t = (\tilde{\sigma}\tilde{S}_t)S_t - (\sigma S_t)\tilde{S}_t$，即始终持有 $\tilde{\sigma}\tilde{S}_t$ 份的第一只股票和卖空 σS_t 份的第二只股票。如果该策略自负盈亏，即保障策略输赢纯粹由股价的涨跌决定而没有额外资金进出，那么该投资组合便能消去随机项，且它的回报率应该等于无风险利率：

$$\begin{aligned} d\pi_t &= (\mu\tilde{\sigma} - \tilde{\mu}\sigma)\tilde{S}Sdt \\ &= r(\tilde{\sigma} - \sigma)\tilde{S}Sdt . \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\mu\tilde{\sigma} - \tilde{\mu}\sigma = r(\tilde{\sigma} - \sigma) ,$$

或者

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\tilde{\mu} - r}{\tilde{\sigma}} .$$

可见股票期望收益率与无风险利率之差除以股价波动率之后是一个常数，与具体是哪家公司无关，我们记之为 m。m 通常称为风险的市场价值，体现了市场对风险的好恶。如果 $m > 0$，则 $\mu > r$，表示倘若投资者若冒了风险 σ，他便希望平均回报率要高于无风险利率，高出的量以系数 m 与 σ 成正比。在风险厌恶心态下，期权投资者对于到期日正好得到低回报甚至零回报的害处会故意放大；相反对于到期日正好得到高回报的好处会故意打个折扣。如果我们不把“折扣”打在回报的效用之上，而是打在概率上，便导致了概率测度的变换。

如果说“根据伊藤公式（by Itō's formula）”是华尔街数理专家的第一口头禅的话，那么第二口头禅恐怕就要数“根据吉尔萨诺夫定理（by Girsanov's Theorem）”了。测度变换的技术之于分析师犹如魔棒之于魔术师，挥之而化繁复的难题为精巧的解答。天妒英才，1967 年吉尔萨诺夫三十出头便死于意外。邓肯（Evgenii Dynkin）和柯尔莫哥洛夫（Andrey Kolmogorov）等人在期刊《概率论及其应用》（Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya）为他撰写讣文，选择性地介绍了吉氏的学术佳作，其中却并不包括发表于 1960 年关于随机过程测度变换理论的这一篇。笔者毫不质疑柯尔莫哥洛夫科等大师在数学尤其是概率论上高瞻远瞩的洞察力，但也不禁为数学在自然科学、生产技术以外的领域里能有出乎先辈意料的应用潜力而惊叹。

关注股市的读者可能会有一个疑问：股价的波动率，即股价方程中的所谓“扩散项”σ，怎么可能保持常数呢？这回你可是问中要害了。我们不再能够用一两个强有力的定理便把这个问题轻而易举地化解掉了。布莱克、舒尔茨和莫顿自然也明白常数波动率是一个过于简单化的理想假设。幸好在 1987 年 10 月华尔街股市大崩盘之前，相对稳定的资本市场容忍了这项假设的缺陷，BS 公式几乎一路无惊无险地服务着期权交易。

对于不同的敲定价格 K、不同的到期日 T，通过相应期权的市场价格 $P(K, T)$，我们可以由 BS 公式的逆运算得到股票的波动率

$$\sigma = \sigma(K,T).$$

它被简称为隐含波动率（Implied Volatility），意指由期权价格所隐含的波动率。87 股灾之后，$\sigma(K,T)$ 不再保持是一张平面，而是开始呈现弯曲。若暂时固定 T，则 $\sigma(K)$ 常见的形状接近于开口向上的二次曲线，有如一抹微笑之嘴型。波动率微笑（Volatility Smile）故此得名。隐含波动率的微笑，意味着不存在一个常数 σ，能使得具有不同敲定价或到期日期权的市价同时得到满足。这迫使我们去寻找波动率的某种数学模型，以便整个隐含波动率曲面所对应的全部期权价格都能得到满足，或者至少尽量逼近。这样的手段业界称为波动率的校准（Volatility Calibration）。成熟的衍生交易台往往是先读入市场流动性较高的标准交易产品的价格，用以校准自己的标的模型，再拿校准后的模型对即将与客户或专业对手交易的特种期权（Exotic Options）进行定价。

波动率的校准，在数学性质上其实就是求随机微分方程或者它所对应的偏微分方程的反问题。我的同学张宇曾在《数学文化》上撰文介绍地球物理中的反问题。他在《张关泉先生文集》序言中谈到：“对于传统的正演问题，椭圆型方程和抛物型方程有比较简单的数学性质，研究上比较容易。而以波动方程为代表的双曲型方程则无论在理论和计算上都比较困难。反问题的研究恰好相反。研究椭圆型、抛物型方程的反问题就如同和一个喜怒不行于色的人打交道，很

难从他的外在表现判断其所思所想。而反演双曲型方程则类似给病人切脉诊病，虽然困难，却还有迹可寻。”期权的 BS 方程恰好是抛物型热传导方程，正解的性质良好，但波动率微笑的校准作为 BS 方程的反问题，解决起来就相当棘手。在股票、利率、外汇等各个资产类别市场中隐含波动率的微笑各有特点，对付起来需要量体裁衣，避免顾此失彼。银行里顶尖的衍生品数理分析师和学术界高明的金融数学家为此创造的方法和模型层出不穷。尽管结果未必尽善尽美，有时难免头痛医头脚痛医脚，但是针对特定问题的偏方往往还是十分行之有效的。

伊曼纽尔•德曼（Emanuel Derman）是布莱克在高盛的下属，他俩曾和同事比尔•托依（Bill Toy）合作建立了著名的 BDT 短期利率模型，促进了固定收益衍生产品的发展。德曼发明了隐含二叉树的方法，用以处理股票波动率的微笑。二叉数其实是随机微分方程

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

的一种离散化结构。如图 1 所示，水平方向是时间，竖直方向是股价。在每个离散化时间区间上，股价 S_{n-1} 以概率 p_u 上涨至价位 $S_n = uS_{n-1}$，其中

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}},\quad P_u = (e^{r\Delta t} - d)/(u - d)\ ;$$

而以概率 $p_d = 1 - p_u$ 下跌至价位 $S_n = dS_{n-1}$，其中 $d = 1/u$ 。这样，到期日的股价 S_N 形成如下离散分布

$$P(S_N = u^k d^{N-k} S_o) = C_N^k P_u^k P_d^{N-k}.$$

当时间离散的步长足够小时，此离散分布充分地逼近随机微分方程的解。

从物理学家成功变为计量金融大师的伊曼纽尔•德曼

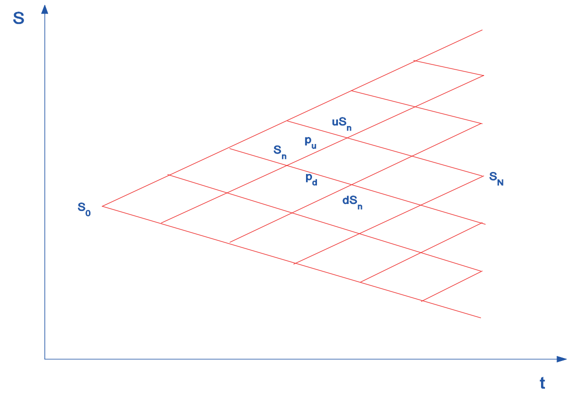


图 1 二叉树模型

二叉树方法与 BS 偏微分方程的差分方法紧密联系，异曲同工。读者请注意：由于波动率 σ 为常数，故股价变动系数 u 和 d 为常数，整棵二叉树呈现规则的形状。为了产生波动率微笑，德曼巧妙地允许二叉树发生变形（如图 2 所示），并且还随时随地调整上涨和下跌概率 p_u 和 p_d，使形变后的二叉树在时间方向上递进地满足市场上的隐含波动率微笑。德曼把 n 时刻上 S_n 的 n+1 个可能价位以及从 S_{n-1} 上涨达到相应的 S_n 的 n 个概率值 p_u 当成 2n+1 个待定变量，要求它们满足 2n+1 个方程，当中一部分方程由以 n 时刻为到期日的不同敲定价的期权的价格所订立。隐含二叉树故此得名。

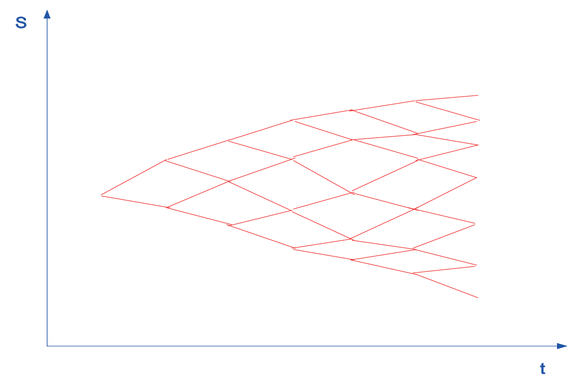


图 2 隐含二叉树模型

德曼系哥伦比亚大学物理学博士，曾在美英名校从事粒子理论研究。1985 年他离开 AT&T 贝尔实验室，加入高盛银行。BTD 模型和隐含二叉树模型分别是他在高盛固定收益部和股票部量化策略组的作品。德曼荣获国际金融工程协会颁发的“年度金融工程师”大奖，他的专业成就和江湖地位当然不可小觑，然而德曼却是在四十岁后才正儿八经地学习随机微积分的。他的工作少硬拼而多巧思，对于数

学的运用宁精勿滥。德曼认为物理模型面向自然界客观的变量，而金融模型面向金融市场主观的变量，前者力求用眼前信息精确推测未来，后者则往往只能从流动性高的证券的价格估计流动性低的产品的价值；物理学也许存在斯蒂芬•霍金（Stephen Hawking）曾追求的万有理论（Theory of Everything），但金融学和社会科学则是倘若能够取得一个一个有用的理论就值得庆幸了。

前文提及隐含波动率微笑的校准也可以作为偏微分方程的反问题来处理。布鲁诺•迪皮尔（Bruno Dupire）便是循着这条途径取得了十分漂亮的结果。为方便起见，我们姑且假设利率为零。迪皮尔把股价方程里的扩散系数 σ 当成时间 t 和股价 S 的函数 $\sigma(t,S)$，称之为局部波动率。如此一来，按照哈里森、克雷布斯和普利斯卡求风险中性测度下数学期望的方法，看涨期权价格可以表示为

$$C(T,K)=\int_0^\infty \max(S-K,0)\varphi_T(S)dS,$$

其中

$$\varphi_T(S)=\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T,K).$$

从福克 - 普朗克 - 柯尔莫哥洛夫方程出发，可推导出如下关系：

$$\frac{\sigma^2(T,K)}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}=\frac{\partial C}{\partial T},$$

即著名的迪皮尔方程。原则上局部波动率可以由这个方程直接解出，但实际操作起来却不轻松，因为市场上观察到的隐含波动率并非一个光滑完整的曲面，人们必须调用各种精细的数值方法以实现这个模型。

华尔街有一份高品位专业月刊叫做《风险杂志》。它在金融风险管理、衍生品业务以及金融监管等内容上具有极高的权威性。该杂志设有“前沿”专栏，刊登面向衍生品及量化风险管理的技术性文章，金融数学于此常登大雅之堂。迪皮尔关于局部波动率的文章便是刊登在 1994 年 1 月的“前沿”专栏。文章影响深远，似乎至今仍然独占该刊技术论文最高引用率之鳌头。《风险杂志》每年除了评选出各类业务的年度最佳金融机构以外，还专门评选出一位年度最佳数量分析师（Quant of the Year）。对于华尔街，这些奖项的意义就好比奥斯卡之于好莱坞。2008 年《风险杂志》给迪皮尔颁发了终身成就奖（Lifetime Achievement Award）。

布鲁诺•迪皮尔（Bruno Dupire）
2008 年被《风险杂志》授予终生成就奖

在局部波动率模型中，波动率 $\sigma(t,S_t)$ 的随机性是由股价 S_t 携带进来，间接产生的。在理论上它的优点是保持市场的完备性，就是说没有引入股价以外其他需要另外对冲的风险；在数值实现上它的优点是计算量小。波动率建模的另一种思路是，索性为股价瞬时的波动率引入新的随机性，甚至赋予它一个新的随机微分方程。这样的模型我们称为随机波动率模型，到今天已发展出各种各样的变化形式。但建立较早、应用广泛的是如下的斯蒂文•赫斯顿（Steven Heston）随机波动率模型：

$$dS_t=\mu S_t dt+\sqrt{\upsilon_t}S_t dW_t,$$
$$d\upsilon_t=\theta(\omega-\upsilon_t)dt+\xi\sqrt{\upsilon_t}dB_t$$

这里赫斯顿假设波动方差（即波动率的平方）υ_t 是一个均值回归过程，ω 为 υ_t 长期的平衡值，θ 为回归速率，ξ 为波动率之波动率。通过解概率分布特征函数所满足的微分方程，他推导出了该模型下期权价格的解析解公式（公式较长，此略去）。随机波动率模型的校准，是通过调整 ω，θ，ξ 以及布朗运动 W_t 和 B_t 的相关系数来实现的。这是一个多元非线性最小化问题，解析解的获得大大提高了目标函数赋值计算的效率。

多年前笔者和同事因工作需要动手对赫斯顿模型进行数值实现，碰到了两件事：一是如何把解析解扩展到系数随时间变化的情形，以便让模型能够吻合二维隐含波动率曲面；二是如何对解析解表达式中复变量对数函数进行赋值，因为算法若不精心设计，复对数的多值分支便会破坏解的连续性。当时距离赫斯顿模型的发表已经 10 年有余了，然而我们发现还有不少其他银行也正设法解决着同样的问题。这些问题的解法近年来有关文献已经将之公诸于众，不是本文重点。我想说的要点是：把数学应用于金融实践是具有颇深的工程性的，从基本理论到实际生产，有很多细腻的技术问题要解决，挑战着金融工程师的耐心和创造性。华尔街爱把金融数理分析家比作火箭科学家。这固然是美誉，但也应该视为鞭策：纸上谈兵不够，火箭飞上天才称得上名副其实。

对付波动率微笑，还有一种十分独特的方法，它和蒙特卡罗模拟（Monte Carlo simulation）紧密联系。蒙特卡罗模拟是用于定价特种期权的普适性最强的数值方法。它

首先在时间方向上对 S_t 的随机微分方程进行离散化，再按照方程所确定的转移概率分布，模拟出 M 条 S_t 的样本轨道 $S_n^{(m)},m=1,\cdots,M$，如图 3 所示。这里 n 代表第 n 个时间离散点。

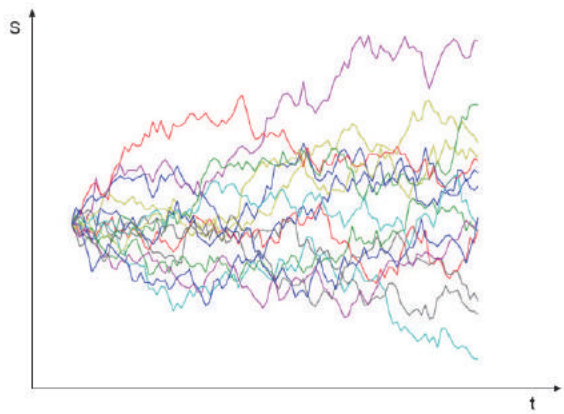


图 3　模拟特卡罗模拟的股价样本轨道

马可 • 阿韦亚内达（Marco Avellaneda）
2010 年《风险杂志》“年度数量分析师”

记期权的回报函数为 h，相应轨道的折现因子为 $D^{(m)}$，则期权的价格 P 可以逼近如下：

$$P=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}D^{(m)}h(S_n^{(m)},n=1,\cdots,N).$$

h 可以为 $S_n^{(m)}$ 的一个特殊的泛函，相应的期权可以比常规的看涨、看跌期权复杂得多，称为特种期权。蒙特卡罗方法的优点就在于回报函数的复杂性本质上不太增加定价的难度。而其他数值方法，包括有限差分方法和分叉树方法等，在这一点上则望尘莫及。上述期权价格 P 的表达式其实默认了每条样本轨道发生的概率均为 $p^{(m)}=\frac{1}{M}$。对此，纽约大学库朗数学研究所马可 • 阿韦亚内达（Marco Avellaneda）教授创造性地提出可以通过重新调整样本轨道的概率分配来使得轨道所代表的离散分布能够满足市场隐含波动率的要求。这是一个聪明的主意，可是为了取得充分的收敛效果，样本轨道数目 M 必须很大，而提供隐含波动率信息的高流动性期权合约的数目 N 通常却相对有限，用代数的语言讲，就是方程的数目远小于未知量的数目。为了使问题适定化，阿韦亚内达科学地引入了概率测度之间相对熵的度量（即测度间的“距离”），并对它进行带约束的最小化，即求解样本轨道新概率的 $q^{(m)}$，使得

$$\begin{cases}\min\limits_q D(p/q)\equiv\min\limits_q D\left(\ln M+\sum\limits_{m=1}^{m}q^{(m)}\ln q^{(m)}\right)\\ \sum\limits_{m=1}^{m}p^{(m)}Q_{mn}=C_n,\quad n=1,\cdots,N,\end{cases}$$

其中 $D(p/q)$ 表示概率测度 p 与 q 之间的相对熵，$\ln M$ 正好是 p 的熵，Q_{mn} 为第 n 件市场标准产品在轨道 m 发生时的收益。

阿韦亚内达不久前获颁《风险杂志》“年度数量分析师”的桂冠。《风险》将此头衔授予一位数学教授，无疑证明了学术界在数理金融学上的研究成果已经对业界产生了举足轻重的作用。

作者介绍：

刘小清，中国科学院应用数学博士，新加坡国立大学金融工程博士，曾于新加坡国立大学执教金融数学，目前在星展银行财资市场部任董事总经理。

几何之美 3

宗传明

本文受到国家 973 项目 2011CB302400，国家自然科学基金项目 11071003 和长江学者奖励计划的资助。
作者感谢贾朝华教授和项武义教授的润色建议。
通讯地址：cmzong@math.pku.edu.cn

引言

按照许多数学先哲（如庞加莱，哈代和冯·诺依曼等）的观点，数学不仅是一门科学，也是一门艺术。即数学也是一门追求独创和美的学问。

数学中确有一些艺术杰作：自然优美的问题，巧夺天工的构思，荡气回肠的结局。其独创性和优美程度绝不亚于柴科夫斯基的芭蕾舞剧或者雷诺阿的名画，只是对大众来说更难理解和欣赏而已。在这一系列短文中，我们将展示几何学中的几件“艺术珍品”。

对于一个数学家来说，欣赏学习他人的杰作不仅是为了（有可能）直接用到自己的工作中去，更重要的是为了提高修养，开阔眼界。从而使我们远离平庸，接近伟大。

本文将介绍 8 维球和 24 维球的牛顿数问题。这原本是一个百分之百的几何问题，经过看似风马牛不相及的联系，却最终由线性规划的方法完美解决。方法之巧妙，结果之意外，都不能不让人叹为观止。

Gregory-Newton 问题

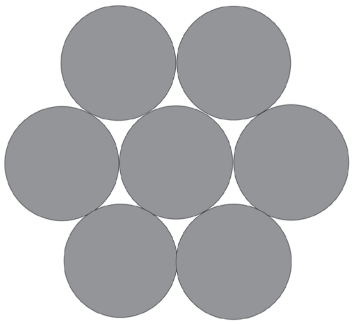
根据牛津大学 Christ Church 学院的文献记载，Gregory（1638-1675）和 Newton 在 1694 年讨论过如下问题：

> 一个球能同时跟 13 个同样大且内部互不相交的球相接触吗？

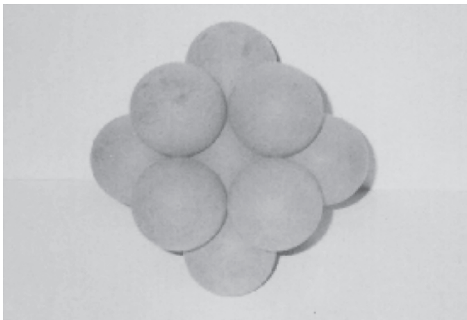
Gregory 相信“能”；Newton 则认为“不能”。那是在三个世纪以前，当时基督教几乎是每个欧洲人的信仰，所以有些作者也把这一学术讨论引申为“耶稣是否该有第十三个门徒”的争论。在有些文献中，这一问题也被称为十三球问题。

> Gregory 是一位杰出的数学家，对微积分有重要贡献。展开式
>
> $$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$
>
> 就是由他首先发现的（参见 [5]）。

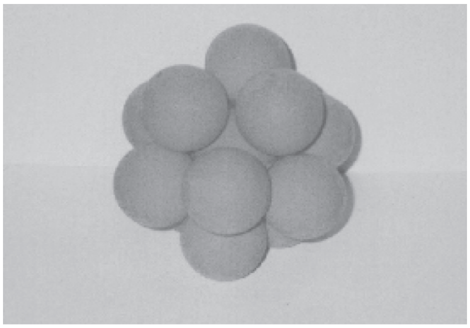
在桌面上摆放一角的硬币。容易看出，一个硬币能并且最多只能跟六个同样大小的硬币同时相切。



在此基础上，如下图所示我们很容易排放 12 个乒乓球同时跟一个乒乓球相切。容易看到，图中 12 个外切球的位置是相对固定的。



下图中也有 12 个球同时跟中间的一个相切。所不同的是，这 12 个球相互都不接触。这样，就有理由相信，通过适当移动这 12 个球可能会腾出足够的空间再加一个跟中间的球也相切的球。这就是 Gregory-Newton 问题的困难所在，也是 Kepler 猜想的困难所在。



2 难产的答案

在许多数学文献中，Hoppe 常被引述为第一个解决 Gregory-Newton 问题的数学家。事实上，他在 1874 年的证明是不完整的。直到 1953 年，通过运用图论的一些想法，Schütte 和 van der Waerden 才第一次解决了这一问题。答案如 Newton 所预言，是“不能”。

1956 年，Leech（1926-1992）发表了一个只有两页的证明。他的想法非常巧妙。

在三维空间，用 B 表示以坐标原点为中心的一个单位球，用 S 表示它的表面。假设最多有 v 个两两内部互不相交的单位球 $B+2\mathbf{x}_1$，$B+2\mathbf{x}_2$，$\cdots$，$B+2\mathbf{x}_v$ 可以同时与 B 相切。显然 $\mathbf{x}_i$ 都在 S 上。对于 S 上的任意两点 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$，我们用 $\|\mathbf{x}, \mathbf{y}\|'$ 表示它们之间的球面距离。由前面的假设容易看出

$$\|\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\|' \geq \pi/3$$

对所有不同的指标 i 和 j 都成立。

在 S 上构造一个以 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_v\}$ 为顶点的网络，其中 $\mathbf{x}_i$ 和 $\mathbf{x}_j$ 用大圆弧（测地线）相连当且仅当

$$\|\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\|' < \arccos\frac{1}{7}\ .$$

不失一般性，我们假设该网络不存在孤立点（否则可以移动孤立点至不孤立的位置）。这时，网络将球面 S 划分成了一系列球面多边形。容易验证网络中的每个角都大于 $\pi/3$。所以，在每一顶点最多有 5 条边相遇。

假设 P_n 是网络中的一个 n 边形，P 是一个最小可能面积的三角形（即每条边的长度都是 $\pi/3$），可以验证面积 $s(P_n)$ 满足

$$s(P_3) \geq 0.5512\cdots,$$
$$s(P_4) \geq 1.3338\cdots,$$
$$s(P_5) \geq 2.2261\cdots, \tag{1}$$

并且

$$s(P_n) \geq (n-2)s(P). \tag{2}$$

用 v，e，f 分别表示网络的点、线、面的个数，且用 f_n 表示其中 n 边形的个数。由 Euler 定理我们得到

$$\begin{aligned}2v-4&=2e-2f\\&=3f_3+4f_4+\cdots-2(f_3+f_4+\cdots)\\&=f_3+2f_4+3f_5+\cdots\end{aligned}$$

然后，比较球面的面积与多边形的面积之和，我们得到

$$\begin{aligned}4\pi&\geq 0.5512f_3+1.3328f_4+2.2261f_5+\cdots\\&=0.5512(f_3+2f_4+3f_5+\cdots)+0.2314f_4\\&\quad+0.5725f_5+\cdots\\&=0.5512(2v-4)+0.2314f_4+0.5725f_5+\cdots\end{aligned}$$

由此容易得出 $v\leq 13$，并且 $v=13$ 时必有 $f_4\leq 1$ 以及对所有 $n\geq 5$ 都有 $f_n=0$。

如果 $v=13$ 并且 $f_4=0$，这时得到的网络是一个三角刨分。比较所有的线数和点数，可以得到在某一点至少有 6 条边相遇。这与前面所得的结论相矛盾。

如果 $v=13$ 并且 $f_4=1$，通过比较线数和点数可以得出网络只在一个点有 4 条边，在所有其它点都有 5 条边。而这样的网络是不存在的。

所以，我们得到 $v\leq 12$，Newton 的预言是正确的。

1998 年，Aigner 和 Ziegler 出版了畅销书 Proofs from THE BOOK，其中有一章介绍了 Leech 的这一证明。不久作者收到了一封读者来信，求教如何导出 (1), (2) 等等。作者开始认为很简单，但是马上就陷入了困境。其实它们的证明细节写下来远比原来的证明还长。所以，在该书第二次印刷时作者把这一章删掉了。

进入新千年以来，Anstreicher，Böröczky，Ericson，Hsiang，Maehara，Musin 和 Zinoviev 又分别发表了对这一问题的新证明，其中有些就是对 Leech 证明的补充。

3 Delsarte 引理

1930 年，荷兰植物学家 Tammes 提出了如下问题：

Tammes 问题 在单位球的表面取 m 个点，试确定它们之间最小距离的可能最大值。

换句话说，在单位球的表面放置 m 个两两内部互不相交的等半径球冠，试确定球冠的最大半径。

这一问题有几种不同的解释。例如，在球面上放置 m 个相同的带电体。假设它们之间有极强的排斥力（该排斥力随距离增加而迅速减小）。在排斥力的作用下，这些带电体沿球面自由移动，最后达到一个平衡状态。试确定这些带电体在平衡状态时的相对位置。

Tammes 问题貌似简单，实际上却非常复杂。至今为止已知的精确结论仅有 $n\leq 12$ 和 $n=24$ 的情况。也许有人会奇怪，为什么一下从 12 跳跃到了 24。原因很简单，在三维空间存在具有 12 个顶点和 24 个顶点的正规多面体，而不存在具有 13 － 23 个顶点的正规多面体。即便如此，$n=24$ 情况的论证还是非常复杂。它是由 Robinson 于 1961 年解决的。论文发表在德国的《数学年刊》，长达 31 页。至于 $n=13$ 的情况，匈牙利数学家 Böröczky 和 Szabó 于 2003 年发表了一篇长达 73 页的论文也只能得到一个估计，可见其复杂程度。

在数学界，Robinson 是一个非常著名的姓氏。非标准分析的奠基人是 Abraham Robinson（1918-1974）；美国数学会第一任女主席，美国科学院第一位女院士是 Julia Robinson（1919-1985）。这里提到的是 Raphael M. Robinson（1911-1995），他是 Julia 的丈夫，是一位杰出的数学家，对逻辑学、数论、组合学、几何都做出过本质性的贡献。生前曾任加州大学伯克利分校教授，美国科学院院士。如下结论就是他的杰出数学贡献之一：

> n 维空间中存在一个没有共面对的立方体 k 重格平铺当且仅当下面的情况之一发生：
> **1.** $n=4$ 且 k 能被一个奇素数的平方所整除。
> **2.** $n=5$ 且 $k=3$ 或 $k\geq 5$。
> **3.** $n\geq 6$ 且 $k\geq 2$。

用 E^n 表示 n 维欧氏空间，B^n 表示以坐标原点为中心的 n 维单位球，S^n 表示它的表面，k_n 表示能与 B^n 同时相切且两两内部互不相交的 n 维单位球的最大个数，即 B^n 的牛顿数。显然，确定 k_n 的值即 n 维的 Gregory-Newton 问题。

假设 θ 是一个介于 0 和 $\pi/2$ 之间的实数。我们定义 $m(n,\theta)$ 为在 S^n 上两两之间的球面距离都不小于 θ 的点的最大个数。显然，

$$k_n = m\left(n, \tfrac{\pi}{3}\right). \tag{3}$$

设 α 和 β 均为大于 -1 的给定实数。那么由

$$p_k^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+\alpha}{i}\binom{k+\beta}{k-i}(x+1)^i(x-1)^{k-i}$$

所定义的一系列函数被称为 Jacobi 多项式。这是一类非常重要的特殊多项式，有许多好的性质。1972 年，Delsarte 发现了如下结论：

Delsarte 引理 取 $\alpha = (n-3)/2$ 并且定义

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i p_i^{\alpha,\alpha}(x),$$

其中 c_i 均非负且 $c_0 > 0$. 如果当 $-1 \le x \le \cos\theta$ 时均有 $f(x) \le 0$, 那么

$$m(n,\theta) \le \frac{f(1)}{c_0}.$$

这是一个天才的发现。这一引理主导了堆球理论近四十年的发展。其中的多项最主要进展都是建立在它的基础之上，从而形成了一套独特的方法——堆积理论中的线性规划方法。由于它的证明非常复杂，再加上我们希望给这一伟大发现增加一些神秘色彩，所以本文对此不作任何介绍。

这里的 Delsarte 并不是布尔巴基学派中的 Jean Delsarte，而是当代比利时数学家 Philippe Delsarte。他在比利时菲利普研究实验室工作，也在鲁汶大学任教。

4 Levenšhtein - Odlyzko - Sloane 定理

假设在 B^n 的格堆积（即平移向量构成一个格）中最多有 k_n^* 个单位球同时跟 B^n 相切。确定 k_n^* 的值是一个著名的数论问题。显然，我们有

$$k_n \ge k_n^*.$$

在 1970 年前后，Watson 通过研究正定二次型得到了如下结论。

Watson 定理

n	4	5	6	7	8	9
k_n^*	24	40	72	126	240	272

1964 年，John Leech 在 24 维欧氏空间发现了后来以他的名字命名的格（Leech 格）。这是一个伟大的发现，其重要性绝不亚于四元数。Leech 格有 196560 个最短向量，并有极好的对称性。它不仅导致了 8，315，553，613，086，720，000 阶单群（Conway 群）的发现（参看 Thompson 名著中的动人故事），也提供了 E^{24} 中最密和最紧的球堆积。

用 Leech 格的格点作为平移向量并以其最短向量长的一半作为球的半径构造一个球堆积，可以发现该堆积中每一个球与 196560 个球相切。这样，我们得到了

$$k_{24} \ge k_{24}^* \ge 196560. \tag{4}$$

John Leech 于 1926 年生于英格兰，早年求学于剑桥大学，获博士学位。之后，他从事数字计算机的研制和应用工作。1960 至 1980 年，他先后在苏格兰的格拉斯哥大学和斯特林大学任职。Leech 格是他在格拉斯哥大学任讲师时发现的，发表在 Canadian Journal of Mathematics。John Leech 于 1992 年在苏格兰去世。生前他没有得到应有的学术地位。但是，毫无疑问他的名字将伴随着 Leech 格在数学界流芳百世。

1979 年，Levenšhtein（1935-），Odlyzko（1949-），和 Sloane（1939-）证明了下面两个结论。其方法之精妙，结论之意外，让几乎所有的专家都目瞪口呆。

Levenšhtein - Odlyzko - Sloane 第一定理 在 E^8 中，一个单位球能且最多仅能跟 240 个两两内部互不相交的单位球同时相切。也就是说

$$k_8 = k_8^* = 240.$$

取 $\alpha=(8-3)/2=2.5$，并且将 $P_i^{\alpha,\alpha}(x)$ 简写为 P_i。定义

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{320}{3}(x+1)(x+\tfrac{1}{2})^2x^2(x-\tfrac{1}{2}) \\ &= P_0 + \tfrac{16}{7}P_1 + \tfrac{200}{63}P_2 + \tfrac{832}{231}P_3 + \tfrac{1216}{429}P_4 \\ &\quad + \tfrac{5120}{3003}P_5 + \tfrac{2560}{4641}P_6. \end{aligned}$$

容易验证，当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时 $f(x)$ 满足 Delsarte 引理的条件。所以，

$$k_8 = m(8, \tfrac{\pi}{3}) \le \frac{f(1)}{C_0} = 240.$$

莱文斯坦
Vladimir I. Levenšhtein（右）

这样，由 (3) 和 Watson 定理，我们就得到了

$$k_8=k_8^*=240.$$

Levenshtein - Odlyzko - Sloane 第二定理 *在 E^{24} 中，一个单位球能且最多仅能跟 196560 个两两内部互不相交的单位球同时相切。即*

$$k_{24}=k_{24}^*=196560.$$

取 $\alpha=(24-3)/2=10.5$，并且将 $P_i^{\alpha,\alpha}(x)$ 简写为 P_i。定义

$$\begin{aligned} f(x)&=\tfrac{1490944}{15}(x+1)(x+\tfrac{1}{2})^2(x-\tfrac{1}{16})^2x^2(x-\tfrac{1}{2})\\ &=P_0+\tfrac{23}{48}P_1+\tfrac{1144}{425}P_2+\tfrac{12992}{3825}P_3+\tfrac{73888}{22185}P_4\\ &\quad+\tfrac{2169856}{687735}P_5+\tfrac{59062016}{25365285}P_6+\tfrac{4472832}{2753575}P_7\\ &\quad+\tfrac{23855104}{28956015}P_8+\tfrac{7340032}{20376455}P_9+\tfrac{7340032}{80848515}P_{10}. \end{aligned}$$

容易验证，当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时 $f(x)$ 满足 Delsarte 引理的条件。所以，

$$k_{24}=m(24,\tfrac{\pi}{3})\le\frac{f(1)}{C_0}=196560.$$

由 (3) 和 (4)，我们得到了

$$k_{24}=k_{24}^*=196560.$$

也许有读者会认为，Levenšhtein，Odlyzko 和 Sloane 真是太幸运了。其实，在数学研究中，幸运只垂青那些努力做好了准备并且积极进取的人。水平不够是绝对不会成为幸运儿的。

Vladimir I. Levenšhtein 是一位杰出的数学家，任职于俄罗斯科学院应用数学研究所。它主要研究信息通讯中的数学问题，组合问题等。用 $\delta(B^n)$ 表示 n 维欧氏空间中球堆积的最大密度。1978 年，他与 Kabatjanski 合作证明了

$$\delta(B^n)\le 2^{-0.599n(1+o(1))}.$$

这是堆积理论中最重要的结论之一。三十多年来，没人能够进一步改进。

Andrew Odlyzko 于 1949 年生于波兰。曾在加州理工学院和麻省理工学院学习并于 1975 年获麻省理工学院博士学位。他是一位杰出的数学家，在数论、组合、密码、计算复杂度等领域都做出重要贡献。例如，1985 年他与荷兰数学家 H.J.J. te Riele 否定了 Mertens 于 1897 年提出的一个著名猜想。这一结果是近代数论最重要的成就之一。Odlyzko 曾任贝尔实验室数学与密码部的主任，现任明尼苏达大学数字技术中心主任。

欧德里考
Andrew Michael Odlyzko

注 1

对于堆球理论来说，8 维空间和 24 维空间确实非常特别。首先，当 $n \geq 5$ 时我们至今仅仅知道 k_8 和 k_{24} 的精确值。其次，在这两个空间中 $k_8 = 240$ 和 $k_{24} = 196560$ 所对应的最佳结构在旋转和对称等价的意义下都是唯一的。这是由 Bannai 和 Solane 证明的。值得注意的是，如第一节中所说，在三维空间中 $k_3 = 12$ 所对应的最佳结构在旋转和对称等价的意义下不是唯一的。

注 2

近半个世纪以来，人们难以确定四维球的牛顿数是 24 还是 25。直到 2008 年，Musin 才最终证明 $k_4 = 24$。这一工作的核心方法也是 Delsarte 引理，但技巧却异常复杂。

后记

许多年前，在维也纳的一次舞会上约翰 • 施特劳斯的夫人遇到了勃拉姆斯。寒暄之余，施特劳斯夫人递给勃拉姆斯一把纸扇，请他题字留念。勃拉姆斯略加思索，在扇面上飞快地写下了《蓝色多瑙河》的主旋律。正当施特劳斯夫人惊愕之际，他又在下面写道“可惜不是我作”。

参考文献

1. M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
2. P. Delsarte, Bounds for unrestricted codes by linear programming, *Philips Res. Rep.* **27** (1972), 272-289.
3. V.I. Levenštein, On bounds for packings in *n*-dimensional Euclidean space, *Soviet Math. Dokl.* **20** (1979), 417-421.
4. A.M. Odlyzko, N.J.A. Sloane, New bounds on the unit spheres that can touch a unit sphere in *n*-dimensions, *J. Combinat. Theory (A)* **26** (1979), 210-214.
5. W. Sharlau, H. Opolka, *From Fermat to Minkowski*, Springer-Verlag, New York, 1985.
6. T.M. Thompson, *From Error-Correcting Codes Through Sphere Packings to Simple Groups*, Math. Assoc. Amer., 1983.
7. C.M. Zong, *Sphere Packings*, Springer-Verlag, New York, 1999.

全文完

数学文化课程与数学传播

顾 沛

南开大学 2001 年 2 月起开设校公共选修课“数学文化”，至今已经连续开设十年了。数学文化课程的精髓是传授数学思想，是数学知识与数学精神的有机融合，是科学素质教育与人文素质教育的有机融合。

关于该课程开设的由来和发展，以及该课程的内容、讲授和效果，笔者另有文章谈及。本文则打算着重谈谈数学文化课在数学传播方面的意义和作用。这里所说的“数学传播”，主要指数学在非数学专业人群中的传播，包括在大、中、小学生和研究生中的传播，也包括在社会人士中的传播。

一、数学文化课在数学传播方面的意义

“数学文化”一词，其实是最近十多年才逐渐用得多起来的。之前在上个世纪的 90 年代初期，邓东皋、孙小礼、张祖贵及齐民友等学者分别出版了都以“数学与文化”为书名的书籍，这可以看作是“数学文化”一词使用的前奏。“数学文化”一词进入官方文件，最早是 2003 年中华人民共和国教育部颁发的《普通高中数学课程标准（实验）》。这个词的使用频率近年来大大增加，说明它是有生命力的。

本文所说的“数学传播”，不同于学校中正规的数学教育，不是以系统地讲授数学知识及其应用为主，而是以传播数学的思想、精神为中心。当然，数学的思想、精神不能单独地、空洞地传播，必定要以恰当的数学知识或者数学事件为载体；但是，这里不必过多地顾及数学知识的全面性、系统性和完整性，既可以涉及重大的数学结论、重大的数学事件，也可以涉及某些能够反映数学思想、精神的局部的数学结论和数学事件。即使是重大的数学结论、重大的数学事件，也主要着眼于以此为载体传播数学的思想、精神，不必给出全面的阐述和严格的证明。

南开大学的“数学文化”课程，定位为“校公共选修课”，面向所有专业的学生，以深浅适当的数学知识为载体，传授数学的思想、精神，与上述“数学传播”的思路是一致的。（南开大学的各个专业，包括所有的文科专业，另外还开设有“高等数学”必修课。）

由于“数学文化”一词使用的时间还不长，目前还没有看到哪本词典对其给出多数学者共识的定义。南开大学的“数学文化”课程，在“序言”课中对“数学文化”一词的内涵给出了狭义的和广义的两种解释：狭义的数学文

南开大学“数学之美”论坛现场

南开大学的校内刊物：《数学之美》

第二届全国高校数学文化课程建设研讨会会场；右上图：刘建亚； 左下图：蔡天新

化，是指数学的思想、精神、方法、观点、语言，以及它们的形成和发展；广义的数学文化，则除上述内涵以外，还包含数学家、数学史、数学美、数学教育、数学发展中的人文成分、数学与社会的联系、数学与各种文化的关系，等等。

关于“数学传播”的内容，笔者以为，在以恰当的数学知识或者数学事件为载体的基础上，也应该以数学的思想、精神为中心，可以包括数学的过去、现在和将来，也可以包括数学家的成长、贡献、人格，包括数学发展史上的重大事件、重大曲折和重大结果，包括数学美、数学教育，包括数学的应用，数学与生产、生活的关系，包括数学与其他学科的交叉、数学与其他文化的联系，等等。

由此看到，“数学文化”课程无论在思路上、宗旨上、定位上，还是内容上，与“数学传播”都是一致的，这就体现了数学文化课在数学传播方面的意义。也可以说，数学文化课是高校实施数学传播的一个得当的途径。今年6月，教育部公布了遴选出的103门“精品视频公开课”立项，将于今年秋季上线，面向社会大众免费开放。这103门课程中，数学类课程只有两门，就是南开大学的“数学文化”和北京航空航天大学的“数学大观”，都是数学文化类型的课程。这充分说明，数学文化课在数学传播方面具有重大的意义。

二、数学文化课在数学传播方面的作用

“数学文化”课程与“数学传播”思路的一致性，也使数学文化课在数学传播方面发挥着独特的作用，包括“课内”和“课外”两个方面的作用。

1.“课内”的作用

2008 年在郑州召开的数学文化会议；左三为本文作者，左五为李大潜院士

数学文化课不但在课程类型上不同于一般的数学课，以“校公共选修课”出现，供所有专业的学生选修，而且在课程内容的组织上也完全不同于一般的数学课。

一般的数学课，是以数学的知识系统为线索来组织教学的；而南开大学的“数学文化”课，则是从数学典故、数学问题、数学方法、数学观点、数学思想等角度切入，进行教学的。例如，历史上三次数学危机的典故、有限与无限的问题、类比的方法、抽象的观点、数学审美的思想，等等。该课程采用教师讲授、课堂讨论、学生演讲等多种师生互动的教学方法，激发了学生的积极性，为数学传播开创了一个新的途径。

一位学生写道：“数学文化课向我展示了数学极富魅力的一面。不是以往数学课上的定理、公式、计算和题海，而是数学的思想、精神和方法。我第一次用美学的眼光来看待数学；第一次了解到数学在各个领域所发挥的重要作用；第一次走进数学史的长河，去追随数学家的足迹；第一次体会到数学中浓郁的人文主义精神；第一次知道曾深刻影响人类社会发展进程的三次数学危机，希尔伯特的 23 个问题等等。”

学生通过选修这门课程，既把多年来学习的数学知识上升到观点、精神、方法、思想的层次上，又从文化和哲学的角度反观数学发展中的规律；既学习了历史上的重大数学事件，又学习了数学家的情感、品德和价值观；既了解到社会进步对数学的推动作用，又了解到数学发展对社会文明的推动作用。

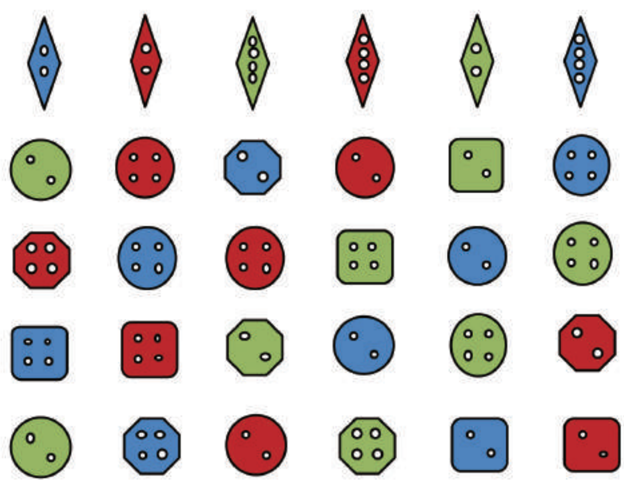
2.“课外”的作用

数学文化课带动了南开大学全校范围的三个数学传播活动的开展，即“数学文化节”、《数学之美》刊物、“数学之美”论坛，近几年还扩大到天津市其他高校。其中《数学之美》校内刊物的稿源来自大学生，特别是来自选修数学文化课的大学生，近年来也有少部分来自天津市其他高校的大学生。每一期《数学之美》的文章，还组织评选一、二、三等奖，由南开大学教务处在获奖证书上盖章颁奖。“数学之美”论坛则是《数学之美》的获奖文章向全校大学生报告的一个论坛。现在，《数学之美》刊物已经出到第 7 期了，“数学之美”论坛也已经举办 6 届了。

在大学生社会实践中，数学文化课的一些学生到农村中小学宣讲数学文化；一些学生到天津科技馆数学厅担任义务讲解员，都在社会上产生了数学传播的良好效果。

南开大学的数学文化课也被其他高校重视，包括北大、清华在内的百余所高校邀请我们去做数学文化讲座，数学传播的效益达到各类高校。

逐渐地，一些中小学也来邀请我们去做数学文化讲座。在对中小学学生的此类讲座中，我们深入浅出地传播着数学的思想、精神。例如，用“对一堆扣子的分类”来传播“集合”与“分类”的思想。给小学生一堆扣子，让他们自主分类。为了分类，他们首先必须选择“标准”，可以按“颜色”、“形状”、“扣眼个数”等不同的标准分，还可以先按



扣子的分类

照一种标准，再按照另一种标准分，以至调换这两种标准的顺序来分，等等。再例如，用“大足石刻的千手观音究竟有多少只手”的问题来传播“一一对应”的思想。由于千手观音的手很多很乱，一般的人去数时不是多数了就是少数了。聪明的工匠把一张张金箔贴在观音的手上，可以做到既不遗漏也不重复。然后去数所用金箔的张数。这应用的就是数学上“一一对应”的思想。

三、两届“全国高校数学文化课程建设研讨会”推动了数学传播

为了交流经验，提高数学文化课程的质量，也为了推广数学文化课程的理念和做法，我们于近四年先后组织举办了两届“全国高校数学文化课程建设研讨会”。这两次研讨会，也起到了推进数学传播的作用。

2008 年 7 月 13 日至 14 日，南开大学与高等教育出版社、全国理科高等数学研究会共同主办了首届“全国高校数学文化课程建设研讨会”，由郑州大学承办，有 110 多所高校，220 余名代表与会，北大、清华、复旦、中科大、浙江大学、上海交大、西安交大、哈工大、香港科技大学、台湾清华大学等一大批重点高校都有教师参会。

会议组织了李大潜院士、张奠宙教授和顾沛教授的 3 个专题报告，以及 18 个大会发言。与会代表反映，这些报告和发言内容充实，水平较高，使与会代表收获很大。《中国大学教学》、《大学数学》、《高等数学研究》和台湾的《通识在线》等杂志均报道了本次会议。

这次会议的一个直接效果是，又有更多的高校开设了数学文化课程。

2011 年 7 月 14 日至 15 日，南开大学又与教育部高等学校文化素质教育指导委员会、高等教育出版社共同主办了第二届“全国高校数学文化课程建设研讨会”，在天津南开大学举行，有 150 多所高校的 300 余位教师、学者参加了会议。与会代表中不但有北大、清华、复旦、中科大、浙江大学、南京大学、上海交大、哈工大等数十所 211 大学，以及美国密歇根大学和台湾世新大学的华人学者，又有大量的普通院校和地方高校，还有高职高专和广播电视大学。

会议组织了严加安院士、杨叔子院士、史宁中教授和顾沛教授的 4 个专题报告，以及 24 个大会报告。会议代表普遍反映，这次的第二届研讨会较之 2008 年的首届会议，规模更大，规格更高，发言的代表面更广，研讨的内容更加深入。一位老师说：“通过这次会议，数学文化课会在全国更多的学校生根、开花、结果。”

7 月 14 日中国广播网、人民网，7 月 23 日的《中国教育报》，7 月 23 日的《中国日报》，7 月 26 日的《科学时报》，8 月 11 日的《中国青年报》均报道了该研讨会。今年第 4、5 两期的《数学教育学报》分别刊登了该研讨会的 9 篇文章和 11 篇文章。今年第 8 期《中国大学教学》、第 3 期《中国数学会通讯》、第 5 期《高等数学研究》、第 5 期《大学数学》、10 月台湾的《通识在线》都详细报道了该研讨会。

复旦大学李大潜院士给大学生做数学文化讲座

数学文化小丛书

因此，这两次数学文化课程建设研讨会，对于数学传播起到了积极的作用，产生了广泛的影响。

四、中国学者对于数学文化教育意义的深刻认识，是数学传播在中国兴起的思想基础

数学文化类课程近十年来在中国蓬勃兴起，是一个值得关注的现象。现在，不仅许多大学在讲授数学文化类课程，不少中小学也在提倡数学文化的教学。并且，有关的词汇，也由过去的“数学与文化”，逐渐规范为现在的“数学文化”。

我们看到，中国学者对于数学文化的教育价值认识之深，开设该类课程的院校数量之多，相关教材和其他出版物的数量之大，数学文化的教育传播之广，在全世界都是少见的。特别是，一些高层次的学者起着积极推动数学传播的作用。除了前面提及的邓东皋、孙小礼、张祖贵及齐民友等学者分别出版了《数学与文化》，还有丁石孙院士主编的《数学小丛书》，后来张景中院士又出版了《数学家的眼光》等多种数学科普读物，萧树铁先生、张奠宙先生也很早就在高校教改中提倡数学文化，近年来李大潜院士花很大精力主编《数学文化小丛书》，丘成桐院士、杨乐院士、季理真教授主编《数学与人文》丛书，项武义先生，王梓坤、严加安、马志明、林群等几位数学的院士及非数学学科的“教育部高等学校文化素质教育指导委员会”主任杨叔子院士，都不但关心而且实践着数学文化的传播。以严加安院士为代表的《中国数学会通讯》编委会近两年举办“全国数学文化论坛”，也对数学文化传播产生着积极的作用。特别是数学大师陈省身先生，在生前不但关心和指导南开大学数学文化课的发展，并且在2003年拿出大量时间和精力，亲自策划、亲自设计，自己出资印刷发行了2004年的《数学之美》挂历，实践着数学传播。2010年刘建亚、汤涛等一些年富力强的数学家创刊的《数学文化》季刊在香港注册发行，也受到了大陆高校和社会人士的广泛欢迎。

笔者认为，“数学文化和数学传播近十多年在中国兴起”的局面出现，与20世纪90年代以来发展起来的、具有中国特色的教育理念，即“素质教育”的思想，是密切相关的。这种素质教育的思想，对于受教育者的全面发展和可持续发展，对于人的终身教育，都有着非常重大的意义，也很可能对全球高等教育的发展产生积极的影响。

愿我国高校的数学文化课程进一步发达兴旺，愿我国的数学传播事业进一步兴旺发达！

作者介绍：

顾沛，南开大学数学教授，首届国家教学名师，本刊编委。

漫画作者：康永君

华罗庚先生指导我优化五粮液

刘沛龙

1963 年，五粮液在国家的正式评酒会上，评酒专家们给了它很高的评价，对酒的感官评语是这样写的："香气悠久，味醇厚，入口甘美，入喉净爽，各味谐调，恰到好处。""在大曲酒中以酒味全面著称。"这就是五粮液传统工艺造就的美酒。在评酒会上，它冠盖群芳，名列前茅。

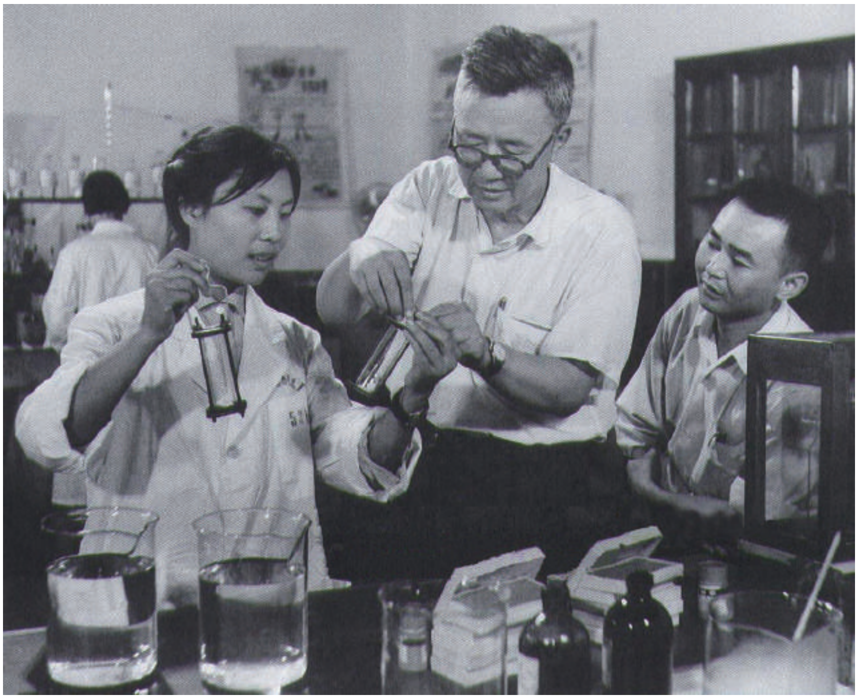
传统五粮液酒的酒度是 60 度，北方的大曲酒一般是 65 度，国际上的六大蒸馏酒（威士忌、白兰地、伏特加、金酒、朗姆酒、中国白酒）除中国白酒之外，其酒度都比较低，基本上都在 40 度左右或以下。传统的中国白酒酒度高是其特点。

1972 年，五粮液酒厂接到湖北粮油食品进出口公司公函称，五粮液近年出口量下降，主要原因是酒度太高，希望能降低酒度，更好的满足外商的要求。按此要求，五粮液酒厂立即组织科研试验。经过 6 年的艰苦努力，探索过许多方法，始终没有满意的结果。直到 1978 年下半年，五粮液酒厂仍然拿不出低度酒来供应国际市场。低度酒不是说多掺点水就成了的，因为水增加，酒质就要变，酒色也要变浑，酒的香气也可能变差。低度酒要求是不能有水味，不能浑浊，不能失掉五粮液的风格和特色。这是摆在五粮液酒厂多年未能解决的难题。

1978 年 10 月，中国科学院副院长、著名数学家华罗庚教授率队来四川推广"统筹法"、"优选法"。在推广"双法"中，我被抽在五粮液酒厂"推广双法"办公室工作，但不脱离本职技术工作岗位。我带着问题认真学习优选法和统筹法。优选法和统筹法凝结着华罗庚教授的心血和智慧，在各个领域推广都取得显著效果。在推广"双法"中，我们结合实际，认真学习优选法，并在五粮液出口酒的降度试验中应用"0.618 法"和"瞎子爬山法"，对酒度和温度进行试验，大大缩短了研究中的试验次数。

降低酒度的关键是要保持好酒的外观和基本风格。因为，酒度降低以后，酒中所含醇溶性的高级脂肪酸乙酯会因溶解度降低而析出，导致酒体浑浊，影响外观。酒中含量比较大的高级脂肪酸乙酯是棕榈酸乙酯、油酸乙酯、亚油酸乙酯等。而这些高级脂肪酸乙酯在酒中的溶解度除与酒度相关以外，同时还与温度相关。因此，酒度和温度是两个十分重要的因素。解决好以上两个重要因素之后，要保持好酒的风格，同时还要作精心的调味。

首先，我们用优选法对低度酒的最佳度数进行优选。从 1978 年 10 月 25 日到 10 月 30 日，一个星期，在酒度 50 度和 30 度之间，用 0.618 法进行优选，确定了 38 度和 35 度这两个最佳度数。然后，我们又用华罗庚优选



法对降度后的浑浊进行低温处理的最佳低温点的试验。用“瞎子爬山”，一步一步地摸，一步又一步地爬，用低温对酒进行实验。我们把 38 度和 35 度的酒放到冰箱中去，静候着它的变化。一天下来，太阳已经疲惫下山去了。接班的月亮已经升起。我们还守在冰箱旁。试验在反复进行。我细心地观察着不同温度点酒中的析出物至浊的情况及状态。这期间，五粮液酒厂化验室的主要设备已迁至南岸生产车间，在那间地处郊外的化验室，凌晨 3 点钟了，郊外的原野一片寂静，寒气袭人，困倦逞凶，但我总不敢闭闭自己的眼睛，那怕是眨一眨，也得赶紧睁开，认真地不断观察其变化，生怕失去那最佳的一刹那。

时钟指向凌晨 3 点 30 分，我用手再次擦了擦自己的眼睛，再一次取出冰箱中的低度酒来观察。至浊程度和析出物状态已达到预期效果。经过滤处理后，手中的酒晶莹、剔透，像 52 度那么无色透明。细细品尝，酒的基本风格特点保持较好。我真想欢呼“成功了！”但还是再次将酒拿到灯光下，认真观察。果然不错。水银温度计显示的品温为 −3℃。好，就是这个温度点，这就是我们求得的最佳温度点！之后，我们又将一批高度酒进行降度，将酒度降至 38 度和 35 度，再将酒温降到摄氏零下 3 度，在此温度点上进行过滤，再次获得了满意的重现效果！

我们将这批新试验成功的低度酒灌装了三瓶，没有贴商标，我用小长方块白纸，用钢笔工整地写上“六年未成功，双法出成果”，写了三张，分别贴在三个瓶上。这三瓶酒被送到成都向省推广“双法”会战指挥部和华罗庚教授报喜。

华罗庚先生在成都看到了这个酒，品尝了这个酒。他非常高兴，非常兴奋！他看到了“双法”在传统产业上得到推广后发挥的巨大作用！华先生兴致很浓，马上通知四川省推广“双法”会战指挥部给五粮液酒厂发电文祝贺。电文称 :“宜宾地科委转推广双法会战指挥部并五粮液酒厂 : 欣闻五粮液酒厂在酿造工艺上成功地应用优选法使五粮液名酒出口量增加百分之五十，全年节约粮食五万余斤，全年增产价值五万余元，酒的浓度由原来的 52 度降至 38 度至 35 度，超过出口质量指标要求，为中外驰名的五粮液增添新的光彩，谨致热烈祝贺，并望再接再厉，争取更大胜利。赠诗一首 :“名酒五粮液，优选味更醇。省粮五百担，产量增五成。华罗庚 1978 年 11 月 8 日晚”。他还把酒转给了时任四

川省委书记杨超同志品尝，杨超同志见到这个成果，也非常高兴。

1978年11月20日，华罗庚教授又亲自给五粮液酒厂写信："宜宾五粮液酒厂：省推广双法会战指挥部推广组送来样酒三瓶，我们亲眼见到了名酒五粮液的优选成果，非常高兴，并已转杨超书记品尝去了。我在此热烈祝贺你们的胜利！"。就在当日，华罗庚教授又欣然命笔，再题诗一首。并对原电文中的赠诗作了字斟句酌的修改（"省粮五百担"改为"节粮五百担"，"产量增五成"改为"产量添五成"）后合并其中。"节"对"省"的替代，"添"对"增"的替代，有着严格的数学意义，华罗庚教授严谨的治学精神也跃然其间。全诗如下：

赠宜宾五粮液酒厂

名酒五粮液，
优选味更醇，
节粮五百担，
产量添五成。
豪饮李太白，
雅酌陶渊明，
深恨生太早，
只能享老春。

1978年金秋十月，我们收获了：我们收获的是在中国白酒行业中的划时代成果，并引导了我国白酒低度化的市场消费！从此，五粮液酒可以自由降度了，五粮液酒厂的产品在国际国内市场上有了不同度数的中、低度规格品种了！生产得以发展，品种得到完善，出口对酒度的要求解决了。由此，获得了巨大的持续经济效益。这完全归功于华罗庚教授的优选法，使我们的研究进程得以大大缩短。从1965年开始，华罗庚教授就致力于在工农业生产领域推广统筹法和优选法。是华罗庚教授将数学理论与生产实践紧密结合，在中国的广袤大地上，到处都留有他推广优选法与统筹法的艰辛足迹。我国工农业生产到处都有"双法"结出的硕果！这位人民的数学家为他钟爱的数学事业奉献了毕生精力和汗水。

1985年6月12日，华罗庚教授在日本讲学时，突然倒在东京大学的讲台上溘然长逝，走完了他的数学人生。他生前就说过这样的话，宁肯死在工作岗位上，不愿死在病床上。这就是华罗庚教授的伟大人生！今年11月12日是华罗庚教授诞辰100周年纪念日，我们谨以此文纪念伟大的人民数学家——华罗庚！正如中国科学院院士、曾师从华罗庚的数学家王元撰文说："华先生的一生就是一本大书，值得我们永远认真地学习。"

写于2010年

作者介绍：

刘沛龙，原九三学社宜宾市委副主委、四川省政协委员；宜宾五粮液集团公司原总工程师，主持制定、审定了五粮液集团公司2004年12月之前白酒类全部新产品的企业标准。

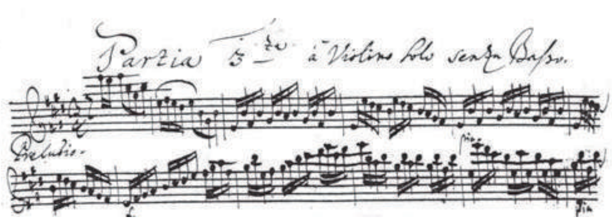
不确定性原理的前世今生

木遥

在现代数学中有一个很容易被外行误解的词汇：信号（signal）。当数学家们说起“一个信号”的时候，他们脑海中想到的并不是交通指示灯所发出的闪烁光芒或者手机屏幕顶部的天线图案，而是一段可以具体数字化的信息，可以是声音，可以是图像，也可是遥感测量数据。简单地说，它是一个函数，定义在通常的一维或者多维空间之上。譬如一段声音就是一个定义在一维空间上的函数，自变量是时间，因变量是声音的强度，一幅图像是定义在二维空间上的函数，自变量是横轴和纵轴坐标，因变量是图像像素的色彩和明暗，如此等等。

在数学上，关于一个信号最基本的问题在于如何将它表示和描述出来。按照上面所说的办法，把一个信号理解成一个定义在时间或空间上的函数是一种自然而然的表示方式，但是它对理解这一信号的内容来说常常不够。例如一段声音，如果单纯按照定义在时间上的函数来表示，它画出来是这个样子的：

这通常被称为波形图。毫无疑问，它包含了关于这段声音的全部信息。但是同样毫无疑问的是，这些信息几乎没法从上面这个“函数”中直接看出来，事实上，它只不过是巴赫的小提琴无伴奏 Partita No.3 的序曲开头几个小节。下面是巴赫的手稿，从某种意义上说来，它也构成了对上面那段声音的一个“描述”：



这两种描述之间的关系是怎样的呢？第一种描述刻划的是具体的信号数值，第二种描述刻划的是声音的高低（即声音震动的频率）。人们直到十九世纪才渐渐意识到，在这两种描述之间，事实上存在着一种对偶关系，而这一点并不显然。

1807 年，法国数学家傅立叶（J. Fourier, 1768-1830）在一篇递交给巴黎科学院的革命性论文 Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides（《固体中的热

传播》）中，提出了一个崭新的观念：任何一个函数都可以表达为一系列不同频率的简谐振动（即简单的三角函数）的叠加。有趣的是，这结论是他研究热传导问题的一个副产品。这篇论文经拉格朗日（J. Lagrange, 1736-1813）、拉普拉斯（P.-S. Laplace，1749-1827）和勒让德（A.-M. Legendre, 1752-1833）等人审阅后被拒绝了，原因是他的思想过于粗糙且极不严密。1811 年傅立叶递交了修改后的论文，这一次论文获得了科学院的奖金，但是仍然因为缺乏严密性而被拒绝刊载在科学院的《报告》中。傅立叶对此耿耿于怀，直到 1824 年他本人成为了科学院的秘书，才得以把自己 1811 年的论文原封不动地发表在《报告》里。

用今天的语言来描述，傅立叶的发现实际上是在说：任何一个信号都可以用两种方式来表达，一种就是通常意义上的表达，自变量是时间或者空间的坐标，因变量是信号在该处的强度，另一种则是把一个信号"展开"成不同频率的简单三角函数（简谐振动）的叠加，于是这就相当于把它看作是定义在所有频率所组成的空间（称为频域空间）上的另一个函数，自变量是不同的频率，因变量是该频率所对应的简谐振动的幅度。

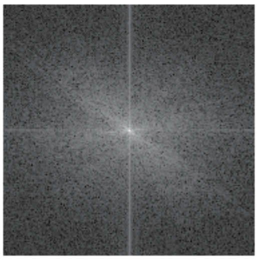
这两个函数一个定义在时域（或空域）上，一个定义在频域上，看起来的样子通常截然不同，但是它们是在以完全不同的方式殊途同归地描述着同一个信号。它们就像是两种不同的语言，乍一听完全不相干，但是其实可以精确地互相翻译。在数学上，这种翻译的过程被称为"傅立叶变换"。

傅立叶变换是一个数学上极为精美的对象：

* 它是完全可逆的，任何能量有限的时域或空域信号都存在唯一的频域表达，反之亦然。
* 它完全不损伤信号的内在结构：任何两个信号之间有多少相关程度（即内积），它们的频域表达之间也一定有同样多的相关程度。
* 它不改变信号之间的关联性：一组信号收敛到一个特定的极限，它们的频域表达也一定收敛到那个极限函数的频域表达。

傅立叶变换就像是把信号彻底打乱之后以最面目全非的方式复述出来，而一切信息都还原封不动的存在着。要是科幻小说作家了解这一点，他们就可以多了很多有趣的素材。

在傅立叶变换的所有这些数学性质中，最不寻常的是这样一种特性：一个在时域或空域上看起来很复杂的信号（譬如一段声音或者一幅图像）通常在频域上的表达会很简单。这里"简单"的意思是说作为频域上的函数，它只集中在很小一块区域内，而很大一部分数值都接近于零。例如下图是一张人脸和它对应的傅立叶变换，可以看出，所有的频域信号差不多都分布在中心周围，而大部分周边区域都是黑色的（即零）。

这是一个意味深长的事实，它说明一个在空域中看起来占满全空间的信号，从频域中看起来很可能只不过占用了极小一块区域，而大部分频率是被浪费了的。这就导出了一个极为有用的结论：

一个看起来信息量很大的信号，其实可以只用少得多的数据来加以描述。只要对它先做傅立叶变换，然后只记录那些不接近零的频域信息就可以了，这样数据量就可以大大减少。

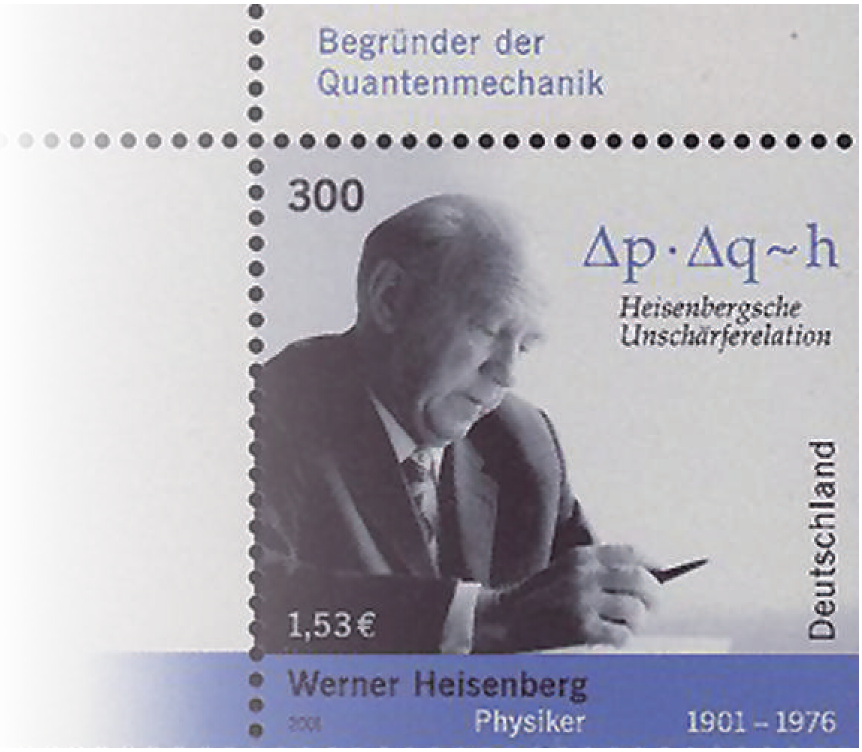
基本上，这正是今天大多数数据压缩方法的基础思想。在互联网时代，大量的多媒体信息需要在尽量节省带宽和时间的前提下被传输，所以数据压缩从来都是最核心的问题之一。而今天几乎所有流行的数据压缩格式，无论是声音的 mp3 格式还是图像的 jpg 格式，都是利用傅立叶变换才得以发明的。从这个意义上说来，几乎全部现代信息社会都建立在傅立叶的理论基础之上。

这当然是傅立叶本人也始料未及的。

傅立叶变换这种对偶关系的本质，是把一块信息用彻底打乱的方式重新叙述一遍。正如前面所提到的那样，一个信号可能在空域上显得内容丰富，但是当它在频域上被重新表达出来的时候，往往就在大多数区域接近于零。反过来这个关系也是对称的：一个空域上大多数区域接近于零的信号，在频域上通常都会占据绝大多数频率。

有没有一种信号在空域和频域上的分布都很广泛呢？有的，最简单的例子就是噪声信号。一段纯粹的白噪声，其傅立叶变换也仍然是噪声，所以它在空域和频域上的分布都是广泛的。如果用信号处理的语言来说，这就说明"噪声本身是不可压缩的"。这并不违反直觉，因为信号压缩的本质就是通过挖掘信息的结构和规律来对它进行更简洁的描述，而噪声，顾名思义，就是没有结构和规律的信号，自然也就无从得以压缩。

另一方面，有没有一种信号在空域和频域上的分布都



海森堡不确定性原理的纪念邮票

很简单呢？换句话说，存不存在一个函数，它在空间上只分布在很少的几个区域内，并且在频域上也只占用了很少的几个频率呢？（零函数当然满足这个条件，所以下面讨论的都是非零函数。）

答案是不存在。这就是所谓的 uncertainty principle（不确定性原理）。

这一事实有极为重要的内涵，但是其重要性并不容易被立刻注意到。它甚至很不直观：大自然一定要限制一个信号在空间分布和频率分布上不能都集中在一起，看起来并没有什么道理啊。

这个原理可以被尽量直观地解释如下：所谓的频率，本质上反应的是一种长期的全局的趋势，所以任何一个单一的频率，一定对应于一个在时空中大范围存在的信号。反过来，任何只在很少一块时空的局部里存在的信号，都存在很多种不同的长期发展的可能性，从而无法精确推断其频率。

让我们仍然用音乐来作例子。声音可以在时间上被限制在一个很小的区间内，譬如一个声音只延续了一刹那。声音也可以只具有极单一的频率，譬如一个音叉发出的声音（如果你拿起手边的固定电话，里面的拨号音就是一个 440Hz 的纯音加上一个 350Hz 的纯音，相当于音乐中的 A-F 和弦）。但是不确定性原理告诉我们，这两件事情不能同时成立，一段声音不可能既只占据极短的时间又具有极纯的音频。当声音区间短促到一定程度的时候，频率就变得不确定了，而频率纯粹的声音，在时间上延续的区间就不能太短。因此，说“某时某刻那一刹那的一个具有某音高的音”是没有意义的。

这看起来像是一个技术性的困难，而它实际上反映出却是大自然的某种本质规律：任何信息的时空分辨率和频率分辨率是不能同时被无限提高的。一种波动在频率上被我们辨认得越精确，在空间中的位置就显得越模糊，反之亦然。

这一规律对于任何熟悉现代多媒体技术的人来说都是熟知的，因为它为信号处理建立了牢不可破的边界，也在某种程度上指明了它发展的方向。既然时空分辨率和频率分辨率不能同时无限小，那人们总可以去研究那些在时空分布和频率分布都尽量集中的信号，它们在某种意义上构成了信号的“原子”，它们本身有不确定性原理所允许的最好的分辨率，而一切其他信号都可以在时空和频率上分解为这些原子的叠加。这一思路在四十年代被 D. Gabor（他后来因为发明全息摄影而获得了 1971 年的诺贝尔物理奖）所提出，成为整个现代数字信号处理的奠基性思想，一直影响到今天。

但是众所周知，不确定性原理本身并不是数学家的发明，而是来自于量子物理学家的洞察力。同样一条数学结论

可以在两个截然不相干的学科分支中都产生历史性的影响，这大概是相当罕见的例子了。

不确定性原理事实上不是一个单独的定理，而是一组定理的统称。基本上，凡是刻划一个信号不能在时空域和频域上同时过于集中的命题都可以称为不确定性原理，由于这里“集中”这一性质可以有不同的数学描述，也就对应着不同的数学定理。但是在所有冠以“不确定性原理”之名的定理中，最著名的当然是海森堡（W. Heisenberg, 1901-1976）在1927 年所提出的影响物理学发展至深的那个版本。它精确的数学描述是：

> 假定一个信号的总能量为 1，则这个信号和它的傅立叶变换的能量的方差之积不小于 $1/16\pi^2$。

换言之，两者各自的能量都可能很集中，但是不能同时很集中。如果时空域中能量的方差很小（亦即集中在一起），那么频域上能量的方差就不会太小（亦即必然会弥散开），反之亦然。

对这个定理在量子物理中的意义的详细讨论超出了本文的话题范围，坊间相关的著作已有不少。不过，下面简单罗列了一些相关的历史事实：

1. 海森堡在 1927 年的那篇文章的标题为 Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik（《量子理论运动学和力学的直观内容》）。这篇文章很大程度上是对薛定谔（E. Schrödinger, 1887-1961）在 1926 年所提出的薛定谔波动方程的回应。相较于海森堡的矩阵力学而言，薛定谔的方程很快由于它物理上的直观明晰而吸引了越来越多物理学家的赞赏。海森堡对此极为失落。他在 1926 年 6 月 8 日给泡利（W. Pauli, 1869-1955）的信中说：“我对薛定谔的理论想得越多就越觉得恶心。”因此，他迫切需要给他自己的理论配上一幅更直观的图象。
2. 海森堡的这篇文章提出了后来被人们所熟悉的关于为什么无法同时测量一个电子的位置和动量的解释，但是并未给出任何严格的数学证明。他把他的结论笼统地表达为 $\Delta x\,\Delta p \geq \hbar$，其中 x 是位置，p 是动量，$\hbar$ 是普朗克常数。但他并没有详细说明 Δx 和 Δp 的严格意思，只针对若干具体情形做了一些直观的讨论。
3. 第一个从数学上证明不确定性原理的物理学家是 E. Kennard。他在 1927 年证明了文章开头所描述的定理，指出 Δx 和 Δp 的数学意义其实是方差。这种解释很快就成了海森堡不确定性原理的标准数学表达，海森堡本人于 1930 年在芝加哥所做的演讲中也使用了这种数学推导来佐证自己的立论。需要说明的是，海森堡尽管很快接受了这一数学解释，但是后来人们发现他本人原先的论文里所举的例子中，有很多被他用 Δx 和 Δp 笼统概括的含混概念很难被解释成方差。在他心目中，不确定性原理首先是一个经验事实，其次才是一个数学定理。
4. 海森堡并未将他的发现命名为不确定性“原理”，而只是称之为一种“关系”。爱丁顿（A. Eddington, 1882-1944）在 1928 年似乎第一个使用了原理一词，他将之称为 principle of indeterminacy， 后来 uncertainty principle 这种说法才渐渐流行起来。海森堡本人始终称之为 ungenauigkeitsrelationen/unbestimmtheitsrelationen（这相当于英语的 inaccuracy/indeterminacy relations），直到五十年代才第一次接受了 principle 这种叫法。

有趣的是，即使很多信号处理或者量子力学领域的专家也不知道自己平时所讨论的不确定性原理和对方的其实是一回事。这两者之间的联系也的确并不太显然，一个关注信号的时空和频域分布，一个关注粒子的运动和能量。它们之间的相关性只有从数学公式上才看起来比较明显。在海森堡的时代当然并不存在“信号处理”这一学科，数学家们也只把不确定性原理当作一条纯数学的结论来对待。他们什么时候最先注意到这一定理并不是很清楚。有记录表明维纳（N. Wiener, 1894-1964）于 1925 年在哥廷根的一次讲座中提到了类似的结论，但是那次讲座并没有任何书面材料流存下来。外尔（H. Weyl, 1885-1955）在1928 年名为《群论与量子力学》的论著中从数学上证明了这一定理，但他将之归功于泡利的发现。直到 1946 年D. Gabor 的一篇名为《通讯理论》的经典论文才真正让这个定理以今天信号处理领域的专家们所熟悉的方式流传开来。

正如前面说过的那样，在数学上不确定性原理不仅仅有海森堡这一个版本，而其实是一组定理的统称。譬如哈代（G. Hardy, 1877-1947）在 1933 年证明了一个和海森堡原理类似的定理，今天一般称为哈代不确定性原理。海森堡和哈代的定理都只约束了信号在时空域和频域的大致分布，而并没有限制它们同时集中在有限大的区域内。M. Benedicks 第一个证明了信号在时空域和频域中确实不能同时集中在有限大的区域内，而这已经是 1974年的事情了。

到二十世纪末，人们对“信号”这个词的理解已经发生了微妙的变化。如果在二十世纪上半叶的时候提到一个信号，人们还倾向于将它理解为一个连续的函数。而到下半叶，信号已经越来越多地对应于一个离散的数组。毫无疑问，这是电子计算机革命的后果。

在这样的情形下，“不确定性原理”也有了新的形式。在连续情形下，我们可以讨论一个信号是否集中在某个区域内。而在离散情形下，重要的问题变成了信号是否集中在某些离散的位置上，在其余位置上信号的值是零。数学家给出了这样一个有趣的定理：

> *一个长度为 N 的离散信号中有 a 个非零数值，而它的傅立叶变换中有 b 个非零数值，那么 $a+b \geq 2\sqrt{N}$ 。*

也就是说一个信号和它的傅立叶变换中的非零元素不能都太少。毫无疑问，这也是某种新形式的“不确定性原理”。

在上面的定理中，如果已知 N 是素数，那么我们甚至还可以有强得多的结论（它是 N. Chebotarev 在 1926 年证明的一个定理的自然推论）：

> *一个长度为素数 N 的离散信号中有 a 个非零数值，而它的傅立叶变换中有 b 个非零数值，那么 $a+b > N$。*

不幸的是这里“素数”的条件是必须的。对于非素数来说，第二条命题很容易找到反例，这时第一条命题已经是能够达到的最好结果了。

这些定理有什么用呢？如果它仅仅能用来说明某些事情做不到，就像它字面意思所反映出的那样，那它的用处当然相对有限。可是——这无疑是辩证法的一个好例证——这样一系列宣称“不确定”的定理，事实上是能够用来推出某些“确定”的事实的。

设想这样一种情况：假定我们知道一个信号总长度为 N，已知其中有很大一部分值是零，但是不知道是哪一部分（这是很常见的情形，大多数信号都是如此），与此同时，我们测量出了这个信号在频域空间中的 K 个频率值，但是 $K<N$（也就是我们的测量由于某些原因并不完整，漏掉了一部分频域信息）。有没有可能把这个信号还原出来呢？

按照传统的信号处理理论，这是不可能的，因为正如前面所说的那样，频域空间和原本的时空域相比，信息量是一样多的，所以要还原出全部信号，必须知道全部的频域信息，就像是要解出多少个未知数就需要多少个方程一样。如果只知道一部分频域信息，就像是只知道 K 个方程，却要解出 N 个未知数来，任何一个学过初等代数的人都知道，既然 $K<N$，解一定是不唯一的。

但是借助不确定性原理，却正可以做到这一点！原因是我们关于原信号有一个“很多位置是零”的假设。那么，假如有两个不同的信号碰巧具有相同的 K 个频率值，那么这两个信号的差的傅立叶变换在这 K 个频率位置上就是零。另一方面，因为两个不同的信号在原本的时空域都有很多值是零，它们的差必然在时空域也包含很多零。不确定性原理（一个函数不能在频域和时空域都包含很多零）告诉我们，这是不可能的。于是，原信号事实上是唯一确定的！

这当然是一个非常违反直觉的结论。它说明在特定的情况下，我们可以用较少的方程解出较多的未知数来。这件事情在应用上极为重要。一个简单的例子是医学核磁共振技术（很多家里有重病患者的朋友应该都听说过这种技术）。核磁共振成像本质上就是采集身体图像的频域信息来还原空间信息。由于采集成本很高，所以核磁共振成像很昂贵，也很消耗资源。但是上述推理说明，事实上核磁共振可以只采集一少部分频域信息（这样成本更低速度也更快），就能完好还原出全部身体图像来，这在医学上的价值是不可估量的。

在今天，类似的思想已经被应用到极多不同领域，从医学上的核磁共振和 X 光断层扫描到石油勘测和卫星遥感。简而言之：不确定性可以让测量的成本更低效果更好，虽然这听起来很自相矛盾。

糟糕的是，本篇开头所描述的那个不确定性定理还不够强，所能带来的对频域测量的节省程度还不够大。但是数学上它又是不可改进的。这一僵局在本世纪初被打破了。E. Candès 和陶哲轩等人证明了一系列新的不确定性原理，大大提高了不等式的强度，付出的代价是……随机性。他们的定理可以粗略叙述为：

> *一个长度为 N 的离散信号中有 a 个非零数值，而它的傅立叶变换中有 b 个非零数值，那么 $a+b$ 以极大概率不小于 $N/\sqrt{\log N}$ 乘以一个常数。*

这里的“极大概率”并不是一个生活用语，而是一个关于具体概率的精确的数学描述。换言之，虽然在最倒霉的情况下不确定性可以比较小，但是这种情况很罕见。一般来说，不确定性总是很大，于是可以带来的测量上的节约也很大。

这当然也是一种“不确定性原理”，而且因为引入了随机性，所以在某种意义上来说比原先的定理更“不确定”。在他们工作的基础上，一种被称为“压缩感知”的技术在最近的五六年内如火如荼地发展起来，已经成为涵盖信号处理、信息提取、医学成像等等多个工程领域的最重要的新兴工程技术之一。

不过，这些后续的发展估计是远远超出海森堡的本意了。

聊聊数学家的故事

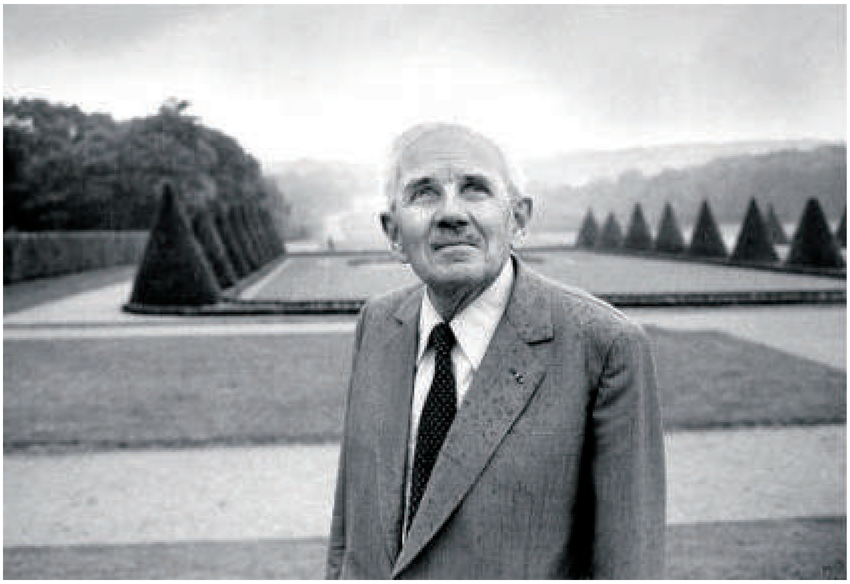
ukim
（连载七）

写给那些，喜欢数学和不喜欢数学的人们
写给那些，了解数学家和不了解数学家的人们

故事三十四 :数学家和监狱（1）

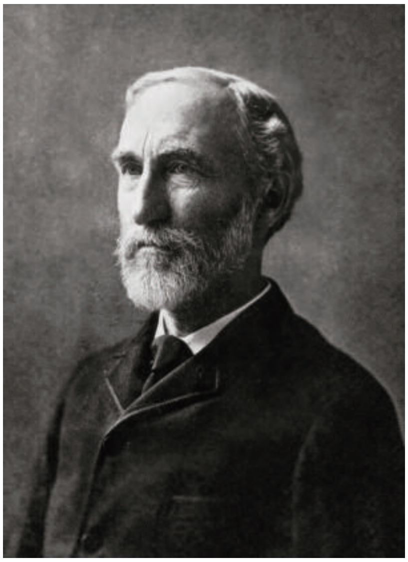
说几个和监狱有关系的事情，做数学这个东西的确不同于很多学科，只要有一个场所可以供以静坐，有纸笔可以演算，这个世界的一切都无所谓。

最最著名的故事就是关于勒雷（Jean Leray）的事情，他是法国布尔巴基（Bourbaki）学派的创始人之一。最初的时候，他做的是分析，在流体力学和力学方面卓有贡献。后来二战爆发，勒雷作为法国的军官参战，1940 年的时候，被德国人抓到了集中营里。德国人在战争方面对于科技的重视使得他们对每一个数学家和物理学家都是很关注的，而勒雷做的是分析，很有可能被德国人关起来去做各种各样的用来杀人的弹。为了避免这件事情的发生，他就以代数学家自居，在狱中的时候依然努力地做研究，出狱的时候，发表他的那套对后世影响至深的层论（Sheaf Theory）。



法国数学家勒雷（1906- 1998）

还有一个关于挪威数学家李（S. Lie）的传说，这个人就是李群的那个李。李当年普法战争的时候呆在法国，由于普鲁士口音太重，被法国当局投入监狱，后来法国战败，大概恼羞成怒，准备杀掉这帮人，幸亏达布（Darboux）想方设法把他从监狱里救了出来。一个传说是，达布到达牢房的时候，发现他这位朋友竟然静静的坐着研究数学，而他在研究的东西正是著名的李群理论。



美国理论物理学家和数学家吉布斯（1839-1903）

故事三十五：数学家和监狱（2）

前面提到了两个在监狱里做出了大手笔的数学家，还有一个和监狱沾边的趣事，发生那时的数学圣地哥廷根（Gottingen），主角是 E. 朗道（E.Landau）。这个人在前面提到了多次，解析数论大家，巨富无比，人高傲自大，也蛮可爱的，除了当初对我们尊敬的埃米·诺特（Noether）姐姐不恭之外。

朗道讲过傅立叶级数的课，其中会涉及到一个叫做吉布斯（Gibbs）现象的东西，当他讲到这里的时候，振振有词的评论道："这个现象是 Jail 的英国数学家 Jibbs 发现的。"

朗道是典型的德国人，并带有极重的德语口音，从这句话我们可以看到他的英文水平。因为这个时候，不得不有人跳出来指出他一句话的三个错误："第一他是个美国数学家，不是英国数学家；第二他叫 Gibbs 不是 Jibbs；第三，也是最为重要的一点时，他更不在 Jail 里面，而在 Yale（耶鲁大学）。"

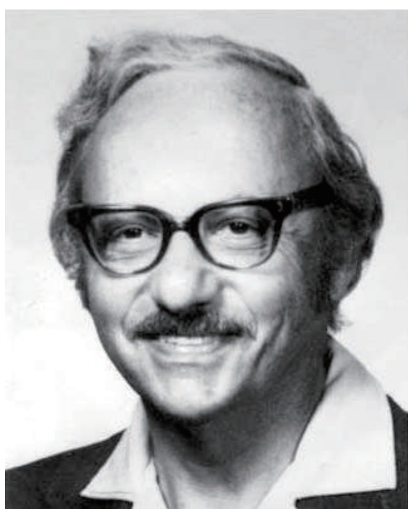
顺便说说这位吉布斯碰到的烦心事，他就职的耶鲁大学曾经连续 7 次拒绝向这位著名的物理学家发薪水，理由是认为他的研究没有意义。

故事三十六：做作业的故事

几个做作业的故事，他们的作业都很难。

第一个是被大家称为线性规划之父的丹齐克（George Dantzig），据说一次上课丹齐克迟到了，仰头看去，黑板上留了几个题目，他就抄了一下，回家后埋头苦做。几个星期之后，疲惫地去找老师说，这件事情真的对不起，作业好像太难了，我所以现在才交，言下很是惭愧。几天之后，他的老师就把他召了过去，兴奋地告诉他说太兴奋了。丹齐克很纳闷，后来才知道原来黑板上的题目根本就不是什么家庭作业，而是老师教的这个领域的悬而未决的难题。丹齐克给出的那个解法也就是著名的单纯形法。据说，这个方法是上个世纪十大算法之一。

第二个和上面的类似，米尔诺（John Milnor），得过菲尔兹奖和沃尔夫奖，特别有影响的一个数学家，



美国应用数学家丹齐克（1914 - 2005）

美国数学家米尔诺（1931-）

现在还健在，但是听说因为年纪大了，没有人给他研究基金，让这个老人很痛苦。在普林斯顿大学上大一的时候，上课得知 Borsuk 的一个和全曲率有关的东西，误以为是家庭作业，几天之后搞定了，后来就发表在数学界最牛的期刊《数学年刊》上面。

第三个讲的是阿诺德（Vladimir Arnold），先说一下背景，有一个很著名的问题叫做"三体问题"，粗略的说就是研究一下像太阳月亮地球这样的三个天体在万有引力的作用下，会怎样运动。伟大如庞加莱（Poincare）之类的人，都只是部分解决了这个问题。再介绍一下阿诺德的老师柯尔莫戈洛夫（Kolmogorov），一个苏联的大师，可以说是活在 20 世纪的前三位的数学家（如果可以排名的话）。柯尔莫戈洛夫对这个问题有了兴趣之后，着实花了些功夫，后来他觉得离着解决差不多的时候，干脆就把这个问题留成了一道课外作业，阿诺德他们就奉命去写作业，若干时日之后，终于成功地解答了这个东西，当然他的贡献是特别大的，很多关

俄国数学家阿诺德（1937-2010）

键的想法都是自己原创的，所以最后这个问题的解答所形成的定理叫做”KAM”定理，KA就是他们师徒俩人，M则是一个美国-瑞士数学家莫泽（Moser），也曾对这个问题做了很多的工作。

故事三十七：费耶尔

提一个匈牙利的数学家，学过傅立叶（Fourier）分析的人应该对他很熟悉，他就是费耶尔（Lipot Fejer）。关于他的数学水平可以用庞加莱（Poincare）的评论来证实，费耶尔关于傅立叶级数的Cesaro和的工作是大四做的，1905年的时候，庞加莱到匈牙利去领取波尔约（Bolyai）奖，很多政界的人都去会见他，庞加莱见面就问：“费耶尔在哪里？”众人面面相觑：“费耶尔是谁？”庞加莱说：“费耶尔是匈牙利最伟大的数学家，也是世界上最伟大的数学家之一。”

其实政界的人去接见庞加莱并不是因为他是那种最最伟大的数学家，而是因为庞加莱的的哥哥或堂哥原来是法国总理总统什么的。一般来说，政界的人对于谁是数学家并不关心，要不也就不至于不知道费耶尔了。

据说，费耶尔比较喜欢到处乱说话，有两件事情来证明。费耶尔和里斯（Riesz）的关系很好，但是他比里斯晚生了两个星期，于是，就到处声称他其实比里斯要大，因为里斯早产了；费耶尔和凯雷克亚尔托（Kerekjarto）不和，后者是一个拓扑学家，费耶尔说凯雷克亚尔托说的话和真理只不过是拓扑等价。

故事三十八：柯尔莫戈洛夫（1）

这是苏联最伟大的数学家之一，也是20世纪最伟大的数学家之一，在实分析、泛函分析、概率论、动力系统等很多领域都有着开创性的贡献，而且培养出了一大批优秀的数学家。特别的用两次的时间来介绍他，因为柯尔莫戈洛夫不仅作为数学家很传奇，更是有着丰富多彩的经历。

柯尔莫戈洛夫（Andrey Kolmogorov）一开始并不是数学系的，据说他17岁左右的时候写了一篇和牛顿力学

匈牙利数学家费耶尔（1880-1959）

有关的文章，于是到了莫斯科国立大学去读书。入学的时候，柯尔莫戈洛夫对历史颇为倾心，一次，他写了一篇很出色的历史学的文章，他的老师看罢，告诉他说在历史学里，要想证实自己的观点需要几个甚至几十个正确证明才行，柯尔莫戈洛夫就问什么地方需要一个证明就行了，他的老师说是数学，于是柯尔莫戈洛夫开始了他数学的一生。

二十年代的莫斯科大学，一个学生被要求在十四个不同的数学分支参加十四门考试；但是考试可以用相应领域的一项独立研究代替。所以，柯尔莫戈洛夫从来没有参加一门考试，他写了十四个不同方向的有新意的文章。他后来说，竟然有一篇文章是错的，不过那时考试已经通过了。

故事三十九：柯尔莫戈洛夫（2）

不说他老人家在数学上的成就了，因为实在太多，譬如说上同调环这个东西也是他独立发现的。专心的说一下他的轶事。

柯尔莫戈洛夫总是以感激的口气提到斯大林：“首先，他在战争年代为每一位院士提供了一床毛毯；第二，原谅了我在科学院的那次打架。”柯尔莫戈洛夫一次在院士选举会上打了自己的老师卢津（Nikolai Luzin）一个耳光，原因据说是卢津反对他的一个关系不寻常的好朋友当院士。当然了这位朋友数学也是很好的。

柯尔莫戈洛夫说：“（打架）是我们常用的方式。”卢津在实变函数方面有着很重要的贡献，但是以打架而论，远非柯尔莫戈洛夫的对手，因为柯尔莫戈洛夫经常自豪地回忆他在Yaroslovl车站和民兵打架的经历。

一个人如果打架很牛的话，经

左图：伟大的俄国数学家柯尔莫戈洛夫（1903-1987）

右图：俄国数学家卢津（1883-1950），柯尔莫戈洛夫的导师

验告诉我们他必然身体强壮，而柯尔莫戈洛夫的确很擅长运动，并经常以此自诩。譬如说，他经常提到一件事情，并且深以为憾，三十年代的一个冬天，他身穿游泳裤滑雪，非常得意地飞速下滑，碰到两个带相机的年轻人请他停下来，他原以为他们仰慕他的滑雪技术而为他拍照，结果被邀请为他们拍照。再譬如说，1939 年的时候，柯尔莫戈洛夫突然决定在冰水中游泳以表达对自己健康体魄的高度信任，结果以住院告终，医生一致认为他差点死掉；但是，70 岁的时候，他突然决定到莫斯科河里游泳，仍然是冰水，这一次却没有事情。

终曲

数学家和哲学家罗素说：有一条小路，穿过田野，通向新南盖特，我经常独自一人到那里去看落日，并想到自杀。然而，我终于不曾自杀，因为我想更多地了解数学。

就用下面的一篇作为这个系列的结束吧，托姆（R.Thom）是法国人，35 岁得的菲尔兹奖。在一次采访当中，作为数学家的托姆同两位古人类学家讨论问题。谈到远古的人们为什么要保存火种时，一个人类学家说，因为保存火种可以取暖御寒；另外一个人类学家说，因为保存火种可以烧出鲜美的肉食。而托姆却说，因为夜幕来临之际，火光摇曳妩媚，灿烂多姿，是最美最美的。

美丽是我们的数学家英雄们永恒的追求。

后记

在后记里，向大家推荐几本书。

第一本叫做《天才引导的历程》，作者是威廉•邓纳姆，一个美国人。这本书是我高中读过的，其中有若干经典的证明，可以和欧拉的求自然数平方倒数和的那个伟大的类比（尽管不严格），更值得一提的一点是，书中有若干有意思的小故事，即使不喜欢读证明，依然是很有趣味。

第二本或者说第二和第三本是 Constance Reid 为希尔伯特（Hilbert）和库朗（Courant）写的传记，写书的这位女士不是数学家，所以行文更流畅故事更多。第一次知道这本书是个巧合，大概是二年级的时候，我去图书馆的电脑上随便检索，发现在 Weyl 的词条下，有一个说是希尔伯特的文集有 Weyl 作的注释，这种经典自然要去翻翻，但是按索书号却是 Reid 的书，英文版的。今年，中文版的书也出了，我用的很多的引言都是中文版的书中的。

第三本是乌拉姆（Ulam）的自传，叫做《一个数学家的经历》，是一本上海科技出的红色的小册子，本人两年前在国林风卖旧书的地方以 2 元的价钱购得，书中讲了他不是太传奇的一生，用了很多笔墨去写冯•诺依曼。

第四本是哈尔莫斯（ P. Halmos）的自传，叫做《我要做数学家》，十年前就卖 20 几块钱，好贵，我从朋友那里借来看过，不是太有趣味，因为行文过于冗长，但是它的一个好处是故事多，而且哈尔莫斯这个人就是喜好吹牛。

第五本是纳什（Nash）的传记，名字是《普林斯顿的幽灵》，讲述纳什的故事，我这里不知道贴了多少，最近由于《美丽心灵》这部电影的缘故，纳什变得特别的出名，大家不妨去看看这本书，还是很有趣的。

其他的书引用得不多，这里列一下，有一本书叫做《一个数学家的辩白》，作者是哈代（Hardy），此书还附有维纳（Wiener）的自传；一本是牛顿的传记，名字大概就是《牛顿传》吧，记得序言的第一句话是说历史上若为某人立传而不需要理由的话，牛顿当之无愧的算第一个；还有一本是爱因斯坦的传记，具体哪一本忘了，估计都差不多。至于其他的书譬如讲爱多士（Erdos）的《数字情种》和另外一本比较著名的《数学精英》，我倒是没有读过，据说都是很好的传记性质的书。

全文完

桃李不言，下自成蹊

—— 忆钟善基先生

朱嘉城　陈慕容

认识钟善基先生是在 1954 年，我们读大三，他给我班讲授《初等数学复习及研究》平面几何部分。听说他原是系主任傅种孙先生的得意门生，毕业后在北师大附中任教，工作不久就在北京中学界出了名。1952 年傅先生亲自将他调入师大时，他也才二十九岁。这些事使我们对这位尚未谋面的先生充满敬意。

上课铃响起，一位衣着整洁、头发纹丝不乱的先生走进教室。一口纯正的普通话很悦耳。他讲课清晰简练，板书整齐，字体清雅脱俗。特别是他的启发式教学方法给人印象极深。每讲一题，从结论开始，引导同学思考，层层往前推，大家迸气凝神地听，待到高潮，戛然而止，恰到好处，只听教室里传出长长一口舒气声，悬着的心放了下来，觉得特别过瘾。

三年级下学期，慕容在女三中实习，钟先生和助教常钟玮是指导教师，钟先生一有空就会前去，在慕容印象中，见钟先生的次数还更多些。那时，要求学生每天写实习日记，由于实习工作很忙，精力都放在写教案和试讲上，以为指导老师不会仔细看实习日记，就不大认真写。一天，钟先生坐在慕容对面非常认真地看她的日记，看不清的地方就问，让她很不好意思，从此再也不敢懈怠。

实习中，一次公开教学，刘钟灵讲几何作图，傅种孙、魏庚人、赵慈庚等老先生都参加了。评议会上先生们的发

1980 年北京师大数学系藏族班毕业留念；前排左起为王树人、钟善基、张禾瑞、陈平尚

1996 年在硕士论文答辩会后钟善基与王申怀、丁尔升、曹才翰、钱佩玲老师一起与学生合影

言是大家爱听的，各有一套，甚是热闹。但时间一长，难免走神，同学也不安分起来，王家銮递来一张纸条：评议会→科学讨论会。钟先生一直静坐抽烟，不动声色，接近尾声时，将烟蒂往烟灰缸里轻轻一摁，不紧不慢地站起来，不到五分钟的发言，把课本上这道题简化了好几步，让大家精神一振，觉得他真不愧为中学名教师。

实习结束，指导教师与实习生同游北海。划船时，慕容与钟、常两位先生同船。时值暮春，气候宜人，小船飘荡在水中，心情特别舒畅，实习的紧张情绪一扫而光。常钟玮提议说：钟先生给我们唱一个《伊凡·苏萨宁》吧！《伊凡·苏萨宁》咏叹调是阳春白雪，非一般人能唱，很佩服先生有这样高的音乐修养，也觉得钟先生的嗓音唱起来一定很好听，所以很想听他唱。而先生只是面带微笑，不说话，也不唱。以后知道，那时唱这种歌不合时宜。但先生的这个表情一直印在慕容脑中，后来也多次见到，她称之为钟先生的“经典表情”。

八十年代初，钟先生两次到青海讲学，我们有了更多接触。一天参观塔尔寺，钟先生讲起藏传佛教及其创始人宗喀巴，也是头头是道。平时闲聊中，发现钟先生除专业知识外，古文功底厚，文学历史、风土人情无所不知，我们惊呼：钟先生真是个杂家。

钟先生业务精湛，学识渊博，学术成果卓著。他常去各地讲学，足迹几乎遍及全国。高寒地区青海条件艰苦，他也去了两次。还以各种形式培养了大批中学教师和数学教育的高级专门人才。在本系，钟先生培养接班人也是尽心尽力。1956 年我们毕业，留校在初等数学教研室工作的共有四人，1958 年因众所周知的原因调走了三人，只剩下曹才翰。刘钟灵、李金年和钟先生虽只共事两年，一直念念不忘，现两人在大洋彼岸，还常有电话问候。刘钟灵 06 年回国，说去北师大一定要看望钟先生。她 5 月 29 日到北京，在火车上听到钟先生去世的消息，如五雷轰顶。时间只差一天，老天太会捉弄人，至今刘钟灵说起此事仍唏嘘不已。

那时，初等数学教研室没有其他年轻人，所以钟先生对曹才翰的关注最多，出去开会总带着他。当年钟先生在青海，说起正为曹才翰看书稿，我们想看稿子应当不费事，钟先生的回答刚好相反，再问，钟先生答以“经典表情”。我们和韩汝瑜都心领神会，知道曹才翰的出道，凝聚了钟先生的许多心血。钟先生之急于回京，也因为曹才翰要去日本，他要把日本的风土人情及礼仪详细交代，以免出错。我们听后感动极了，非常羡慕曹才翰有这样一位好老师能如此悉心培养他。

钟先生为人低调，谦虚大度。曾听到过一个传言：钟先生和曹才翰出席某次会议，接待人员误认曹是钟先生，对他热情有加，把钟先生晾在一边，后来才知搞错，十分尴尬。我们同班同学董文华在西安也接待过钟先生，她说：那天，他们在教室等候，先走进的是曹才翰，向大家招手

示意，钟先生倒尾随其后，别人也把曹误认为钟先生。两人性格迥异，加上曹才翰一头白发，误会就难免了。也说明，钟先生即使和晚辈在一起，也是谦让的。

2004 年我们去北京，和王家銮同去拜访了钟先生，他很高兴，和我们照了相，说来也怪，那张相片照得特别清晰。谈起傅种孙先生，慕容想起一件事：四年级傅先生讲授《几何基础》，常在小黑板上写些中国古代典籍诸如《墨经》等对几何名词的解释。一天，小黑板上写了一段文字：孔子之谓集大成。集大成也者，金声而玉振之也。金声也者，始条理也。玉振之也者，终条理也。始条理者，智之事也。终条理者，圣之事也。智，譬则巧也。圣，譬则力也。由射于百步之外也，其至，尔力也，其中，非尔力也。上课时，傅先生逐字逐句作了解释，当时觉得用这段话对我们进行专业思想教育非常贴切，便详细记在小本上。四年级，她实习高三班，一位学生想学师范，她把这段文字连同傅先生的解释一起写给他，鼓励他报考。这位学生也觉得这段文字很好，就在班里传阅。可惜这个本子在文革中被烧掉了。退休回苏州，她逛旧书店，意外地发现了这段文字，便抄了下来，但傅先生的解释却想不起来了。以后请教过几位语文老师，总觉得与傅先生的解释有些出入。想起钟先生是傅先生的弟子，古文功底厚，便将此事对钟先生说了，还背了几句。钟先生直言：没听过，但古代典籍还有些，可帮你查，查到后可解释。2005 年元月，收到钟先生一封厚信，信写了四页，还有四页写满了《墨经》对几何名词的解释，字体还是那么清雅工整，写错的字用涂改液抹去重写，八页纸上没有一个错字，这对一位八十二岁老人来说，要花多少时间和精力啊，钟先生一如当年的一丝不苟，我们感动万分。他在信中道歉说：那段文字没有找到，许多书在文革中卖掉了，并说：那段文字请暇时写出来给我，试试我的文言底子能否解释得了。我们去信回复并附上这段文字，由于当时忙于去美国探亲，此事便有耽搁。在美国给钟先生去电话，他还提到：等你们回国，一定将译文寄去。我们 06 年 5 月 21 日回国，时差还未调整，却传来噩耗，悲痛和遗憾无法言表，04 年的见面竟成永诀，那篇译文也随钟先生驾鹤西去，在他家照的相片和钟先生如字帖般的信只能留作永远的纪念了。

1998 年钟善基与郝炳新、袁兆鼎先生在一起

从左至右：朱嘉城，陈慕容，钟教授夫妇，王家銮

写到这里，耳边响起德尔德拉的小提琴曲《回忆》，那优美的旋律让我们沉浸在对往事的回忆中。此曲也被译成《纪念曲》，我们就将此曲献给喜爱音乐的钟先生作纪念吧。

2007 年 8 月

2011 年 10 月修改

钟善基先生小传

蒋迅

钟善基先生（1923 年 2 月 24 日 -2006 年 5 月 28 日）是著名数学教育家，北京师范大学数学科学学院教授。1945 年毕业于北京师范大学数学系，1945 年 -1953 年曾在北京师大附中任教。院校调整时调到北京师大数学系，从此在北京师大教书直到退休。1954 年至 1958 年，他任中国数学会北京分会理事。从 1977 年到 1986 年他任北京师范大学数学教育研究室主任。1982 年任中国教育学会数学教学研究会秘书长，后改任顾问。1986 年起出任国家教委中小学教材审定委员会委员，任《五四制初中数学教材（北师大版）》主编。1991 年任《数学通报》编辑委员。1983 年至今先后任中小学数学教学报社总编辑、社长。他还担任过中国教育学会数学教学专业委员会咨询委员，北京市数学教学研究会理事长、名誉理事长，日本三大学（大坂大学、山梨大学、崎玉大学）数学教学研究会名誉会长。他还先后任山西教育学院、天津师范大学、昆明师范专科学校、山西师范大学兼职教授。

钟教授多年从事数学教育研究，早在 1950 年，他就参加了教育部《中学数学课程标准》和《工农速成中学数学教学大纲》的制定与编写工作，并于 1951 年作为特邀代表参加教育部召开的第 1 次全国中等教育会议。后来，他多次参与《中学数学教学大纲》的修改工作，并主编了《北京师范大学五四制初中数学教学教材》。1979 年，他率先在我国提出启发式数学教学理论，最先提出并系统阐述在数学教学中培养学生能力的问题，是我国数学教育学科的主要创立者和奠基人。在 1994 年大阪“中、日、美、德、法数学教育研讨会”上，钟先生做题为“数学教育八原则”的学术报告，见解独到，受到各国数学教育家的关注。

钟先生著有《初等几何教材教法》，他是《初等数学概论》和《小学数学的基础理论》的主编，并与白尚恕先生一起翻译了前苏联数学教育家普 - 佛 - 斯特拉齐拉托夫编写的《高中数学教学经验》，参与编写《中国大百科全书数学卷》。他翻译和编译的还有《几何课堂教学》、《初中数学教学经验》、《高中数学教学经验》、《初等几何学教程（立体部分）》、《高中数学教学法》、《中学解析几何教学法》等著作。他先后在国内外学术刊物及会议上发表了 30 余篇数学教育论文，其中“数学教学启发式”、“关于数学教学中学生能力的培养的问题”、“数学教学八原则初议”、“谈中学数学教学与素质教育”等都是国内同一课题研究的最初的论文。北京师大将钟善基先生的主要论文收集编汇成《钟善基数学教育文选》。

北京师大收集编汇的《钟善基数学教育文选》

漫谈中西教与学

陈关荣

累积三十多年在中国、二十多年在美国之生活经历，特别是前后四十多年之读书和教学经验、以及在三十多个国家讲学之所见所闻，使我深感中西方文化既有雷同更有差异，现稍作比较，希望对年轻一代学子能有所裨益。

首先讲“尊师重道”。中国文化向来强调尊敬师长，服从教导，甚至有“一日为师，终身为父”的说法。读过金庸小说的同学，都会对中国文化历来的师道尊严有深刻的体会。我的中国学生们在日常生活礼仪上，多年来总是对我毕恭毕敬，常常使我感到大可不必。人与人之间一但失却平等相处的关系，攀谈时就难以推心置腹，思想和感情的交流便不会深刻彻底，从而学生们从师长身上学习和接受经验及教育的过程就容易流于表面、失之肤浅。在美国，闲谈时我偶尔会向我的同事和学生们描述中国文化中的师生关系，许多时候他们都表示困惑不解：“如果是这样，学生怎么敢挑战老师？”（“If so, how dare you challenge your teacher?”）十分明显，西方学生们在这种观念上比较开放，甚少约束，还常常有超越师长的欲望。不像令狐冲与师傅比剑，技术上虽能占上风而道义上却不敢取胜。西方人会觉得这种伦理观念十分“愚钝”。一个简单例子是，我的中国学生们多称呼我为“陈教授”，比较相熟和随便一点的便称“陈老师”，而我不少的美国学生则直呼我的英文名字，叫我“Ron”。这不能简单地认为只是一种习惯，因为称谓一出，两人之间的关系和地位的差异马上就体现出来了，接下来谈话和开玩笑的分寸便有很大不同。当然，两种观念和习惯分别来自不同的文化背景，不能以非黑即白论之。

然后讲“教与学”。中国传统的教学方式是教师讲得多，学生讲得少、甚至不讲或没有机会讲。特别在中小学，上课时学生们都要规规矩矩地坐着，端端正正，不允许讨论交谈。时间长了，学生们都没有随时发问的习惯，总是洗耳恭听，有疑难的话回家去问父母兄姐多于在课堂上问教师。在美国，中小学生们则较经常被教师启发引导去随时提问，甚至发表评论。学生表示不同意老师看法的课堂讨论时有所见。中国学生常会因问错问题而感到不好意思，而美国学生则常会因不提问题而感到自己不够突出。类似如下的话，常会在美国教师们的演讲中听到：“不要害怕问很多问题，因为老师们会很高兴有学生向他们请教。

如果你真的对学习感兴趣，主动提问是很有益处的。”（“Don't be afraid to ask lots of questions because, more often than not, people will be pleased that you have turned to them for advice. If you come across as interested and keen to learn, you will get the help you need.”）

在美国许多幼儿园，有一种典型的课堂活动叫做“展示与讲解”（“Show and Tell”）。上课时，小朋友们轮流上讲台向全班同学展示一样物品，可以是玩具、图画 、衣服或礼品，不拘一格，然后要向全班小朋友介绍这件物品，诸如特征用途、来自何处、以及为什么心爱此物之类。每位小朋友在一个学期里会轮流演讲若干次。时长日久，美国的学生们多是能说会道，不但敢于发言而且擅长演讲，特别是懂得介绍自己的成绩和背景，让别人迅速了解自己。这种能力，对日后在大会作presentation，找工作应付 interview，经商营销做 sale，等等，都很有好处。在美国，教师们会经常以如下的说话来鼓励学生：“埋头苦干不一定能保证成功。即使你本人不是很乐意，但想办法推销你自己的成就很有必要。在这点上，别人是不能代替你的。”（“Hard work alone does not ensure success. Even if it is uncomfortable for you, find some methods of promoting your own achievements. Do not depend on others to do this for you."）相比之下，中国学生拥有的这种能力便显得大为逊色。当然，中国学生比较擅长独立思考，钻锲疑难。

还有，中国传统的教学方式是偏重于背诵、记忆、理解和继承。在中国历史上，为前人的著作做诠释的书本就不少，以能读通读透一本好书如诗经、史记之类为骄傲。至于把前人的著作读通读透了之后有什么用处，那就不重要了。记得在国内读硕士课程时，一位教授就说，“读通读透这本教科书的话，你会感到其乐无穷。”而在美国读博士课程时，一位教授却说，“一本书不必读到底。如果阅读中能够受到启发而去解决一个书中没有谈及的问题，你就找到了这本书的价值。”后来经常听到同事说，中国学生善于考试，而美国学生善于做 project。看来这是事实，而且与中西两种不同侧重点的教育方式很有关系。我在中国经常会听到中国学生们在议论谁解难题的手法真高明，而我在美国则经常会听到美国学生们在议论某某人“有很多很棒的想法。”（“Have a lot of good ideas.”）要知道，难题是教师出的，早有答案，做得出来不枉是一次好的锻炼，然而“good idea”是自己想出来的，前人没有想过，实现了的话有可能是一项发明创造。

80 年代在美国一些大学数学系的教师中流传过一则小笑话：“如果你到教室上课时突然说，今天我要给你们一个突击测验（Pop Quiz），那么在你还没有真正告诉学生们这是一个什么样的测验之前，你会看到美国学生们已纷纷掏出计算器，准备按键，而中国学生们则摆好笔和纸，准备手算。”

最后，大家从招生一事亦能看出中西方教学要求之差异。在美国，大学招生通常要看学生多方面之表现，除学业成绩外，还要看 Essay 写得如何、有没有其它技能如音乐或体育的特长和社会服务经验以及学校和老师的推荐评语等等。在中国，考试成绩几乎是唯一的标准，有时相差一分，结果就相去十万八千里，这是众所周知的。

言长纸短，以上只能谈及一点片面的个人观感和体会，不妄加深刻评论，仅供同学们参考。

作者介绍：

陈关荣教授是香港城市大学电子工程系讲座教授，IEEE Fellow。

应该将“〇”从汉字队伍中驱逐出去

林 磊

数0在汉字中的正规写法是“零”，但另外有一个汉字“〇”也经常用来表示0。例如：如果用纯汉字来书写当下的年份，则我们常写为“二〇一一年”，而很少有人写为“二零一一年”。“〇”目前是作为标准的常用汉字被中国社会科学院语言研究所收录在《现代汉语词典》（参见[1]，p865），以及《新华字典》（参见[2]，p281）中，但该字在这两本工具书中都被列在难检字表里。

笔者认为应当将“〇”从汉字队伍中驱逐出去。理由如下：首先，汉字演变到现在，已被大家公认其主要特征是它是方的，即汉字是方块字，而“〇”不具有这一特征；其次，现代汉字是由基本笔画（如：横、竖、撇、捺等）构成的，但是“〇”字无法由任何法定的基本笔画构成，这也是它只能被列在难检字表中的原因。中国是最讲名正言顺的国家，名不正则言不顺。如果允许“〇”作为汉字存在，那我们该如何界定汉字？我们是否也可以将其他的记号收录为汉字（例如“笑脸”☺）呢？当然在将“〇”逐出汉字队伍后，并不是说“〇”就不能使用了，我们仍可将“〇”作为符号来使用。

2011年7月24日

参考文献

1. 中国社会科学院语言研究所词典编辑室编，现代汉语词典(第5版)，北京：商务印书馆，2008年。
2. 新华字典(第5版)，北京：商务印书馆，1980年。

一个不恰当的国标应当修改

林 磊

在我国现行的出版业国家标准中，有一个标准费思量：在排版数字时，如果该数字大于等于一千，则在千位与百位之间要留四分之一的空格，例如：2005 要排成 2 005（参见[1]，p20，例4）；1836 要排成 1 836，10.2988 要排成 10.298 8（参见[2]，p71，表格）等。在与编辑交流后得知，这样做是为了与国际接轨！（当然并不是每个出版社现在都严格执行这一规定，但就我所知，至少华东师范大学出版社、高等教育出版社都按照这一要求排版。）因为在西方的排版中，常把 2005 排成 2,005，但我国在书写数字时没有加逗号的习惯，所以使用了空格。作为一位中国的数学教育工作者，我对此感到十分的不解。首先，我们要考虑西方人为什么要在书写数字时这样加逗号？我想这是为了阅读的方便。英语是西方的通用语言，而在英语语系中数字的阅读是以“thousand”（千）为基本单位的，他们把百万称为“million”（即，千千），所以二百三十万写为 2,300,000。但是在我们的汉语语系中，数的单位除了“千”，还有“万”！我们是以万为基本单位的。东西方文化在这点上是不同的！如果把二百三十万写成 2 300 000，相信大部分中国人会一下子念不出来！

我认为，在国标的制订中，不仅仅需要考虑与国际接轨的问题，还需要考虑中国自己的国情。不然的话，有时难免会让人感到有崇洋媚外之嫌！例如，上述数字排版的规定在中文书籍中使用就很不恰当，因为它对广大中国读者带来了不方便。倘若再深入思考一下，如果让小学生使用这样的书本，可能还会影响到他们对数的学习与理解，这对下一代的培养是一个隐患！因此，建议尽快修改这一不恰当的国标。

2011 年 7 月 28 日

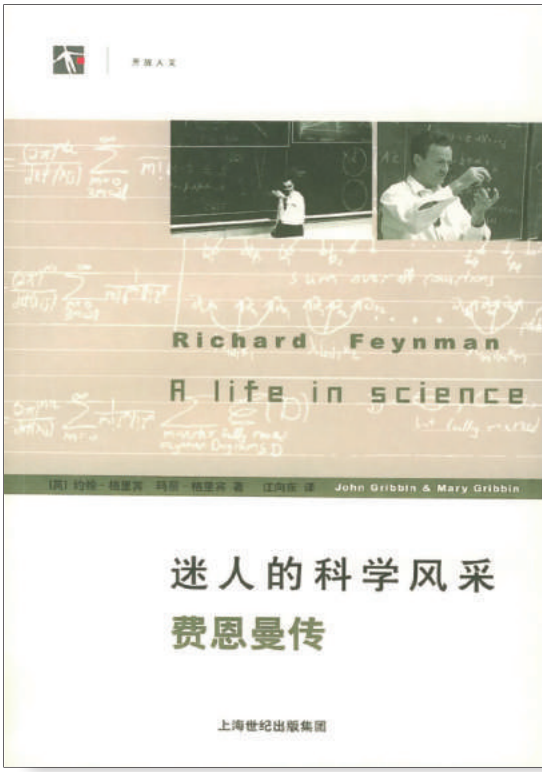
作者系华东师范大学数学系教师

参考文献

1. 张垚 编著，数学竞赛中的组合问题，数学奥林匹克小丛书 高中卷 13，上海：华东师范大学出版社，2005 年。
2. 同济大学应用数学系 主编，高等代数 下册（第五版），北京：高等教育出版社，2002 年。

迷人的费恩曼

丁 玖



今年 5 月 11 日，是伟大的美国物理学家理查德•费恩曼（Richard Feynman, 1918-1988）诞辰 93 周年纪念日。1988 年 2 月 15 日，热爱教书的他在美国加州理工学院上完一生中最后一节课仅仅两周，终于未能战胜与之搏斗十年的癌症，永远地离开了他心爱的讲台。当天，加州理工学院的大学生们在学校十一层高的图书馆大楼上高高悬挂了一条竖幅:“We Love You Dick”。这种爱戴，和当年北京大学学生在天安门广场上高举横幅“小平您好!”一样，胜过千言万语!

数年前我回家乡江苏扬州探亲，在每回必去的那个“扬州古籍书店”意外地发现了一本封面崭新的英国科学传记作家约翰•格里宾（John Gribbin）博士和玛丽格•里宾（Mary Gribbin）夫妇于 1996 年出版的“Richard Feynman：A Life in Science” 译名为《迷人的科学风采——费恩曼传》之中文译本，要价仅打一折。我当即买下，并“触景生情”地回忆起更早些时在京城王府井街头只花了一元钱买到的另一本书《最完整的人格——朱自清先生哀念集》。那本真正的好书让我当晚一口气读完，又一气呵成地写了读后感，幸运地被家乡报纸送往省城参赛第一届读书节，并和家乡同姓文学名人共获二等奖励。看来书的质量和所付的价钱找不到什么函数关系。

在第一次细读这本《费恩曼传》的过程中，我就不时深深地被这位天才的科学家、杰出的教师、高尚的人物“真正迷人的风采”所折服。后来我把它推荐给在美国读高中的亲戚，他也读得爱不释手，并在报考大学填申请表时所写的作文内满腔热情地提到费恩曼的科学研究和人格魅力对他决定未来志向的重大影响。三年前，在由美国底特律前往上海飞机上的十几

费恩曼的速写画像

费恩曼的漫画像

个小时之内，我一直浸淫于80年代写过脍炙人口的书“Chaos: Making a New Science”的美国记者格莱克（James Gleick）1992年出版的另一本费恩曼传记“Genius: The Life and Science of Richard Feynman”（《天才：理查德•费恩曼的一生与科学生涯》），之后并将这本畅销书送给了一名爱读书的北京大学物理系新生、我在国内长期合作研究者的儿子，以资鼓励。

费恩曼，这位当代最受爱戴的科学家之一和第二次世界大战后科学家中最卓越、最具影响力的理论物理学家，他的名字之于量子电动力学，就像爱因斯坦的名字之于相对论、霍金的名字之于黑洞理论一样如雷贯耳。他和美国哈佛大学的施温格尔（Julian Schwinger, 1918-1994）、日本的朝永振一郎（1906-1979）分享了1965年的诺贝尔物理学奖。根据10年前出版的《诺贝尔奖》一书著者所述，如果不是怀疑量子电动力学的高一辈分的丹麦物理学家、1922年诺贝尔物理学奖获得者玻尔（Niels Bohr, 1885-1962）的“从中作梗”，他获奖年份会大大提前。作为最受欢迎的教授和最有成就的演讲者，费恩曼的《物理学讲演录》令无以计数的青年学生领悟到物理学的奥秘，成就了一代又一代的科学工作者。这些书从未绝版，我的合作者的儿子考上北京大学物理系后，身边就多了这一套教材。

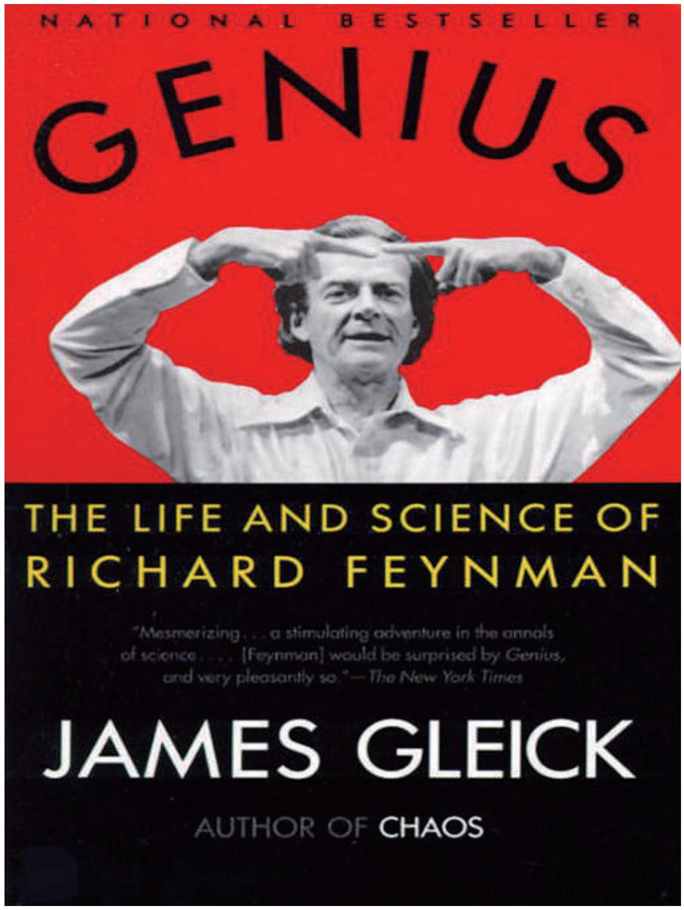
费恩曼已成为崇高人格和优秀品质的代名词，他在科学研究中极端诚实，毫无名利思想，令无数后来者高山仰止。“理论若与实验不符就是错的”，这一简单道理是他对科学界的谆谆告诫，“因为大自然是不可戏弄的！”小他九岁并成为一名天体物理学家的妹妹琼•费恩曼（Joan Feynman）1995年4月被格里宾博士夫妇采访时，对她哥哥的一生品格一言以蔽之：“我哥哥从不说谎。”如果不是听从美国《时代周刊》杂志记者的规劝“如果拒绝受奖，将会造成比接受此奖的新闻更大也更为轰动的新闻”，他会拒绝诺贝尔奖。李政道的博士论文导师费米（Enrico Fermi）1954年去世后，芝加哥大学以三至四倍于他当时的工资聘请费恩曼去填补费米的位置却被他宛然谢绝，只因为加州理工学院有令他特别满意的自由学术空气。1964年他又谢绝了该校授予他的荣誉学位，并对其它学校如法炮制。他的合理解释是：他在普林斯顿大学获得的博士学位是长期为之努力的结果，而不应该再获得没做任何事情的荣誉学位。

出生于波兰的美国数学家卡茨（Mark Kac, 1914-1984）把天才分为两类，一类天才只比别人聪明一

点就可以做他们所做的事，而另一类天才是真正的魔术师。他认为“费恩曼正是能力最强的魔术师。”这个超凡脱俗的“大魔术师”，除了荣获诺贝尔奖的量子理论以外，至少还有其它两、三项也可以获此殊荣的杰出工作，如低温物理中液氦之超流性研究和粒子物理中弱相互作用理论。六年前他诞辰 87 周年纪念日当天美国政府发行的 37 美分面值纪念邮票上画有他奇妙的“费恩曼图”。他在普林斯顿大学完成博士论文前就参加了美国原子弹之父奥本海默（Robert Oppenheimer, 1904-1967）挂帅的原子弹研制项目——“曼哈顿工程”，并成为其理论计算小组的领导。在美籍波兰著名数学家、“氢弹之父”乌拉姆（Stanislaw Ulam, 1909-1984）的自传《一个数学家的经历》里有一张他和冯•诺依曼及费恩曼同为“曼哈顿工程”效力时的三人合照。美国第一颗原子弹爆炸成功试验，费恩曼既是唯一用肉眼直接看到“磨菇云”的科学家，又是世界上第一个裸眼观察到原子弹爆炸的人。在美国洛斯•阿拉莫斯国家实验室的那几年为反法西斯而战，忘我的工作和经常接触放射源，这可能成为他日后遭受癌症折磨的原因之一。

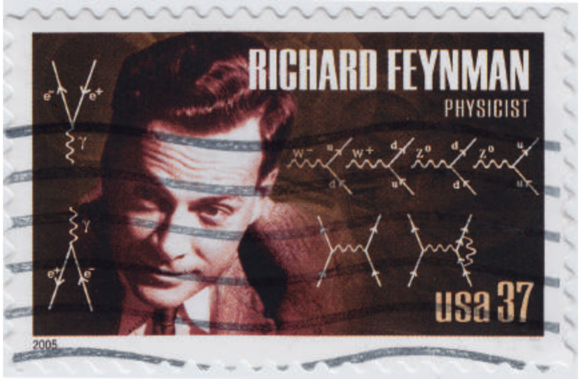
费恩曼的父亲很早就设法引导儿子用“科学的方式”去思考，并让他懂得仅仅知道事物的名称和充分了解事物的本质是有根本区别的。比如某种鸟在不同的语言里有不同的名称，光知道这些名字而不知它的特性是无用的。这种科学的学习和思考方式和机械记忆定义背诵法完全背道而驰，特别值得国内教员、学子深思。费恩曼的畅销书《你在乎别人想什么？》（“What do You Care What Other People Think?”）生动地回忆了父亲对他早期启发性教育的轶闻轶事。他另一本讲故事的畅销书《费恩曼先生，你真会开玩笑！》（“Surely You’re Joking，Mr. Feynman!”）记载的第一个故事就是他儿时怎样在一位成年人不思其解的目光下来回踱步，不停地用大脑思考，最终替那人修好收音机而“身名远播”。

在麻省理工学院读本科的那几年，不管必修课是什么，费恩曼都坚持不懈地从其它



美国记者格莱克 1992 年出版的另一本费恩曼传记：《天才：理查德•费恩曼的一生与科学生涯》

费恩曼、“氢弹之父”乌拉姆、冯•诺依曼



费恩曼诞辰 87 周年纪念日美国政府发行的纪念邮票，上面画有他奇妙的“费恩曼图”

书中学到比一般大学课程多得多的知识。大四时他应数学系之邀加入校队参加全美最有名的一年一度的普特兰（Putnam）全国大学生数学竞赛，并以绝对优势获得第一名。他大学毕业前发表在《物理评论》上第一篇论文的结论，成为量子力学奠基者之一、“测不准原理”创始人、1932 年获诺贝尔奖的德国物理学家海森堡（Werner Heisenberg, 1901-1976）关于宇宙线专著的压台戏。普特兰数学竞赛折桂而成为“普特兰学者”后，哈佛向他召唤，但他选择了普林斯顿大学读研究生。不久，他送给妹妹 14 岁生日的礼物是一本大学天文学教科书，并教她这样读：“你从头读，尽量往下读直到你一窍不通时，再从头开始，这样坚持往下读直到你全能读懂为止。”他妹妹用这种方法读到书中第 407 页，看到了英国女天文学家加波施金（Cecilia Payne-Gaposhkin, 1900-1979）发现的星球光譜，从此她就立志要和哥哥一样成为科学家。

费恩曼的名字第一次被美国人民广为所知是他于 1986 年 2 月 11 日当众演示的“O 形密封圈实验”。那一年的 1 月 28 日，美国“挑战者”号航天飞机起飞一分钟后突然爆炸坠毁，包括一名女教师在内的七位机组人员全部遇难，震惊世界。那一天是我到达美国密西根州立大学数学系攻读博士学位后的第二十六天，在当晚的电视节目中我亲眼目睹了里根总统和千百万美国人民一样的悲痛表情。作为富有独创性的严肃科学家和思想家，费恩曼以动过几次大手术的癌症之身应邀加入了“总统事故调查委员会”。与大多数委员会成员不太一样的是：他放弃了所有的其它工作，以让自己全身心地投入其中。2 月 4 日傍晚他飞往首都华盛顿参加第二天上午召开的委员会首次会议，在会议之前，他先去了加州理工学院喷气推进实验室向工程师们了解到关于航天飞机失事的第一手资料，并在他的笔记本的第二行批注道：“O 形圈留有焦痕。”通过大量的调查研究，他知悉了美国国家航空航天管理局领导阶层曾忽视第一线工程师们对 O 形圈低温有效性的担忧。在得知“挑战者”上天前之夜气温陡然降至摄氏零度以下这一极其重要的信息时，活跃的科学思维马上令他意识到寒冷对 O 形圈之弹性毁灭性的破坏。既像小孩子游戏一般地、又像魔术师表演一样地，他在调查委员会成员和记者面前将 O 形圈浸入一杯冰水的小小动作，催生了那个足以证明“挑战者”号航天飞机失事原因的具有决定性作用的伟大“小实验”。这是他与癌症搏斗的最后十年内最大的挑战，也是他不到七十年的人生中最后的辉煌！

费恩曼的一生，是让我们着迷的一生，是让我们也想这样度过的一生！亲爱的读者，你和我也许都没有费恩曼那样超群的科学洞察力和天才的直观想象力，也许我们对大自然还缺乏他那样的极端迷恋和真知灼见，可是，他对科学的坦诚和对人生的严肃，应该是我们永远追求的目标。迷人的费恩曼就在我们面前！

写于费恩曼诞辰九十周年前夕，2008 年 4 月
美国哈蒂斯堡市
修改于 2011 年 1 月 1 日
中国北京市

注：“费恩曼”旧译为“费曼”或“费因曼”。全国自然科学名词审定委员会公布的《物理学名词》（1996）中已定译为“费恩曼”。

《中国数学会通讯》是该刊编辑委员会编辑出版的内部刊物，季刊。主要刊登国内外数学界的重要信息，报导中国数学会与各省市自治区数学会、学科分会等的活动情况。主要栏目包括：学术活动信息，数学教育与普及，数学精品文章（数学的历史、进展、价值、趣事等），人物专栏，学科介绍，书讯与书评等。

《中国数学会通讯》为季刊，彩色印刷，图文并茂，
全年的总订费为 50 元（含邮费）。

订阅办法： 请将订费邮汇至北京中关村东路 55 号（邮政编码：100190），中国数学会办公室；
或行汇至中国数学会

开 户 行：北京工商行海淀西区支行
帐　　号：0200004509089161419
电　　邮：cms@math.ac.cn
电　　话：0086-10-62551022

2011 年第 3 期要目：

- 中国数学会正副理事长、秘书长会议纪要
- 中国数学会十届八次常务理事会会议纪要
- 怀念 Paul Malliavin

拉马努金的笔记本
关于数学发展之我见
充分发挥大学数学文化课的素质教育作用
“数学文化”课程建设 专家南开大学论剑
中国传统数学的东方特色与文化价值
2011 南开表示论与调和分析国际研讨会在南开大学成功举办
海峡两岸数学名词对照研讨会在京召开

《中国数学会通讯》编辑部供稿