从左至右：张英伯，蔡天新，贾朝华，张智民，罗懋康，刘建亚，汤涛，邓明立，付晓青

《数学文化》旨在发表高质量的传播数学文化的文章；主要面向广大的数学爱好者

《数学文化》欢迎投稿，来稿请寄：
Math.Cult@gmail.com

本期刊网站：http://www.global-sci.org/mc/
本期出版时间：2012年2月

本刊鸣谢国家自然科学基金数学天元基金和科学出版社的支持

Contents | 目录

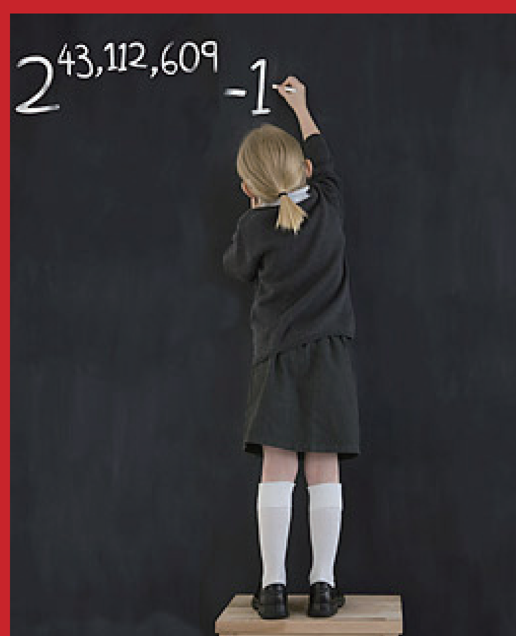


图 1 拉斐尔的《雅典学院》

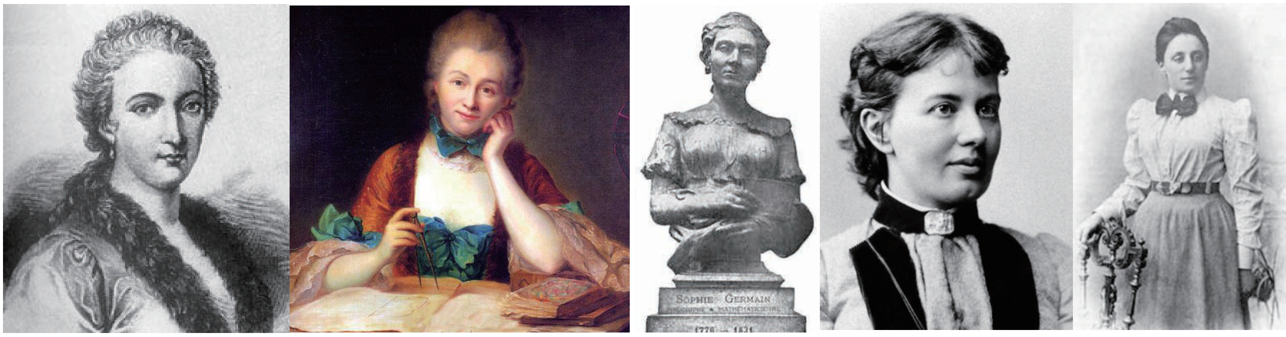
亚历山大城的希帕蒂娅[1]

欧阳顺湘

但我断言，当我们离去，将有人记得我们。—— 莎孚[2]

[1] 英文中通用 Hypatia，希腊文为 Υπατία。其发音在希腊语中为 Ipateeah，英文中常被读作 Highpayshya（/hai'peiʃə/）。中文中常见音译有基于英文读音的海巴夏，以及基于希腊语读法的希帕蒂娅、希帕提娅。也有作者将这两种读法混搭而音译为海帕蒂娅。

[2] Sappho，公元前 7 世纪古希腊著名女诗人。相传其为同性恋者，而其居住地莱斯博思岛（Lesbos）则成为西 方语言中女同性恋（如英文中的 Lesbian）一词的来源。



(a) 阿涅西　(b) 沙特莱侯爵夫人　(c) 热尔曼　(d) 柯瓦列夫斯卡娅　(e) 诺特

图 2　五位著名的女数学家

AWM 40TH ANNIVERSARY 40 1971–2011

ASSOCIATION FOR WOMEN IN MATHEMATICS

图 3　女数学家协会 40 周年纪念标记，其中曲线为斐波那契螺旋线（Fibonacci spiral）

前言—— 女数学家与希帕蒂娅

今年是世界妇女节 100 周年，很多地方有纪念活动。我所在的德国大学图书馆即展出了介绍 17-20 世纪自然科学与技术中 23 名杰出女科学家的海报。该展览由大学的性别平等办公室（德语：Gleichstellungsbüro）组织。在制度上德国对女性颇为尊重。如我所在大学前面有女士专用露天停车场；教学大楼中有女生专用计算机机房及女士咖啡厅，甚至对学生免费的泳池也有女性专用时段等。虽然平等的观念在很多地方已是深入人心，但现实生活中的性别不平等还客观存在着。我曾经的一位邻居，来自尼泊尔的社会学男博士生，到其德国的女导师家，就诧异其导师竟然指挥她先生忙前忙后招待客人。

同时今年也恰是女数学家协会成立 40 周年。当代女数学家们在数学研究、教育活动中很活跃且倍受重视。以德国为例，一般大学数学系在招聘博士生、教师时都特别声明对女士的优先考虑。我所在研究组的一次中期检查答辩中，导师还被问责如何改变博士生中女学生过少的状况。一些女数学家们参与、组织的专门的学术活动也在积极开展，如我知道的“女概率学家（Women in Probability）”之类的会议已经组织过多届。

历史上也不乏性别平等的观念。如古希腊数学家、哲学家毕达哥拉斯(Pythagoras，约前 572- 约前 497）主张知识的自由传播，有教无类，不分男女，只要有兴趣即可。在他所创立的毕达哥拉斯学派中有许多女性，其中就包括后来成为他妻子的女弟子西雅娜（Theano）。受毕达哥拉斯学派对女性的观念之影响，古希腊哲学家苏格拉底（Socrates, 前 469- 前 399）和其学生柏拉图（Plato, 约前 427-前 347）主张“女人和男人有着同样的权利”。

但总体而言，历史上女性鲜有受教育的机会，更不用说从事科研活动了。大贤如亚里士多德（Aristotle, 前 38- 前 322）即认为“女人是未完成的男人，是不完整的灵魂”，没有资格拥有男人可享有的很多权力。然而，基于良好的家庭教育、朋友的帮助和自身的努力等，仍然代有女杰，如：

- 第一位留下数学著作《分析讲义》[3] 的意大利女数学家玛利亚 • 阿涅西（Maria Gaetana Agnesi, 1718-1799）；
- 曾将牛顿的《自然哲学的数学原理》一书翻译为法文并加以评注的法国女数学家沙特莱侯爵夫人（Émilie du Châtelet, 1706-1749）；

[3] 即 Instituzioni Analitiche。她写作目的是为自己的乐趣以及辅导她二十余个弟妹。第一卷在 1748 年出版，描述了一些代数问题；第二卷在随后的一年出版，介绍了当时颇新的无穷小分析，是第一本完整的微积分教科书。这部书被认为是对欧拉工作的最好介绍，她通过很多例子来说明数学思想。该书第二卷由 P. T. d'Antelmy 在 1775 年译为法文；后来全书被剑桥卢卡斯讲座教授 John Colson（1680-1760）译成英文（Colson 曾在 1736 年将牛顿用拉丁文撰写的《自然哲学的数学原理》翻译为英文）。书中介绍了名为“阿涅西的女巫”（此名称源于误译）的曲线（又称箕舌线）。

- 曾对费马大定理研究有重要贡献的法国女数学家索菲•热尔曼（Marie-Sophie Germain, 1776-1831）；
- 第一位职业女数学家和第一位女科学院院士，俄罗斯的索菲娅•柯瓦列夫斯卡娅（Sofja Kowalewskaja, 1850-1891）；
- 有“现代代数学之母”之称的德国著名女数学家埃米•诺特（Emmy Noether, 1882-1935）。
- 我国清代杰出的女筹算家、天文学家——王贞仪（1768-1797，字德卿）。“德卿于书，无所不窥，工诗古人辞，尤精天算，贯通中西”（南京藏书家朱诸语）。清代著名史学家钱大昕重其学，“以为班昭以后一人而已”。

但她们成功之路往往崎岖而充满辛酸。

- 约 200 年前，热尔曼为能进入新成立的巴黎综合理工学院学习，只好用假身份，化用男子名 Le Blanc 才获得入学；后来她与高斯的早期通信中她也使用了这个男名。
- 约 140 多年前，因性别歧视在自己的国家无法上大学的柯瓦列夫斯卡娅只好假婚到对女性偏见较少的德国海德堡大学学习；后仰慕大数学家魏尔斯特拉斯（Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815-1897）转到柏林，却因性别歧视而不能获得学籍，魏尔斯特拉斯也只好给她私自授课。论文还要送到哥廷根才获得博士学位；最后她为得到教职，不得不辗转到斯德哥尔摩，借助曾为魏尔斯特拉斯学生的米塔格 - 莱弗勒（Mittag-Lefler, 1846-1927）的大力支持才得到教职（人们认为已婚妇女不需要工作）。
- 同样，不到 100 年前，诺特在 37 岁时才获得的哥廷根的教职也曾经历长久的争论，即便有大数学家希尔伯特和克莱因等的支持（希尔伯特曾批评性别歧视：“大学不是澡堂”），那里一些顽固的人认为拜倒在一个女性的脚下学习是不可思议的。
- 我们更可以想象清朝的王贞仪不但要克服当时对女性的偏见，还要驳斥和她的天文研究天然对立的迷信。

图 4 柯瓦列夫斯卡娅的纪念币：其中刻有土星和光环，以纪念她在 1874 年向哥廷根大学提交的博士论文中所研究三个问题之一的土星环问题

这些杰出女性为自己利益奋争的过程也是她们为所有女性之权益奋争的过程。柯瓦列夫斯卡娅在给友人的信中常说，她的成功或失败不止是个人的事情，而是和所有女子的利益关联的[4]。柯瓦列夫斯卡娅的一生就是妇女为平等权利，特别是接受高等教育以及学术职位的权利而奋斗的过程。其实她们自己也在主动努力为其他妇女的权益而呼吁。在文学创作方面造诣颇深的柯瓦列夫斯卡娅用她的作品为公众教育、女权主义等而呼吁。此外，我们也知道天才的阿涅西 9 岁时就曾在一个学术聚会上演说妇女受教育的权利；晚年的她虔心进入修道院以积极从事慈善事业，去世时身无分文。而我们的王贞仪更是以诗言志：

丈夫之志才子胸，谁言女儿不英雄！足行万里书万卷，尝拟雄心胜丈夫！

人们也没有忘记这些曾做出杰出贡献的女数学家。例如，在阿涅西去世 100 周年，即 1899 年，意大利的米兰有一街道以她的名字命名；柯瓦列夫斯卡娅作为俄国第一位著名的女数学家，苏联、俄罗斯分别在 1951 年、1996 年各发行了一枚纪念她的邮票；2000 年俄罗斯为纪念她 150 周年诞辰发行了一枚纪念币。

或许我们不能说我们对女数学家们了解很多。在参观前述展览时我就很惭愧地发现我对其中一些女数学家也所知甚少。比如曾为解决希尔伯特第十问题而作出过突出

[4] 参考李学数著《数学与数学家的故事》第一集，暂未能找到原文。

图 5 Gasparo 所画希帕蒂娅的素描，来自哈伯德作品

贡献的朱丽亚 • 罗宾逊（Julia Robinson, 1919-1985）我即不熟悉。而当我去认真阅读相关资料时，更加发现自己对她们很陌生。这是我写下这篇介绍罗马统治时期埃及亚历山大城的女数学家、哲学家和天文学家希帕蒂娅的笔记的缘故。

希帕蒂娅是历史上第一位有据可查的著名女数学家。她出生年份一般认为是 370 年。她的死亡时间是确定的，为 415 年 3 月四旬期 [5] 的某一天。也有说法认为希帕蒂娅死时不是 45 岁而是 60 岁，即她可能出生于 355 年。

现代的女哲学家们往往都谦称自己为“希帕蒂娅的女儿”，而在后面将介绍的一个女性哲学期刊中，创刊者也以她的名字来命名她们的杂志以提醒自己不是最早的哲学家。其实，希帕蒂娅在女数学家的历史上也有着标志性地位。希帕蒂娅不但是第一位在史上留名、有确切资料的女数学家，也常被当作古希腊文明最后的代表。在希帕蒂娅之后 1000 多年，直到古希腊理性之光重照欧洲，才又有杰出的女数学家阿涅西在文艺复兴的宽松环境里出现。

希帕蒂娅颇具传奇色彩。她是当时世界上顶尖的女数学家、哲学家和天文学家；从小接受身为著名数学家父亲的培养，生活于一个伟大的有着光荣文明传统的世界文化、经济中心，却同时也政教纷争的亚历山大城；她貌美、聪慧，一生未婚，勤勉教学、研究，做出不朽的业绩，却如经典希腊悲剧般被基督暴徒群袭，在基督徒祭坛前被凌迟肢解并焚尸。

虽然希帕蒂娅没有留下任何明显的著作，而且有关她的一手资料总共也仅仅几页 A4 纸的篇幅，但人们并没有忘记她。有关她的研究、历史记载以及诗歌、小说、戏剧、纪录片和画作等历来层出不穷。在她死后一千多年的启蒙运动和女权运动中，人们分别以她为题对教会进行反思、寻求女权。两年前一部以她为中心人物的电影《城市广场》更是引起极大关注。

我们将先回顾希帕蒂娅所处的时代及其所生活城市亚历山大城：光荣的智力传统和躁动不安的社会背景。特别我们将介绍伟大的亚历山大城的图书馆、博学园、希腊数学、神学和哲学及其之间的关系，我们也介绍亚历山大城的政教冲突以及衰落。然后我们介绍她的成就、生平、死亡以及其身后的文学传奇。纵览她的一生，或许我们可以说希帕蒂娅“成也时代，悲也时代”。

托勒密王朝的亚历山大城——城市兴起、博学园和图书馆

亚历山大城的兴起 论及西方文明和历史，“言必称希腊”是很难避免的。公元前 8 至前 4 世纪的古希腊是数百个城邦——地处地中海东部诸岛以城市为中心的国家。它们如同中国古代春秋战国时期的各国，合纵连横，或共同抵御外敌，或互相斗争。公元前 5、4 世纪是古希腊城邦的“黄金时期”，文明昌盛；它们在哲学、文学、戏剧、雕塑、建筑与数学等很多领域有很深的造诣和辉煌的成就，其文化是此后整个西方文明之源泉。这些城邦中最出名的是雅典和斯巴达。著名的哲学家苏格拉底、柏拉图、亚里士多德师生三代就都主要在雅典生活、教学。特别是柏拉图在雅典建立了最早的学院——柏拉图学院。

希腊北部曾被希腊人视为蛮邦的马其顿王国逐渐兴起并于公元前 338 年取得对整个希腊的控制权。前 336 年马其顿的亚历山大大帝（Alexander the Great, 前 356-前 323）即位，旋即开始了征服世界的东征之旅。这在客观上促成了希腊文明的传播。前 332 年，亚历山大大帝从波斯人手中夺取了埃及，遂下令在尼罗河口建立一座以他名字命名的城市作为连接富庶的尼罗河地区与希腊的桥梁，此即亚历山大城（Alexandria）。不久亚历山大大帝消灭了波斯帝国，建立起地跨欧、亚、非三大洲的马其顿亚历山大帝国。

[5] 基督教复活节前共 40 天的节期，为基督徒的斋戒期。

图 6 今地中海地区图及本文涉及的部分地名：A= 希腊雅典；B= 马其顿；C= 莱斯博思岛；D= 君士坦丁堡（今土耳其的伊斯坦布尔）；E= 萨摩斯岛；F= 佩尔加；G= 耶路撒冷；H= 亚历山大城；I= 昔兰尼（今夏哈特）；J= 叙拉古；K= 罗马；L= 米兰

公元前 323 年亚历山大大帝病死，他庞大的帝国也随之被其部将分裂割据而为三个独立王国。其中亚历山大大帝的童年伙伴和信任的大将托勒密一世（Ptolemy I Store I, 约前 367-前 283）在前 305 年称王，统治埃及，建都亚历山大城，开创了托勒密王朝。

经过托勒密王朝各代的经营，亚历山大城很快就发展为地中海和东方各国贸易中心并取代雅典成为地中海地区的文化中心。亚历山大城也是埃及、古希腊和古罗马最重要的粮食供给地。关于这一点有一个美丽传说——亚历山大大帝在规划亚历山大城时手头没有粉笔，因而他借助谷粒来设计城市大局；正如谷粒的被飞鸟来食所预兆的，亚历山大城不仅会喂养飞鸟，也是天下粮仓。

博学园和图书馆 由马其顿亚历山大帝国分裂出来的这些国家仍延续着古希腊文化，史学家所称的希腊化时代开始。托勒密一世是亚里士多德的学生，崇尚知识。他和托勒密二世（Ptolemy II Philadelphus，约前 309-约前 247）不但在亚历山大城建造了有“世界七大奇迹之一”之称的亚历山大灯塔，而且他们还决心仿照亚里士多德的学园[6]在亚历山大城建一教学与研究机构。曾也是亚里士多德学生的建筑学家德米特里厄斯（Demetrius of Phalerum, 约前 350-约前 280）被邀请来主持建设这样一个机构——皇宫的一部分被立为博学园（Musaeum, 也称为缪斯神庙[7]）及其附属的图书馆（亚

[6] 亚历山大曾将征战中搜集来的艺术品和稀有古物交由他的老师亚里士多德整理研究。

[7] 缪斯是古希腊神话中科学、艺术 9 位女神的总称。博物馆一词，即由“缪斯”演变而来。

图 8 塞拉皮斯头像，藏于梵蒂冈博物馆。此为塞拉皮斯神庙塞拉皮斯头像的复制品

图 7 电影《亚历山大大帝》(《Alexander》，2004）中剧照：托勒密一世在亚历山大图书馆讲述亚历山大大帝的故事

图 9 电影《城市广场》剧照：电影中展示的亚历山大城的暴动

图 10 391 年提阿非罗手持圣经，以胜利的姿势立于塞拉皮斯神庙

历山大图书馆)。

亚历山大图书馆雄心勃勃，意欲“集全世界之书”。托勒密王朝历代国王采取各种手段收集图书：如来往亚历山大城口的商船都要求上交所携带的书籍给图书馆进行抄写后才获准离开；又如，通过威胁停止供给雅典粮食而获准抄写雅典图书馆的书籍。经过长期的征购和抄写，亚历山大图书馆迅速成为当时世界上最大的图书馆——极盛时期馆藏图书约 70 万卷（另一说法为约 50 万卷）。犹太教和后来产生的基督教共同承认的宗教经典《圣经》就是在亚历山大城由托勒密二世下令由希伯来文翻译为希腊文的（即著名的“七十士译本”(Septuagint, LXX))。这促进了犹太文化的传播和犹太人的希腊化。

博学园除图书馆外，有动植物园以及专门研究天文学、解剖学等的房间，甚至有食堂。博学园类似于现代科学院与大学，享受俸禄的学者聚集在这里互相讨论，进行教学、研究。这座“缪斯神庙”，也是现代“博物馆”的起源。

托勒密二世还在主图书馆附近的塞拉皮斯神殿（Serapeum）另设一子馆存储图书。塞拉皮斯（Serapis）是托勒密一世“在一个梦的启示下”引入的希腊－埃及神祇，用于在精神上统一王国中作为统治阶层的希腊人和当地的埃及人。塞拉皮斯具有希腊人的外型，但着埃及人的服饰。它也是希腊化时代埃及最重要的神祇之一，而亚历山大城的塞拉皮斯神殿是埃及最有名的塞拉皮斯神殿。

前 47 年，凯撒火烧亚历山大城的舰队，殃及亚历山大图书馆。前 30 年，罗马帝国国君屋大维进入亚历山大，克丽奥佩托拉七世（Cleopatra VII, 前 69-前 30，即埃及艳后）自杀，托勒密王朝结束。自此埃及成为罗马帝国的行省，但希腊文明的传统与遗产还在延续。

罗马统治时期的亚历山大城——宗教冲突与文明衰落

罗马统治时期的亚历山大城居住着希腊人、犹太人和埃及人，同时也是各种宗教的大熔炉，并存着异教（如希腊神话中的多神教信仰)、犹太教和基督教等多种宗教。基督教起源于公元 1 世纪罗马帝国统治下的巴勒斯坦（旧称：迦南地）耶路撒冷地区

的犹太人社会。在 4 世纪前常受迫害：被罗马当局焚教堂、烧经书、禁止宗教集会、逮捕神职人员并处死不祭罗马神者。但基督教却以其“爱人如己”的平等、博爱的朴素精神，以“天国的福音”劝人悔改，转离恶行的观念而在广大被压迫的社会底层人群中得到极大反响。因此基督教不但屡禁不止，反而传播得更加广泛深入。到 3 世纪，基督教已经发展为地中海地区最大的宗教。

罗马帝国后来被迫改变策略，对基督教进行保护并加以利用。罗马皇帝君士坦丁一世（大帝）（Constantine the Great, 272-337）在 313 年颁布米兰诏书，承认基督教为合法且自由的宗教；而且他自己也成为了历史上第一位信仰基督教的皇帝。罗马皇帝狄奥多西一世（Theodosius I, 347-395）在 393 年宣布基督教为国教，下令摧毁所有神庙，严禁异教崇拜。第二年，延续了一千多年、举办了近 300 届的古奥林匹克运动会也因与希腊诸神崇拜有关而被迫终止。

亚历山大城曾和罗马等并列为基督教世界的宗教中心之一，其主教称为牧首（或称宗主教），有指导其下属主教的权力。甚至在罗马教宗称教宗前，亚历山大城主教还曾有教宗头衔。亚历山大牧首（Patriarch of Alexandria）控制了从利比亚边界到努比亚边界大片地区的基督教会事务。

391 年亚历山大城牧首提阿非罗（Theophilus）挟皇帝之名，摧毁了亚历山大城许多异教神庙，亚历山大城图书馆可能就是这个时候被毁的，其中确定包含塞拉皮斯神庙及附属图书馆。

395 年狄奥多西一世去世，他把帝国一分为二：首都分别在君士坦丁堡（今伊斯坦布尔）和罗马的东、西罗马帝国。埃及归属于东罗马帝国。

基督教内部也因教义而相互斗争。即使最近一百多年中，也有被传统基督教视为异端的新的有影响的教派在发展。325 年君士坦丁皇帝首次召集全国 318 名主教到尼西亚开会，讨论问题之一就是亚历山大城的教派间关于教义的争论。亚历山大城主教亚他那修（Athanasius of Alexandria, 296~298-373）在会议中攻击亚历山大城的阿里乌教派看重基督的人性，否认基督的神性的论点。尼西亚会议最终将阿里乌教派斥为异端，确定了耶稣基督与天父是同质的。

提阿非罗的外甥西里尔（Cyril, 375-444）在 412 年继任亚历山大牧首，对异教更加严厉。他逐渐主宰亚历山大城各方面，甚至使用武力。如他大力镇压最无辜又无害于人的诺瓦替安（Novatians）派。他禁止他们举行宗教仪式，并没收他们圣礼用的器皿。

亚历山大城的犹太人曾有计划地杀害了许多基督徒。史载某晚街上有人高喊“教堂着火了”，骗致许多基督徒涌向教堂去扑火。已埋伏好的犹太人杀害了这些基督徒。黎明，西里尔僭越总督之权，带领基督徒攻打各处犹太教会堂，将所有犹太人（亦有记载指只是杀人犯）驱逐出城。

埃及的总督奥瑞斯特斯（Orestes）对西里尔以教会之名干涉政府日常事务极为不满。一次，奥瑞斯特斯拒绝了西里尔送赠的圣经以表不从。这引起了 500 名来自尼特里亚（Nitrian）的修道士的不满。这些修士是西里尔及其舅父提阿非罗专门训练用来对付异己的。他们煽动了针对奥瑞斯特斯的暴动，指控已受洗为基督徒的奥瑞斯特斯为异教徒。骚乱中，一名修士阿莫尼乌斯（Ammonius）以石头袭击奥瑞斯特斯以致其头破血流。奥瑞斯特斯后将阿莫尼乌斯处死，但西里尔反而将阿莫尼乌斯尊为殉道者。总督都无安全保障的亚历山大城终于发生了使西里尔永背骂名的希帕蒂娅遇害事件。此后，亚历山大城许多学者纷纷出走，而亚历山大城文化中心的地位也逐渐黯淡，数学、哲学等学术的教育和研究逐渐转移到雅典。529 年，延续了近千年的学府——雅典的柏拉图学院——也被东罗马帝国皇帝查士丁尼大帝下令关闭。后来号称最后的“新柏拉图主义哲学家”和雅典柏拉图学院最后的学者的

图 11 塞拉皮斯神庙原址的庞贝之柱和他前面的两个斯芬克斯狮身人面像之一。庞贝之柱高 20 多米，为粉红色花岗岩石柱。该柱立于 297 年，为纪念罗马皇帝戴克里先。此柱为古亚历山大城留下的不多的遗迹之一

图 12 亚历山大城的西里尔主教，掌控亚历山大城期间，希帕蒂娅被杀害。他在罗马天主教等教派中被尊为圣人

图 13 电影《城市广场》剧照：希帕蒂娅在抢救图书资料

图 14 图中持卷者为新柏拉图主义的奠基人普罗提诺

Damascius 也被迫逃亡波斯。

640 年伊斯兰教教徒征服埃及，亚历山大城残留的 30 万希腊经典被阿拉伯征服者下令销毁——当作柴火足足烧了 6 个月。这也或许是希帕蒂娅的著作没有流传下来的一个主要原因。至此，古亚历山大图书馆正式走下历史舞台[8]。这也给后人以教训。图书集中的效应无疑是巨大的，但这在历史上也往往带来了图书的大毁灭。

西罗马帝国于西元 480 年衰落，欧洲进入了中古时代。东罗马帝国一直延续到 1453 年被土耳其人灭亡，一定程度上保存了希腊文明。

亚历山大城之神学、新柏拉图哲学及其关系

希帕蒂娅是她那个时代新柏拉图哲学的领袖。我们不拟探索她的哲学观点，只是粗略地介绍亚历山大城新柏拉图哲学的传统及其与基督教神学的关系。

作为文化中心和基督教的管理中心，亚历山大城也是基督教的理论中心。这里的神学研究者和哲学研究相应而形成了有影响的亚历山大学派。

宗教和希腊哲学有着密切的联系。柏拉图第一个使用了“神”（Theologia）一词并提出了哲学史上第一个有关神之存在的证明。他的“理念论”等学术有着明显的宗教倾向。早在耶稣时代，亚历山大城的斐洛•尤迪厄斯（Philo Judeaus, 前 15- 约 40 后）就开始了将宗教信仰与哲学理性相结合的尝试，致力于使犹太教的信仰哲学化。恩格

[8] 亚历山大城希望重复当年辉煌，在联合国教科文组织的资助下，已建成一个现代亚历山大图书馆（1995 年开建）。

斯称他为“基督教真正的父亲”。

亚历山大城的神学研究者可谓不畏艰难，前赴后继：约 190 年哲学家潘代诺（Saint Pantaenus, 约 200 年去世）就在亚历山大城建立了一个圣道学校，教授基督教神学。后来，他的学生亚历山大城的革利免（Titus Flavius Clemens, 150-215）接掌这个圣道学院。在 202-203 年，他受罗马当局迫害而被迫逃离亚历山大城。革利免最著名的学生是俄利根（Origenes Adamartius, 185-254）。他在 18 岁时就开始续革利免之职。罗马皇帝德修（Decius）在位期间（249-251）展开了全国性的对基督教的迫害。俄利根就是这个时期被投入监狱受刑后不治而死。

潘代诺、革利免和俄利根这三位神学家是基督教早期（2 世纪 -5 世纪）的教父[9]，他们的主要特点是以希腊哲学来解释基督教的信仰以使基督教更有吸引力。其中柏拉图哲学对他们影响最大。如俄利根就运用当时流行的新柏拉图主义来解释基督教神学教义。他们的哲学被称为教父哲学。

图 15　耶稣受洗图。弗朗西斯科 • 阿尔巴尼（Francesco Albani, 1578-1660）创作于 1640 年。此画藏于俄罗斯圣彼得堡埃尔米塔日（Hermitage）博物馆。《马太福音》三章 13-17 节中说：父神在天上说话；圣子从水里上来；圣灵仿佛一只鸽子降下，落在他身上

亚历山大城是新柏拉图主义的摇篮和基地。其创始人就是亚历山大城的阿摩尼阿斯 • 萨卡斯（Ammonius Saccas, 175-242）。而新柏拉图主义最重要的奠基人物是萨卡斯的学生普罗提诺（Plotinus, 204-269）。普罗提诺早年在亚历山大城学习、研究，243 年才到罗马定居。普罗提诺以柏拉图哲学为基础建立了系统的新柏拉图学派的理论。他主张世界的本原是“太一”，即神；太一创造万物的过程表现为源溢的过程，这分三阶段或三等级：首先流出的是“奴斯”，即纯粹的理智、精神或思想，然后从“奴斯”流出灵魂，最后从灵魂流出物质世界；灵魂必须清除一切欲望，从肉体中超脱，经过“净化”进入“出神”、“忘我”的状态，达到与“太一”融合，与神合为一体。

虽然新柏拉图学派的学术有明显的宗教特征，但他们成员很多不是基督徒，是所谓的异教徒。希帕蒂娅自己也是异教徒，但在她那个时候，她已有许多学生是基督徒，其中包括她最出名的两个学生辛乃西斯（Synesius of Cyrene）和亚历山大城总督奥瑞斯特斯。

辛乃西斯出生于昔兰尼[10]附近，是富裕的名门之后。他家族宣称他们是斯巴达王的后裔。辛乃西斯和他兄弟在 393 年由遥远的家乡来到亚历山大城，求教于希帕蒂娅。辛乃西斯热衷于新柏拉图主义。他后任托珞麦斯（Ptolomais）地方主教。

传统基督教与其它两个一神教（犹太教、伊斯兰教）不同之处在于基督教以耶稣基督为圣子，接受三位一体之教义，即认为圣父、圣子、圣灵为同一主体。三位一体的教义是经过长期的发展而被接受的，早期基督教内部关于圣子以及三位一体的教义，也长期有争论。

现在广泛接受的是和希帕蒂娅同时代的奥古斯丁（Augustine of Hippo, 354-430）所作的阐述，他将新柏拉图主义和《圣经》系统地进行了融合。在三位一体教义和新柏拉图主义融合的历史上，辛乃西斯也起了重要作用。

亚历山大时期的古希腊数学

古希腊人的数学，和他们的哲学思想相符，强调形式逻辑、公理化体系以及演绎和证明，是现代数学和科学之基石。古希腊数学的发展历史一般分为两个时期：约从公元前七世纪中叶到公元前三世纪年的古典时期以及此后的亚历山大期，结束标志为亚历山大城被阿拉伯人占领。希腊数学的亚历山大期也常以罗马帝国吞并希腊为分界线而划分为前、后期。古典时期的古希腊数学代表主要有以泰勒斯（Thales, 约前 624-约前 546）为首的伊奥尼亚学派（Ionians），毕达哥拉斯领导的学派以及后来的柏拉图学派。柏拉图本人在数学上的具体贡献不多，最著名可能是以他名字命名的柏拉

[9] 统指早期基督教会史上的宗教作家和宣讲师。

[10] 昔兰尼（Cyrene）历史上为希腊在北非重要的殖民地，是著名的文化重镇；如柏拉图曾到这里游历。后文介绍的数学家埃拉托塞尼也出生在这里。今为北非国家利比亚东部城镇夏哈特（Shahat）。作者撰写此文时，利比亚处战争状态，夏哈特也不宁静。

图多面体。这个学派对数学的具体贡献主要是学派里的其他人做的，如数学家欧多克斯（Eudoxus of Cnidus, 前 408-前 355）是他们的重要代表。他创立了同时适用于可通约量及不可通约量的比例理论。但柏拉图关于数学的哲学观念却对后世影响极大。一方面他的哲学为数学的抽象奠定了基础，另一方面又认为数学客观真理是可以认识的。而且，柏拉图重视数学教育，他的学院标榜“不懂几何者不得入内”。

图 16 《几何原本》的一个拉丁文译本的封面，约 1309-1316

亚历山大前期 希腊数学的亚历山大前期堪称希腊数学的黄金时期，这时期的代表人物主要有欧几里德（Euclid, 活跃于前 300 年）、阿基米德（Archimedes of Syracuse, 前 287- 前 212）、阿波洛尼乌斯（Apollonius of Perga, 约前 262-约前 190）和埃拉托塞尼（Eratosthenes of Cyrene, 约前 276-前 195）。

欧几里德是博学园的第一任数学教授，“这世上没有通往几何学的皇家大道”就是欧几里德对托勒密一世所做的劝学名言。欧几里德最大的成就是用公理方法整理前人的几何学成果，写成了 13 卷本的《几何原本》（Elements），影响深远。《原本》前六卷为平面几何，后三卷为立体几何，其它 4 卷为数论和无理数。欧几里德遗留下来的著作还有《已知数》（Data），研究几何问题中如何由给定的部分信息去求其它性质。

图 17 阿基米德式螺旋抽水机

叙拉古的阿基米德在很多方面都有研究，是古希腊最伟大的数学家，我们毋庸赘言。特别值得一提的是他求面积所应用的“穷竭法”蕴含着近代微积分的思想。阿基米德到过亚历山大城，相传现今仍在埃及等地用于灌溉的阿基米德式螺旋抽水机就是他在亚历山大时期发明的。这其实只是多才的阿基米德众多发明之一。例如他发现了浮力和相对密度原理，应用杠杆原理对付罗马军队等。

佩尔加的阿波罗尼乌斯曾在亚历山大城的博学园追随欧几里德学习并在亚历山大城任教。阿波罗尼乌斯以对圆锥曲线的研究最为著名，最早发现平面按不同方向切割圆锥面可以得到不同类型的圆锥曲线——阿波罗尼乌斯定名的抛物线、（椭）圆和双曲线。他著有《圆锥曲线论》（Conics）、《论切触》（Tangencies）等。欧几里德的《几何原本》总结了平面几何和立体几何的成就，阿波罗尼乌斯的《圆锥曲线论》则是圆锥曲线研究之大成。他的著作也是后世解析几何的先驱。

阿波罗尼乌斯也是杰出的天文学家。由托勒密的著作中我们知道他已使用了偏心圆、均轮等来解释天体运动。在他一千八百年后，德国天文学家开普勒将应用圆锥曲线理论于行星轨道研究并开启牛顿的万有引力理论等灿烂的近现代数学、科学研究。

昔兰尼的埃拉托塞尼也曾在亚历山大城学习。公元前 236 年，他还被托勒密三世（Ptolemy III Euergetes I）委任为亚历山大图书馆馆长。埃拉托塞尼一个著名的发明是

(a) 丹麦哥本哈根第谷天文馆

(b) 美国圣路易斯科学中心的 McDonnell 天文馆

图 18 圆锥曲线造型的天文馆

寻找素数的筛法：要得到某个自然数 $n(\geq 2)$ 以内的所有素数，只要划去 2 到 n 中不大于$\sqrt{n}$ 的素数的倍数即可。

	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

表 1 若求 2-25 之内的素数，只需从 2-25 的数中前后分别删去 2,3,5 的倍数（分别以红，蓝，绿标出），则剩余的数即为所求

但埃拉托塞尼最为人乐道的或许是约公元前 240 年他在亚历山大城做过的一个著名的测量地球周长的实验。他了解到 6 月 21 日（夏至日）这天正午时分的太阳能够直射赛印（Syene，现埃及的阿斯旺）的深井，而他自己所在的亚历山大城恰在赛印的正北。而且他根据来往两地的骆驼商队得知两地大约相距 5000 视距（Stadia）。他测出这个时候亚历山大城太阳射线的倾斜角为 7°12'。因此他最终确定 700（$\approx\frac{5000}{7^\circ 12'}$）视距为一度。他据此得出地球的周长约为 252,000（360×700）视距。如果我们假设埃拉托塞尼所用的视距为埃及的视距（1 视距近似为 157.5 米），则埃拉托塞尼算出的地球周长为 39690 千米，与实际周长 40075 千米的误差很小。

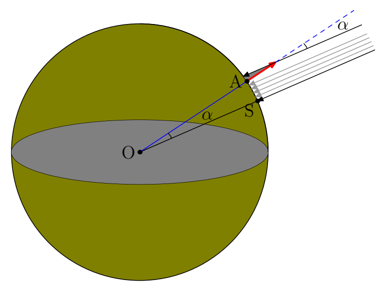


图 19 埃拉托塞尼在亚历山大城进行的测量地球周长的实验示意图

亚历山大后期 希腊数学的亚历山大后期为罗马人统治时期。罗马人重实用技术，并没有尊重数学的传统；克莱因（参 [7] 第 202 页）说罗马人在历史舞台上活跃的一千一百年之间没有出现过一个罗马数学家就足以说明罗马数学史的整个情况了。历史不会忘记手无寸铁，正沉浸在数学研究中的阿基米德是被无知的罗马士兵杀害的。而且罗马统治时期，基督教逐渐兴起、发展，“从数学史的观点说，基督教的兴起产生的后果是不幸的”，“他们反对异教徒的学问，嘲笑数学、天文和物理科学”（克莱因 [7] 第 205-206 页）。

但亚历山大后期希腊的数学传统还在延续，仍有不少出色的数学家涌现，如托勒密（Claudius Ptolemaeus, 约 90-168）、丢番图（Diophantus，200 ～ 214-284 ～ 298）和帕普斯（Pappus, 300-350）。他们都在亚历山大城工作。

在介绍托勒密之前，我们需要知道古希腊数学家往往同时是哲学家和天文学家，他们有应用数学（几何）知识去诠释宇宙、进行天文计算的传统。特别是在技术不成

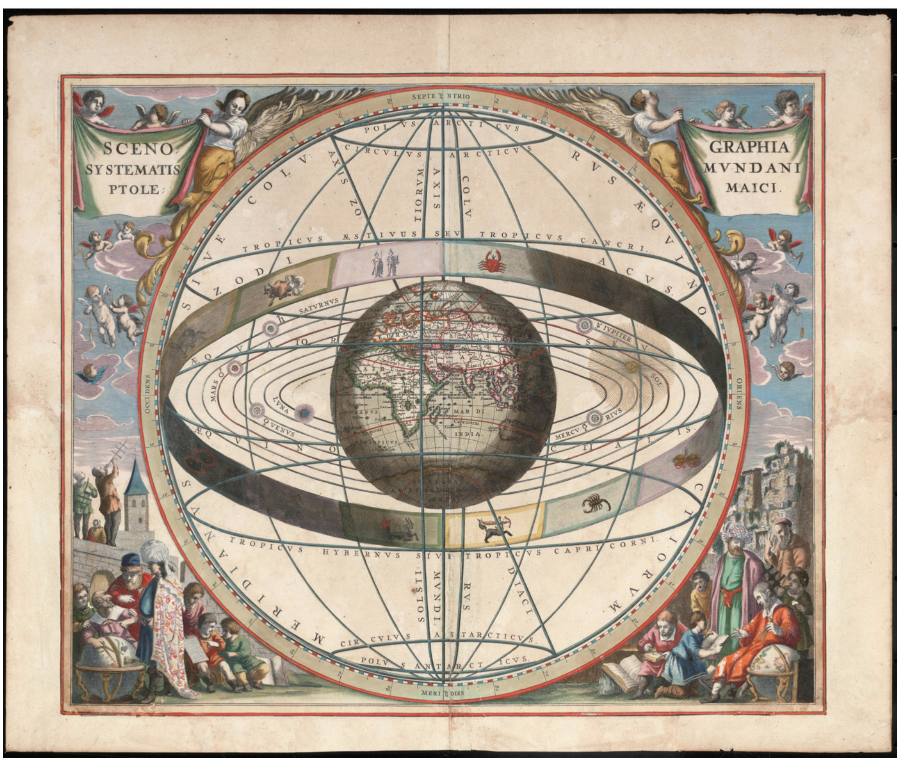


图 20 托勒密地心体系

熟的时代，是数学起着更重要的作用。并不特别擅长数学研究的柏拉图从朋友那里了解到凸面正五面体只有五种，然后就用之来描述他的宇宙观，认为世界由五种元素组成。这或许和毕达哥拉斯宣称的“万物皆数”一样荒诞，但萨摩斯岛的阿里斯塔克斯（Aristarchus of Samos, 约前 310-约前 230）却是用了正确几何方法去测量月球大小，月地以及日地之间的距离等。前述埃拉托塞尼的测量地球周长的方法也已经准确到令人吃惊的程度。

托勒密适时地总结了希腊古天文学的成就，写成天文学百科全书《天文学大成》（Almagest, 意为“巨著”）十三卷。该书提出了地心学说[11]，以并不正确的宇宙结构设想，却较完满地解释了当时能观测到的行星运动情况。托勒密还撰写了很多其它书，如《实用天文表》（Handy Tables）。在《实用天文表》一书中托勒密列出了用来计算太阳、月亮以及其它星体位置、升起与降落、轨道的数据。

托勒密的《天文学大成》包含了许多数学知识。他的天文学可以称为数理天文学。其实该书原希腊文版即名为《数学论文》或《数学文集》（Syntaxis Mathematica 或 Mathematical Collection），只是在原书被翻译为阿拉伯文再转译为拉丁文的过程逐渐定为现名。书中最重要的数学内容是三角学知识。这些内容主要基于史称“三角学之父”的希帕求斯（Hipparchus, 前 190 年-前 120）已失传的著作。比如，书中计算了精度很高的弦长表，这实相当于正弦表（间隔$\frac{1}{4}^\circ$）。书中还使用了如下阿里斯塔克斯不等式来做插值

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}。$$

另如书中著名的托勒密定理对应于我们所熟知三角学中的正弦公式

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta 。$$

丢番图被称为“代数学之父”，他著有 13 卷本的《算术》（Arithmetica）专门研究代数方程，特别是不定方程之解。丢番图常常通过具体的例子来解释他的方法。《算术》中一个著名的问题是将一个平方数分解为两个平方数：

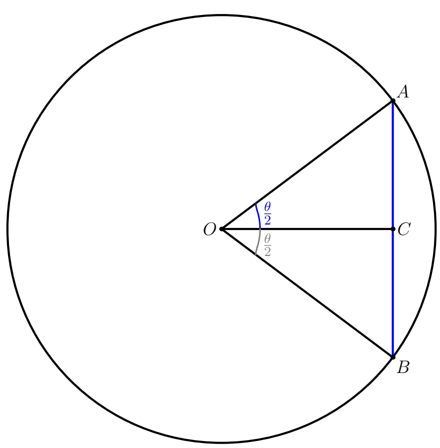


图 21 托勒密的弦长函数（$\mathrm{crd}\,\theta=AB$）与正弦函数：$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{AC}{OA}=\frac{AB}{直径}=\frac{\mathrm{crd}\,\theta}{直径}$

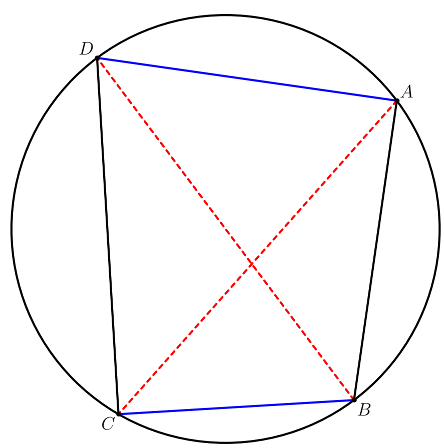


图 22 托勒密定理：圆的内接凸四边形两对对边乘积之和等于两对角线的乘积，即 $AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD$

[11] 该学术认为地球为宇宙中心，日月等星体在地球外构成等距天层。各行星绕一个较小的圆周（本轮）运动，该圆的中心在以地球为中心的圆周（均轮）上运动。还假设地球不恰是均轮的中心，即均轮是偏心圆。

考虑将 16 分解为两个平方数。设 x^2 和 $16-x^2$ 为待求之平方数。只需找到 x 以使 $16-x^2$ 为平方数。假设 $16-x^2$ 为形如 $(mx-a)^2$ 的平方数。令 $16-x^2=(2x-4)^2$ 则得到 $x=\frac{16}{5}$。

我们由此可见丢番图实际上得到了 $(\frac{16}{5})^2+(\frac{12}{5})^2=4^2$。

丢番图的例子很具体，而且在他的方法中 m 后来特取 2。如果我们将 16 设为一般的平方数 a^2，令 $a^2-x^2=(mx-a)^2$ 则可立得方程 $x^2+y^2=a^2$ 的一般解：

$$x=\frac{2ma}{m^2+1},\quad y=\frac{(m^2-1)a}{m^2+1}。$$

丢番图的书历经千年流转，1621 年巴黎出版的一个拉丁文译本中的一本来到业余数学家费马（Pierre de Fermat, 1601-1665）的手中。大约在 1637 年，当他在家研习上述问题时，得意但又有点小遗憾地作笔记于页边：下述方程

$$x^n+y^n=z^n。$$

当 $n>2$ 时没有整数解 x, y, z。同时，他说页边空白太小而无法写下他优美的证明。我们几乎可以肯定费马只是得到了一个自以为是的“正确”答案，但他的断言还是吸引了后人 400 多年的苦苦追寻，直到 1995 年才被英国数学家怀尔斯爵士（Sir Andrew John Wiles）最终解决。

帕普斯总结、补充前期学者的研究成果，著有《数学汇编》（Synagoge），为后世保存了许多数学成果。例如通过他的著作我们可以得知在希帕蒂娅之前可能还有一个名为 Pandrosion 的女数学家。帕普斯在他的《汇编》中描述了 Pandrosion 发明的得到近似立方根的几何方法。

我们看到阿基米德、丢番图的著作是实质原创研究，欧几里德的《原本》是对前人成果的综合整理和升华，但帕普斯的著作更多地应该看作是对数学经典的评注，类似于辅导书、教学讲义等。这也是帕普斯时代及其之后时代希腊数学的特点。激动人心的原创性数学研究已经不再出现，数学家们更多地要将精力放在如何使水平日益下降的学生能够学好数学。

和帕普斯同时代的还有希帕蒂娅的父亲——亚历山大城的赛昂（Theon）。赛昂之后主要的数学家就数希帕蒂娅了。而希帕蒂娅之后的数学家普罗克鲁斯（Proclus Lycaeus, 412-487）以及欧托修斯（Eutocius of Ascalon, 约 480-约 540）都已经不在亚历山大城了。普罗克鲁斯有名言“有数之处皆有美”，他对欧几里德《几何原本》第一册做过评注。欧托修斯则对阿基米德、阿波罗尼乌斯的一些著作做过评注。

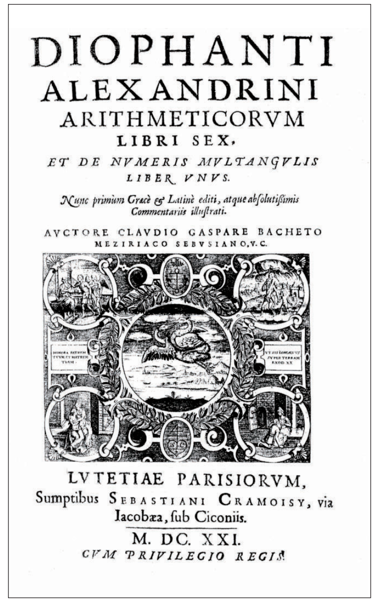

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primum Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

图 23 1621 年拉丁文版的《算术》的封页

图 24 法国邮局在费马诞辰 400 周年发行的邮票。费马的微笑诱惑了数学人长久的探索

图 25 红条中写有“ANDREW WILES 1995”，表示费马定理终被怀尔斯于 1995 年证明。该邮票由捷克发行，以纪念 2000 年世界数学年

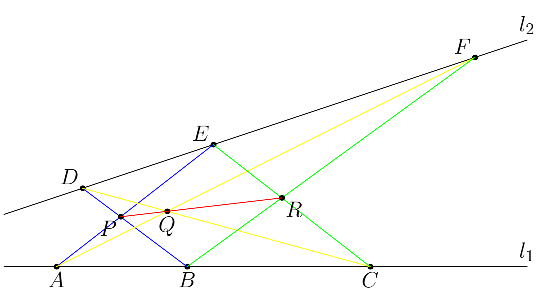


图 26 射影几何学中著名的帕普斯定理：直线 l_1 上依次有点 A, B, C，直线 l_2 上依次有点 D, E, F。设 AE, BD 交于 P，AF, DC 交于 Q，BF, EC 交于 R，则 P, Q, R 共线

图 27 电影《城市广场》中剧照：希帕蒂娅和她的父亲赛昂

希帕蒂娅的生平

我们已经了解到了希帕蒂娅生活的城市——亚历山大城的背景。一方面，她前有古希腊文明的优良传统，特别是古希腊数学在亚历山大城的传统；另一方面那个时代也已不再是科学家、哲学家安心自由探索的时代了。但因为几乎没什么资料流传下来，我们并不能说太多，虽然和许多历史人物的故事一样，有很多不能证实的传说。

关于希帕蒂娅的一手可靠资料并不多见，主要有：

- 她的学生辛乃西斯给她的书信 [11]。辛乃西斯是希帕蒂娅最著名的学生，而且可能是身为主教的缘故，他的大部分作品都得以保存。辛乃西斯的现存书信集中有 7 封是给希帕蒂娅的，时间跨度为 19 年。
- 她的同代人——基督教史学家所奎德（Socrates Scholasticus）所著的《教会史》（Ecclesiastical History）[9]；
- 7 世纪尼奇乌（Nikiû）主教约翰写的编年史（Chronicle）中有关希帕蒂娅的介绍 [5]；
- 十世纪的《苏达辞书》（Lexion of Suda）。这书是 10 至 11 世纪拜占庭学者编纂的一本百科全书性质的书 [10]。虽然此书成书较晚，但无疑它参考了许多已经失传的书籍。书中关于希帕蒂娅的条目，可能就来源于 Damascius 失传的作品 The Life of Isidore[12]。

二手的研究资料比较多，其中主要的有波兰女历史学家玛丽亚 • 泽丝卡（Maria Dzielska）的书 [2]，Michael Deakin 的书 [1] 以及一些书中相关的文章 [8, 12, 13] 等。

希帕蒂娅的父亲赛昂是亚历山大城博学园最后一批研究员之一。他自己是一位优秀的数学家、天文学家。按照哈伯德等人的作品的合理“想象”，赛昂是一个成功的父亲：

[12] Isidore 是 Damascius 的老师。《苏达辞书》不完全可信，其中有前后矛盾处，如一时声称希帕蒂娅嫁给了 Isidore，一会又说她保有处子之身。

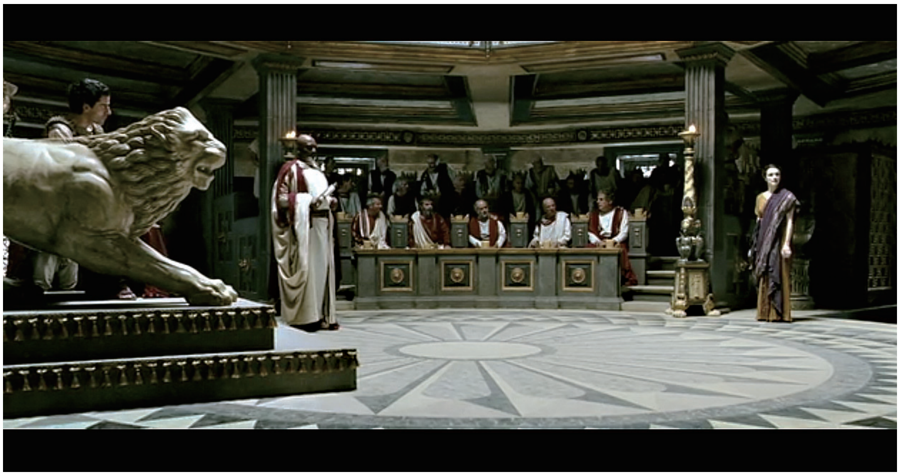


图 28 电影《城市广场》剧照：希帕蒂娅在辩论

> 虽然当时的世界对女性已有很深的偏见，但赛昂决意将自己有天赋的女儿培养成完美的人：亲自教希帕蒂娅数学、逻辑、艺术、文学、科学、哲学和演讲等。最难能可贵的是，赛昂不仅仅教女儿各种前人积累下来的知识，还训练女儿对这些知识消化、吸收和判别的能力。赛昂也不让严格的宗教信仰占据希帕蒂娅的生活。哈伯德在书中描写赛昂对希帕蒂娅的教诲："保持思考的权利，即使错了也比不思考好"。赛昂也着重训练希帕蒂娅与智力相匹配的体魄：编排体操让女儿有规律地练习，并教她骑、射、游泳和登山等技艺。

也有传说道希帕蒂娅曾经到雅典、意大利等地游学十载（有的说约一年左右）。但事实也许是她从没出过远门。

英国历史学家爱德华•吉本(Edward Gibbon, 1737-1794)在他的《罗马帝国衰亡史》[3] 中描述："数学家赛昂之女希帕蒂娅，从小受其父亲所研之熏陶。她以有创见的评注阐释了阿波罗尼乌斯和丢番图的理论。她也在雅典、亚历山大城公开讲授柏拉图和亚里士多德的学术"。"显要、名流们迫不及待来拜访这位女哲人。"

《苏达辞书》中说"她备受市民的爱戴。每个新来的城市统治者第一要务就是先来拜访她"。

所奎德在他的《教会史》中对希帕蒂娅做出如下描绘：

> "她在文学与科学领域有很深的造诣，水平远超与她同代的哲学家们。她继承了柏拉图、普罗提诺学派，并向听众阐述他们的哲学原理。许多人不远千里而来以获教诲。受过良好教育的她具有一种沉着从容、平易近人的气质。她经常出现在公众场合和当地的行政长官面前，她也从不因参与男人的聚会而羞窘。由于她超凡的尊严与美德，人们反而更加敬重她。"

但公元七世纪的尼奇乌主教约翰（Bishop of Nikiû）[5] 却有明显偏见，其中希帕蒂娅被描述为一个魔术家："那时的亚历山大城出了一个女哲学家，一个名为希帕蒂娅的异教徒。她把所有的时间投入到魔法、星盘以及乐器上。她以恶魔的巧计蒙蔽了许多人。"

作为女名人，自然希帕蒂娅需要在公众中出现;恰又如此漂亮的她，不免有麻烦。但希帕蒂娅以教学研究为己任，终身未婚。吉本使用了诗意的描写 [3]："她有烂如夏

图 29 电影《城市广场》剧照：希帕蒂娅在教学

花般美丽的容颜，成熟的智慧和谦逊温婉的个性。她谢绝追求者之爱，全心教育自己的学生”。《苏达辞书》中确记载有她拒绝求爱者的故事，虽然可信度不高，但对于她精湛的教学和雄辩之说可以有所了解：

> “她如此美丽，充满魅力，以致她的听众中有个人爱上了她。他无法自制，只好向她告白。有传言道是她以音乐慰籍了他的相思病，但事实上，音乐对他全无效果。于是她带来了一些她每月使用的碎布条，并将它们掷向他，向他展示她不洁之源，说：‘年轻人，你爱这东西吗？这一点也不美丽。’那人的灵魂便由这羞耻、惊人而不快的景象而改变，心思从此复归正途。”

希帕蒂娅是一位伟大的教师。她的许多学生大都成为社会的中流砥柱，其中有成为主教的辛乃西斯和做亚历山大城总督的奥瑞斯特斯。她作为教师在学生心中的地位，可从辛乃西斯给她的信中读到。辛乃西斯在他的信中提到希帕蒂娅的一些学生，且辛乃西斯也和他的老师一生都保持着学术和生活上的联系。他在病床上写的最后一封信也是向他挚爱、尊敬的老师希帕蒂娅的告别信。在辛乃西斯的第 81 封信中，他向希帕蒂娅陈述失子之痛；他在第 136 封信中叙述他访问雅典学院的观感：“这里已没有任何东西，除了一张皮来帮助我们想象当年鲜活的样子”，相比希帕蒂娅的学院，他对雅典学院倍感失望。辛乃西斯在第 154 封信中向希帕蒂娅介绍了他写的两本书，其中一本是关于神的启示的，他一定发表，由此可见，即使他们师徒信仰不同，但还是可以自由讨论的；另一本是关于哲学的，他希望只有在得到希帕蒂娅的推荐后才发表。

希帕蒂娅之死

希帕蒂娅被害的时期正当我们前述亚历山大城主教西里尔和长官奥瑞斯特斯之间的政治斗争白热化之际。关于希帕蒂娅的死亡，有不少记载和推断。如有人认为希帕蒂娅可能是第一个受到基督教会势力迫害的所谓“女巫”。我们仅引用一些较早的记录，请读者自己去判断吧。

图 30 希帕蒂娅之死：被拽下车拖往教堂

所奎德在《教会史》中记载她的死亡“发生在四旬斋期的三月里，是西里尔担任主教教职的第四年（即 415 年）”，还详述：

> “即是她也成了政治忌妒的牺牲品，在那时期这种现象很普遍。由于她频繁与奥瑞斯特斯晤面，在基督徒中便有蜚语流言，说就是她阻挡了总主教与奥瑞斯特斯之间的和好。于是有些固执的基督徒怒火中烧，‘热血沸腾’，由一个名叫彼得（Peter）的礼拜朗诵士带头，潜伏在希帕蒂娅返家的路上，将她拽下马车，拖到一所叫做西赛隆（Caesarion）的教堂中。在这个教堂，他们撕去她的衣服，以砖瓦将她杀死、分尸。她破碎的肢体被带到一个叫做辛那隆（Cinaron）的地方焚烧。”

《教会史》中还评论道：

> “这个事件不仅使西里尔，也使整个亚历山大城的基督教会蒙羞。没有其它事情比这样的屠杀、斗争和利益交换的发生更能远离基督教的教义的了。”

吉本在他的《罗马帝国衰亡史》也说希帕蒂娅“遭礼拜朗诵士彼得和一群狂热、残忍的极端分子的手毫无人性地屠戮致死”，并将希帕蒂娅之死归咎于西里尔：“正义的调查与惩罚最后因行贿而被罢。但希帕蒂娅的谋杀案，已在亚历山大城的西里尔的人格与信仰上，印下无法拭除的污点”。关于忌妒一说，吉本也简述“西里尔忌妒地看着云集她门前的冠盖车马和随从奴隶”。这在《苏达辞书》中有生动的描述：

> “有一次西里尔路过希帕蒂娅住所，看到她门前有许多人马聚集，有人匆匆赶来，有人离去也有人侍立。西里尔便问这是些什么人且在这里做什么。当他得知这是哲学家希帕蒂娅的房子，并且她正在发表讲话时，他的心被忌妒撞击，立即谋划了她的死亡，这是所有谋杀中最见不得人的那种。”

约翰主教虽然对杀害希帕蒂娅的人持赞扬态度，但也不能抹杀希帕蒂娅是被基督徒残忍地杀害的事实：

图 31 利玛窦和徐光启翻译的中文版《几何原本》中的插图，背景可见基督教十字架。他们是该书中文版最早的翻译者（1607 年）

> “一群上帝的虔诚信徒聚集在一起，……以火焚烧她的尸体。于是所有的人围绕着牧首西里尔，称他‘提阿非罗再世’，因为他摧毁了亚历山大城中偶像崇拜最后的余毒。”

希帕蒂娅之惨死促使奥瑞斯特斯向罗马报告并请求调查。但他也自身难保，最终离开了亚历山大城。而所谓的调查也一拖再拖，最后主教竟然掩盖扭曲事实，宣称希帕蒂娅并没有遇害，只是去了雅典。提督的继任者也被迫和主教同流合污，协同保持口径。

希帕蒂娅的成就

希伯蒂娅也在数学、天文学等领域有重要的贡献。作为天文学家，她的名字被用来命名一些天体；作为几何学家，Adobe 公司的一种新的字体以她的名字命名（Hypatia Sans Pro）。但关于希帕蒂娅的确切贡献的历史记载其实不多。由赛昂在所注书中的记述，我们知道她协助父亲注释了《几何原本》、《天文学大全》等书；在《苏达辞书》中有一行只 12 个单词还腐蚀不全的描述，说希帕蒂娅评注了三本书，现在一般接受的解读是“她评注了丢番图的著作、天文学准则（Canon）以及阿波罗尼乌斯的圆锥曲线”。我们不去讨论“Canon”究竟是何书，我们足以知道希帕蒂娅协助她父亲评注的作品，以及自己单独评注的《圆锥曲线论》和《算术》已是古希腊数学传统中最要紧的著作。此外，根据辛乃西斯的信件，我们知道她精于机械制造，如她对比重计和小星盘的制造有研究。

我们已经介绍过，到希帕蒂娅及其父亲赛昂所处时代，希腊数学原创的高峰已过，与数学家帕普斯等一样，主要为前人的著作进行评注，为数学知识的薪火相传而起作用。但我们也不能轻视这些评注。古时的注释常常意味着对原著的重新撰写，注家往往插入自己的成果而不和原著者的成果进行区分。我们只要想想费马大定理当年也只是费马留在《算术》一书中的空白处。而 1670 年版的《算术》就包含了费马的注释，特别是他的大定理！可以类比的是中国古代著名的数学名著《九章算术》也是历经过多人的增补和整理，不仅仅有我们熟知的刘徽。

协助父亲注释《几何原本》、《天文学大全》 赛昂自己评注了一些著作，如托勒密的《实用天文表》等书。但他影响较大的评注作品是希帕蒂娅协助的欧几里德的《几何原本》和托勒密的《天文学大全》。可以说他们所评注的这两本书是亚历山大城数学的代表作。其中赛昂父女版本的《几何原本》几乎是后世《几何原本》的定本，而且十九世纪末前该本是惟一存世的版本。在对《几何原本》的注释中，赛昂尽力纠正前人的错误（虽然他自己也有将正确的改错的情况）；使用统一标准的记号；而且将太过简略而不易理解的论点详加说明，甚或补充命题。赛昂在他对《天文学大全》评注的序言中说，“（前人的注释）省略了他们宣称的显而易见之处，而事实上，他们往往忽略了最困难的论证。”

历史或许喜欢讽刺，不但希帕蒂娅所研究宣讲的哲学被基督教吸收作为自己“不能被人类有限的理性所理解”的教义基础；而且传教士也常常用她的数学著作来传教。如意大利传教士利玛窦为了方便宣传，以希帕蒂娅贡献过的数学著作吸引中国学者的关注，最终和受洗为基督徒的明朝学者徐光启合作翻译了中文版《几何原本》的前 6 卷（1607 年）。

评注《圆锥曲线论》 阿波罗尼乌斯的《圆锥曲线论》共有 8 卷，现只存前 7 卷。前 4 卷留有欧托修斯评注过的希腊文版本；第 5 至 7 卷有阿拉伯文译本。前 4 卷介绍了圆锥曲线的基本性质。虽然其中许多性质在阿波罗尼乌斯之前是已知的，但阿波罗

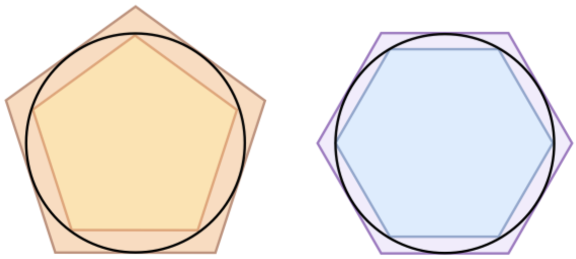


图 32 阿基米德计算 π 值的示例

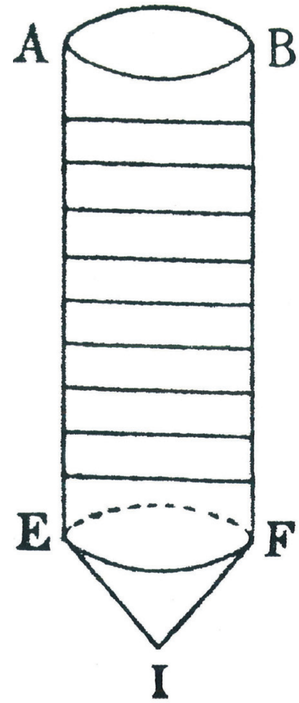


图 33 辛乃西斯信中描述的比重计示意图（图片来自书 [1] 中）

尼乌斯的处理超越了前人。即使这些初等部分在他的书中也包含了很多原创的东西。我们不知道希帕蒂娅是否评注了全 8 卷还是只注释前 4 卷，但欧托修斯自己做注时应该参考过希帕蒂娅评注的材料。这说明希帕蒂娅的工作或许至少含在前 4 卷中。

评注《算术》 1464 年发现的丢番图所著《算术》希腊文本仅存其中 6 卷。数学史家们注意到希帕蒂娅注释了《算术》前 6 卷，而存世的也恰是 6 卷，因此一般认为希帕蒂娅的贡献包含在这些作品中。

《算术》中的一道题如下：

求两个整数，使他们的和为 20 而平方差为 80。丢番图提供的解法是：设这两个数分别为 $10+x$ 和 $10-x$，其平方分别为 $x^2+100+20x$，$x^2+100-20x$。因此其平方差为 $40x=80$。最后得到 $x=2$。所以这两数分别为 12 和 8。

以前数学史家们常常将《算术》卷二中起始部分的如下学生习题归功于希帕蒂娅：

已知 a, b，求解下列方程组

$$x-y=a,\quad x^2-y^2=(x-y)+b。$$

这个问题可以看作是前述更具体的问题的推广。数学史家们也常常认为希帕蒂娅的工作在于将丢番图的问题抽象化，这更符合现代数学的精神。但在 1973 年，伊朗的马什哈德发现了另 4 卷阿拉伯文抄本。因此也有人认为，希帕蒂娅的贡献更有可能是保存在阿拉伯文抄本中。

其他作品：评注《圆的测定》等 数学史研究者 [1, Chapter 9, Section I] 认为希帕蒂娅曾编辑过阿基米德的著作《圆的测定》(Dimension of the Circle)。此外，佚名的《等周图形》(On Isoperimetric Figures) 以及《曲面》(On Curved Surfaces) 也可能受到过希帕蒂娅的影响。我们只简介阿基米德的著作《圆的测定》。

阿基米德的这篇论文只有三个命题。其中他用穷竭法证明了：圆的面积等于两直边分别为圆周长和半径的直角三角形的面积；$\pi\approx 3.1415926$ 的值介于 $\frac{223}{71}\approx 3.1408$ 和 $\frac{22}{7}\approx 3.1428$ 之间。阿基米德为计算 π 值，使用了 96 边正多边形来内接、外切圆。[13] 此书中还含有一个令人吃惊地精确的 $\sqrt{3}\approx 1.7320508$ 的有理数逼近：

$$1.7320261\approx\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}\approx 1.7320513。$$

比重计 辛乃西斯书信集的第 15 封信是给他老师希帕蒂娅的，他说他处境不好，请求希帕蒂娅帮他制作一个比重计 [14]，并详细描述了该仪器的规格。该信件已成为历史上最早有关比重计的描述的文字。他需要一个比重计的原因可能是处于病中的他需要用来配置药剂。

13 如果要用这种方法，为了得到祖冲之（429-500）关于 π 的近似值（$3.1415926<\pi<3.1415927$）则需要计算 $12288=3\times 2^{12}$ 边正多边形。这几乎是不可能的任务，因此很可能祖冲之使用了某种已经失传的方法。此外，祖冲之关于 π 的有理数近似也很好：$3.1415920\approx\frac{355}{113}<\pi<\frac{22}{7}$。

14 原信件中写为 Hydroscope，研究者一般认为是 Hydrometer，即测量液体密度的仪器。

图 35 英国坎特伯雷出土的一个中世纪小星盘

图 34 北京古观象台的“浑仪”

星盘 星盘是古代天文学家进行天文测量如定位星体在宇宙中位置的重要仪器。早期的星盘是所谓的“浑仪”。这是一个三维机械模型。其原理是将宇宙当作一个天球，而将各种星座及其之间的关系投影到天球上。

托勒密在他的《平面天球图》(Planisphaerium）中给出了球极平面投影理论。这使得构造更为实用的平面星盘——“小星盘”——成为可能。虽然不确定托勒密是否研制出小星盘，但希帕蒂娅的父亲确实通晓小星盘的理论，并可能写了一篇与此有关的论文。

辛乃西斯在一篇名为“献给星盘”的给友人 Paionos 的信中说，他自己在希帕蒂娅的帮助下自己设计出了星盘。由此可认为，制造小星盘的理论和方法由托勒密传下，经过赛昂到希帕蒂娅，再由希帕蒂娅教给辛乃西斯。

希帕蒂娅传奇——启蒙运动、女权运动以及小说、影视中的希帕蒂娅

泽丝卡在她的书中 [2] 有足足 26 页，全书正文四分之一的文字来叙述有关希帕蒂娅的文学传奇。启蒙运动的作品往往根据这个时期作者的意愿，将希帕蒂娅之死归咎于基督徒的迫害，作为“不理性的宗教迫害理性的异教”之象征。但其实如果他们仔细研读资料，或许会发现，希帕蒂娅之死更多应该是源于政治斗争的牺牲品。确实，希帕蒂娅的学生中有不少基督徒，甚至她的学生辛乃西斯还是西里尔的好朋友。此外，将希帕蒂娅之死当作古希腊科学传统的终结也略显夸张。而在近代第二波女权运动中，希帕蒂娅更多地是被作为女权主义的代表而被宣传。此外，因为希帕蒂娅的生平颇为传奇，而且牵涉神秘的宗教等，资料不多又给作者们很大的想象空间，因此历来有很多小说、影视等作品以她为题。

启蒙运动中作为殉道者的希帕蒂娅 14 世纪末，许多西欧的学者发现了由东罗马帝国保存的古希腊和罗马的文化和艺术，而希望重新学习。文艺复兴运动由此兴起。

图 36 电影《城市广场》剧照：希帕蒂娅在用星盘观天

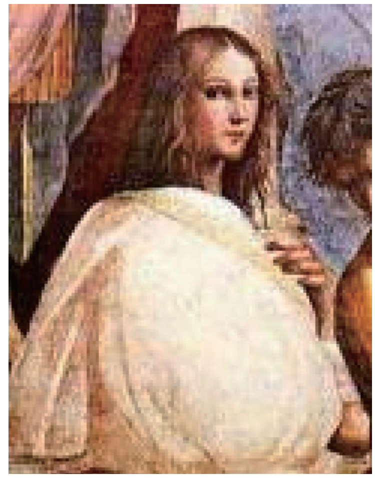
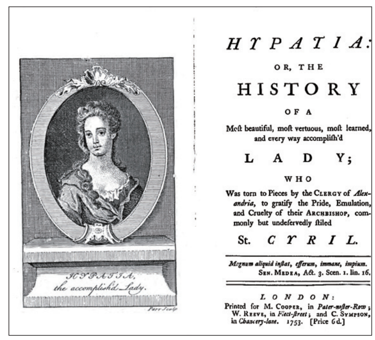


图 37《雅典学院》中的白袍女子：希帕蒂娅



HYPATIA:
OR, THE
HISTORY
OF A
Most beautiful, most vertuous, most learned, and every way accomplish'd
LADY;
WHO
Was torn to Pieces by the CLERGY of *Alexandria*, to gratify the Pride, Emulation, and Cruelty of their ARCHBISHOP, commonly but undeservedly stiled
St. CYRIL.

Magnum aliquid instat, efferum, immane, impium.
SEN. MEDEA, Act. 3. Scen. 1. lin. 16.

LONDON:
Printed for M. COOPER, in *Pater-noster-Row*; W. REEVE, in *Fleet-street*; and C. SYMPSON, in *Chancery-lane*. 1753. [Price 6d.]

图 38 约翰•托兰德长标题的书

这最终导致了宗教改革、激烈的宗教战争以及后来的启蒙运动。

“文艺复兴三杰”之一的拉斐尔[15]的名画《雅典学院》就把古希腊、罗马甚至他那时代不同时期 50 多位哲学家、科学家、艺术家全都集中在一个空间，表达对人类智慧的笃信和赞美。画作《雅典学院》左下角站立着的白衣女子，一般认为是希帕蒂娅。传说当拉斐尔将草稿呈给教皇时，

> 教皇问道：“中间的这个女人是谁？”。
> “希帕蒂娅，雅典学院最著名的学生。”拉斐尔答道。
> 教皇命令：“抹掉她，她的知识和信仰相冲突。这样，作品就可以接受了。”

虽然拉斐尔当时答应了，但他后来还是设法将希帕蒂娅安排进了画中。

启蒙运动时期的许多作者将希帕蒂娅和布鲁诺、哥白尼以及伽利略等受宗教迫害的科学家相提并论，认为希帕蒂娅是科学对宗教的殉道者。1720 年，约翰•托兰德[16]写了一篇标题很长的檄文：

> “希帕蒂娅，史上最漂亮、最有品德、最有学识，各方面都完美的女教师；但亚历山大城的神职人员却为了满足他们骄傲残忍的主教——所谓的圣人——西里尔而将她撕碎”。

基督徒也迅速反击，编了一个题目也很长的小册子：

> “最无耻的亚历山大城学院情妇希帕蒂娅的历史：被民众谋杀、分解——为圣•西里尔以及亚历山大城神职人员的辩护”。

十八世纪法国资产阶级启蒙运动的旗手伏尔泰（Voltaire, 1694-1778；原名为 François-Marie Arouet, 伏尔泰为笔名）也在他的作品中两次提到希帕蒂娅，谴责西里尔对希帕蒂娅的迫害。例如伏尔泰在他的《哲学辞典》有一小节关于希帕蒂娅 [12]。他的这本书强调理性主义的哲学思想，突出地反对基督教，反对宗教狂热带来的愚昧

[15] 拉斐尔•桑蒂（Raffaello Santi），1483-1520，意大利杰出画家。

[16] John Toland, 1670-1722，英国哲学家，自然神论者。

图 39 油画：伏尔泰

图 40 查理斯•金斯利书信集中所附照片

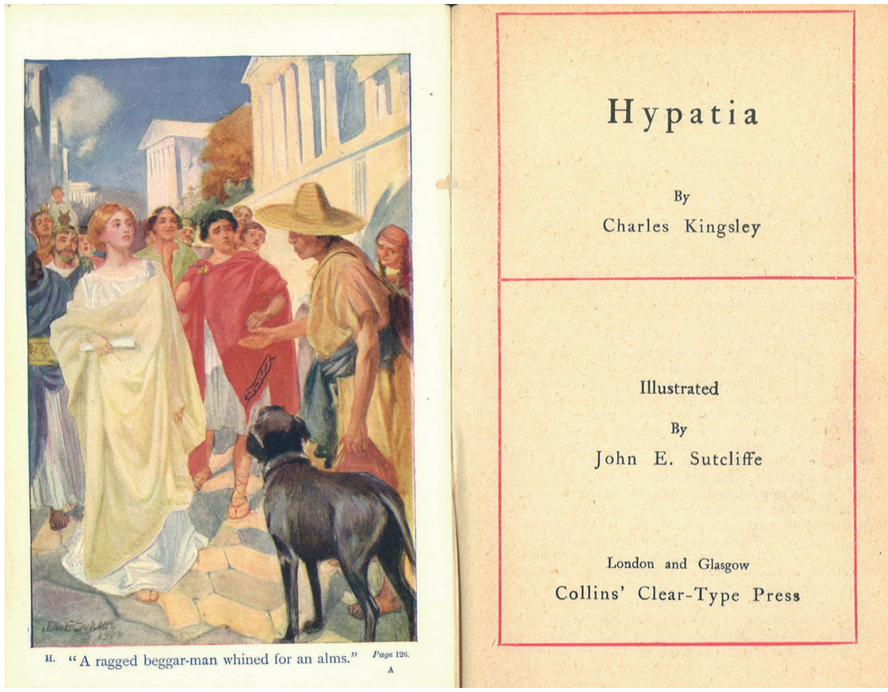


图 41 笔者所藏金斯利著《希帕蒂娅》的一个版本（约 1920 年）之内页

迷信与迫害无辜。

勒贡特•德•列尔（Charles Marie René Leconte de Lisle, 1818-1894）是法国诗人。列尔写过两个版本的关于希帕蒂娅的诗。在他的第二个版本的诗中他将希帕蒂娅之死归咎于基督徒的迫害，他写道：

> 卑鄙的基督徒打击、诅咒你，
> 但你反而更加坚强！但是，现在，唉！
> 有着柏拉图的智慧和阿佛洛狄忒[17]般的躯体的你，
> 却永远从希腊的天空中随风飘去！

以希帕蒂娅为主线讨论基督教问题的最有影响的还数英国作家金斯利[18]的历史小说《希帕蒂娅》[6]。金斯利关心社会问题，他早年的两部小说《酵母》和《阿尔顿•洛克》都是以当时社会问题为题材创作而成的。金斯利在 1842 年被授予神职，他是同时代的达尔文进化论的同情者；他还积极参与发起基督教社会主义改革运动。

受金斯利小说影响，英国画家查尔斯•威廉•米契尔（Charles William Mitchell, 1854-1903）于 1885 年创作了一幅流传颇广的作品。图中身为异教徒的希帕蒂娅裸死于基督徒的祭坛前。画面显示希帕蒂娅死时颇为年轻，这正是金斯利的小说的影响：小说中希帕蒂娅在 25 岁时就去世了！

哈伯德[19]书 [4] 中有希帕蒂娅的介绍、想象画；其中关于希帕蒂娅也是文学描述：她的身高、体重都想象出来了。哈伯德借希帕蒂娅之口写了许多“格言”，尤其是有许多批评迷信思想的：

> “生活就如旅途，行走越远，我们就能领略更多真理。理解我们外在、将

[17] Aphrodite，古希腊神话人物，爱与美的女神。

[18] 查理斯•金斯利，Charles Kingsley, 1819 - 1875，英国宗教思想家、小说家、儿童作家、历史学家。代表作有儿童读物《水孩子》(The Water-Babies)，《希腊英雄传》(Fairy Tales, or the Greek Heroes) 以及小说《喂！向西方！》(Westward Ho！) 等。后述小说还导致英国一小镇以此含感叹号“!”的书名为名)。

[19] 阿尔伯特•哈伯德 (Elbert Hubbard) , 1856 - 1915，美国作家，代表作有《致加西亚的信》等，著有系列名人传记。

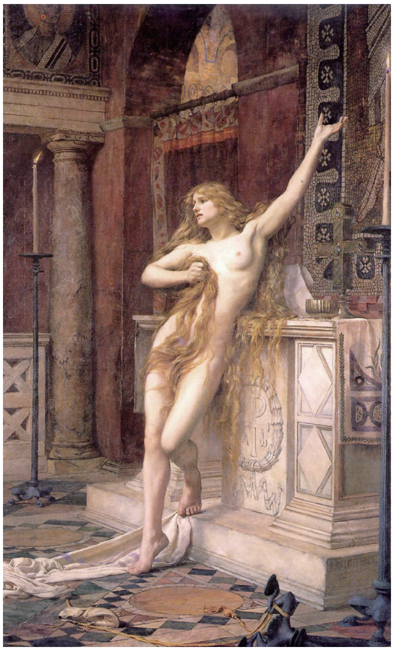


图 42 希帕蒂娅，米契尔的作品。该画现藏于英国纽卡斯尔的 Laing Art Gallery 美术馆

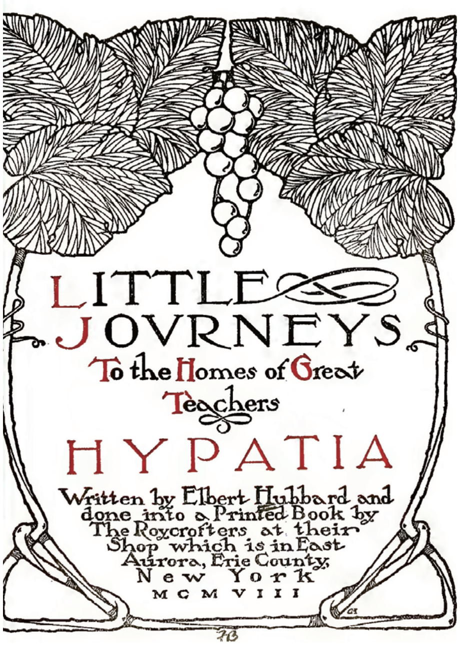


图 43 哈伯德作品《伟大教师——希帕蒂娅》封面

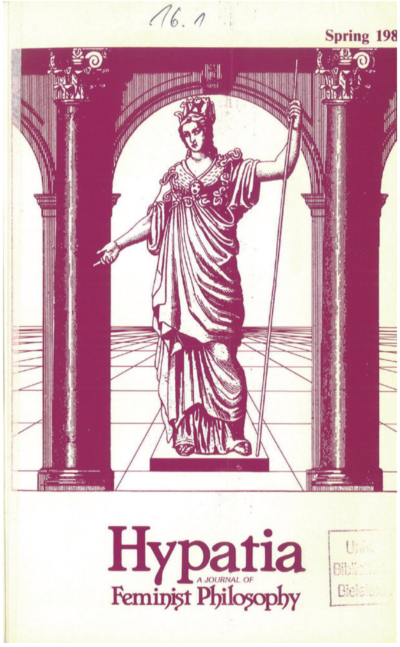


图 44 以希帕蒂娅名字命名的女性主义杂志发刊期封面

来世界的最好准备是理解我们目前的。”

“教学应该真实，寓言就是寓言，神话就是神话，奇迹就是浪漫的幻想。教授迷信是可怕的。”

哈伯德在作品也常常联系实际，针砭时弊。如他写道：

“希帕蒂娅犹如就活在昨天，她死于暴徒之手的事件也可能在波士顿重现：一个颇受敬重的团体曾用绳索套住一位好人的脖子在街上拖跑着，而这条街本是自由的神圣之地。”

诚如哈伯德所言，希帕蒂娅宛如就活在昨天，类似的故事在历史上不断重现；因此我们重读希帕蒂娅是不乏益处的。

女权运动中的希帕蒂娅 希帕蒂娅是现代女性（权）主义的热门题材。早在 1925 年，作家、社会革命家和女性主义者朵拉·罗素[20]的一本讨论女性话题的书《希帕蒂娅，或女人与知识》（Hypatia, or Woman and Knowledge）即以希帕蒂娅的名字命名，虽然文章内容和希帕蒂娅没有关系。在第二波女权运动中，希帕蒂娅更是热门主题。1986 年开始正式出版的一个女性主义哲学期刊《希帕蒂娅：女权主义哲学杂志》[21]也以她的名字命名。正如该刊所介绍，将该杂志以 Hypatia 的名字命名是因为“虽然我们中的大多数是我们所在学校的第一个女哲学家，但我们不是历史上的第一个”。

希帕蒂娅也出现在艺术作品中。1979 年女性主义艺术家 Judy Chicago 首次展出她创作的装置艺术《晚宴》（The Dinner Party）。该作品自 2007 年起成为美国纽约布鲁克林博物馆的永久藏品。这件作品为边长约 14.63 米的等边三角形大餐桌，每边有 13 个就餐席位，每个席位布置有桌巾和餐具，每一个桌巾上绣着一位女性人物的名字，

[20] 原名 Dora Black，1894-1986。为英国著名哲学家、数学家罗素的一任妻子。

[21] 英文名为 Hypatia: A Journal of Feminist Philosophy，该刊在 1988 开始由印第安纳大学出版社出版。

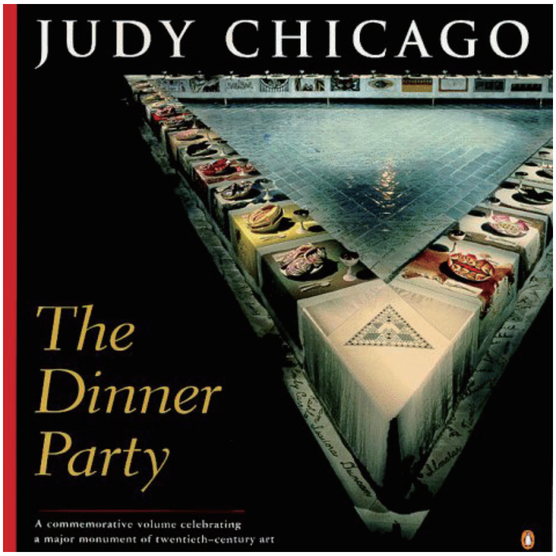
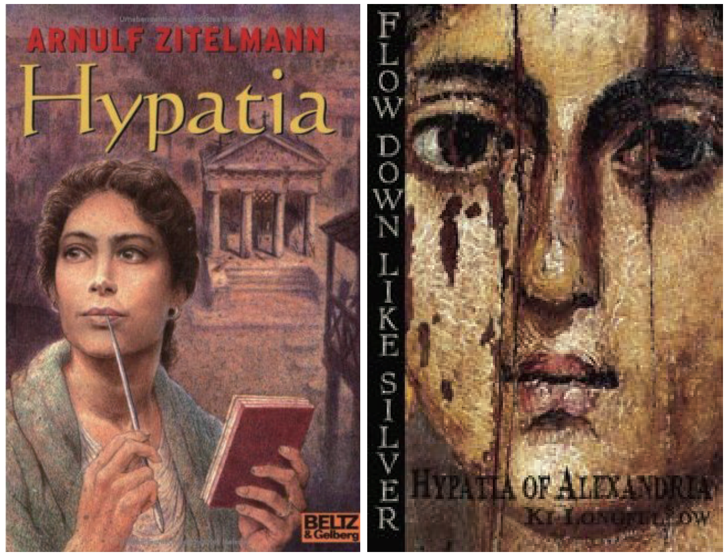


图 45 Judy Chicago 的介绍女性主义装置艺术《晚宴》一书的封面



(a) Zitelmann 的小说 (b) Ki Longfellow 的小说

图 46 以希帕蒂娅为主题的部分小说

以做纪念。此外，还有 999 名女性的名字写在铺于三角形餐桌中间的地毯上。39 人名单中只有希帕蒂娅是数学家，同样是女性主义学者热门题目的莎孚也在这 39 人中；在 999 人名单中有我们在前言中介绍过的数学家阿涅西、热尔曼和柯瓦列夫斯卡娅等。这件作品希望提醒人们女性也有过杰出的成就，不应该被历史遗忘。

小说中的希帕蒂娅 不为人所知的希帕蒂娅的生活细节，反而给文学家留下了无边的想象空间。仅仅当代就有许多新出版的外文小说，特别是畅销小说《达芬奇密码》的出版更是激起了人们对宗教之谜的兴趣。下面只列出几本：

- Anrulf Zitelmann 的小说 Hypatia（德语，1988）；
- Brian Trent 的 Remembering Hypatia: A Novel of Ancient Egypt（英语，2005）；
- Sandy Donovan 的 Hypatia: Mathematician, Inventor, and Philosopher（英语，2008）；
- Ki Longfellow 的 Flow Down Like Silver: Hypatia of Alexandria（英语，2009 年）。

值得一提的是这些作家多少大都写过宗教题材的作品。例如 Zitelmann 曾学过神学，并曾在德国中学教授宗教课程。他还撰写过宗教题材读物《世界宗教》(2002）和《基督徒的世界》(2004)。而 Ki Longfellow 在写 Hypatia 前写过畅销宗教题材小说《抹大拉的马利亚》(The Secret Magdalene)。

影视中的希帕蒂娅 希帕蒂娅也在一些影视中出现。在深受观众追捧的科普电视纪录片《宇宙》(Cosmos: A Personal Voyage）中，天文学家卡尔·萨根（Carl Sagan, 1934-1996）将亚历山大城图书馆的毁灭与希帕蒂娅之死相联。引起更多关注的是 2009 年以希帕蒂娅后期生活为主要内容，反映当时教派冲突历史的西班牙电影《城市广场》[22]。

该影片许多内容是有历史根据的。我们前面介绍的部分历史人物和事件在该影片中也有叙述。另如影片中有一批黑衣修道士。他们是基督教早期教会中照顾病人，埋葬死者，愿为基督教而死的赌命者（Parabalani）。他们常被当作主教的护卫军。在影

[22] 导演为亚历桑德罗·阿曼巴(Alejandro Amenábar)，此前著名的作品有《深海长眠》。英国女演员瑞切尔·薇兹（Rachel Weisz）饰希帕蒂娅。影片原名《Agora》，中译也译为《风暴佳人》。Agora 音译为“安哥拉”，原意为集市，常为城市中心露天广场。安哥拉也为居民发表言论的地方。

图 47 电影《城市广场》宣传海报

图 48 电影《城市广场》剧照：希帕蒂娅悟到地球沿着以太阳为一焦点的椭圆轨道运动

片中叙述他们去杀害希帕蒂娅之前，有他们掩埋死者的镜头。阿莫尼乌斯在影片中也被当作这些人中的焦点人物。

影片主要有两条交叉的主线。一是描述基督教与其它教派的冲突。影片再现了 391 年塞拉皮斯神殿的被毁、基督徒和犹太教徒之间的互相攻击、总督与主教之间最后大冲突袭击等历史事件。

另一条线索是描写希帕蒂娅的教学、研究，尤其是对天体运动的探索。影片中，当希帕蒂娅被基督徒们围困时，借一位老者之口，提到阿里斯塔克斯先于哥白尼做出过地球绕太阳转的猜测。正如埃拉托塞尼应用几何知识测量地球周长，影片最后合理猜测了熟谙天文学和圆锥曲线理论的希帕蒂娅领悟到地球不是宇宙的中心，也并没有在做完满的圆周运动，只是沿着以太阳为一焦点的椭圆轨道在旋转。这或许也在暗喻，天地万物缺憾常存，但地球上的几多纷扰，在浩淼的宇宙中又算得了什么呢？影片中，发现此规律的希帕蒂娅长久伫立时，一定相信人类理性终将胜利。

请让我们引用德国诗人歌德的话来结束本文：

永恒的女性，引领我们上升。

附录：本文提到的部分在《雅典学院》（见首页插图）中出现的人物

1. 毕达哥拉斯：图中左下持书蹲着教学的秃顶老人；
2. 苏格拉底：图左最后一排身穿绿袍转身向左，扳手指与人争辩者；
3. 柏拉图：图中央门口站立的两人中左边，白发光脚，左手抱《对话集》，右手指天（表示他崇尚“形式”主义）之老者；
4. 亚里士多德：图中央门口站立的两人中右边，着鞋棕发，左手持《伦理学》，右手前伸朝下（示意他的观点：知识来源于经验观察和实验）之中年人；
5. 亚历山大大帝：图中双手交叉于胸前的青年（最上一排左起 5 人）；
6. 欧几里德：图右弯腰用圆规绘图者为欧几里德，另说为阿基米德；
7. 普罗提诺：图中最后一排右起第四位红袍头朝左站立者；
8.（天文学家）托勒密：图右下手托地球仪，长袍背向站立者；
9. 希帕蒂娅：图左下角站立着的白衣女子。

参考资料

1. Michael A. B. Deakin, Hypatia of Alexandria, Mathematician and Martyr, Prometheus Books, Amherst, NY, 2007.

2. Maria Dzielska, Hypatia of Alexandria, Harvard University Press, 1995.

3. Edward Gibbon, The History of the Decline and Fall of the Roman Empire, Boston: Phillips, Sampson, and Company, Vol 4, 1854.(中译可参考席代岳译《罗马帝国衰亡史》，第 4 卷，第 373–374 页，吉林出版集团，2008。)

4. Elbert Hubbard, Little Journeys to the Homes of the Great: Great Teachers, 1916. http://www.gutenberg.org/dirs/1/8/9/3/18936/18936-h/18936-h.htm. (中译可参考 2010 年出版的《大人物：12 位伟大的教育家》，副标题《通往历史名人的小径》。)

5. John, Bishop of Nikiu, The Life of Hypatia, from his Chronicle 84.87-103, http://www. cosmopolis.com/alexandria/hypatia-bio-john.html.

6. Charles Kingsley, Hypatia or New Foes With an Old Face, London, Macmillan and Co. and NewYork, 1889, http://www.gutenberg.org/files/6308/6308-h/6308-h.htm.

7. 莫里斯•克莱因,《古今数学思想》第一册，张理京、张锦炎、江泽涵译，上海科学技术出版社，2002。

8. W. R. Knorr, Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry, Chapter 11, Boston: Birkhäuser, 1989.

9. Socrates Scholasticus, Ecclesiastical History, Bk VI: Chap. 15: The Murder of Hypatia (late 4th Cent.) from "Of Hypatia the Female Philosopher" http://www.fordham.edu/halsall/source/hypatia.html.

10. Suda On Line: Byzantine Lexicography, http://www.stoa.org/sol.

11. Synesius of Cyrene, 书信集 http://www.livius.org/su-sz/synesius/synesius_letters. html.

12. V. Voltaire, The Works of Voltaire, Vol. V (Philosophical Dictionary Part 3) , 1764. http://oll.libertyfund.org/index.php?option=com_staticxt&staticfile=show. php%3Ftitle=354&Itemid=99999999.

13. Mary Ellen Waithe, Hypatia of Alexandria, in A History of Women Philosophers: Volume I: Ancient Women Philosophers, 600 B.C.-500 A.D., Ed. by Mary Ellen Waithe, Kluwer Academic Pub- lishers, 1987.

14. 颜一清,《海巴夏》，台湾《数学传播》第十六卷第四期，1992 http://w3.math. sinica.edu.tw/math_media/d164/16414.pdf.

附注：

1. 文末参考资料主要列出了部分直接资料；有兴趣的读者可参考 [1,2] 中的文献。
2. 本文参考了维基百科相关条目；特别，本文所用图片除电影照片以及部分笔者所作图片，其余为维基百科共享图片。
3. 作者感谢徐佩、邓明立教授和付晓青博士的指正以及庄歌老师的耐心排版。
4. 2012 年 2 月本文修订期间笔者女儿诞生，是为念。

德国比勒费尔德和知阁
2011 年 7 月

素数的那些事儿

陆俊

1 引子

近几年开设《初等数论》课程，我总是要抽出一定的时间专门给学生科普一下关于素数的故事。这篇科普文章正是基于这些讲稿整理出来的。

素数是整个数论的灵魂。然而多数学生对素数的了解非常少。很多人不明白：为什么我们要研究素数？素数如何与众不同？素数到底有趣在哪里？素数对数学很重要吗？……如果学生在上完一个学期的数论课后，却仍然对素数茫然无知，那无疑是一种讽刺——这就好比你看完一场戏，不知道主角做了些什么。

写这篇文章的另一目的也是为了给那些依然执着于证明哥德巴赫猜想的民科们做一次扫盲的尝试——尽管他们中的大多数会继续执着下去。然而我们不得不承认这样一个现实：民科们对素数的热情与执着确实远远超过很多数学系的本科生——这多少会让我们这些老师感到沮丧。

2 素数有多少?

我们说一个整数 a 能被另一个整数 b 整除，就是指 $\frac{a}{b}$ 是整数。有时我们也把 b 称作 a 的因子。

一个素数（Prime Number）是指这样一种正整数：除了 1 和它本身之外，其它任何正整数都不可能整除它。我们也可以这么定义素数：它不能写成两个大于 1 的正整数的乘积。有时我们也将素数称作质数。通常我们不承认 1 是素数。这样做的好处下面会介绍。除了 1 和素数之外，其他的正整数统称为合数。

最初的几个素数是 2, 3, 5, 7, 11,…。显然 6 不是素数，因为 $6 = 2\times3$，所有的素数中只有 2 是偶数！这件看似平凡的事，其实很重要。在许多数学研究中，2 和其他素数会对我们所考虑的问题产生不同的影响。你可能会问：为什么我们把这样的数命名为“素数”呢？这实际上来自于素数最基本的结论——**算术基本定理**：

> 任何大于 1 的正整数 n 都可以唯一地分解成一些素数的乘积 $n = p_1\cdots p_s$，这里 $p_1\le p_2\le\cdots\le p_s$ 都是素数（允许相同）。

无论如何，素数本身不能再进一步分解成一些更小的正整数乘积，因此它在此意义下是最基本或最本质的数——类似于朴素的原子论——从而命名它们为“素数”或者“质数”。容易看到，假如我们承认 1 是素数，那么算术基本定理就不能保证分解是唯一的了。因为 1 可以写为任意多个自身的乘积。

接下去，一个最自然不过的问题当然是：究竟有多少素数？无限多个还是仅有有限个？这个问题的答案早由欧几里德在两千多年前解决了。他用初等方法巧妙地证明：存在无限多个素数！具体言之，我们假设所有正整数中只有有限个素数 $p_1,\cdots,p_n$，那么可以构造一个正整数

$$N = p_1p_2\cdots p_n + 1\ .$$

很容易发现，左边的 N 分解成素数乘积的话，不可能包含任何素数 p_i，因此它的分解式中必定含有这些 p_i 之外的新素数。这就和我们的假设矛盾！

这个证明包含了富有启发性的思想。事实上，证明本身并没有提供构造出所有素数的具体方法。但是它却能告诉我们素数有无限个！这就是数学中所谓的“存在性证明”：它告诉你某些对象存在，但是却没有具体构造出来。“存在性”是数学哲学中的一个深刻话题，涉及到数学大厦的根基。数学史上曾经关于这类问题有过广泛而激烈的争论，有人反对这种类型的证明，有人却支持它们。这场争论涉及了许多重要的数学家，产生了许多和数学、逻辑、哲学相关的理论。有兴趣的读者可以参考相关书籍，此处不再赘述。

类似欧几里德的证明，你也可以轻松断言：所有被 4 除余数为 3 的素数有无限个！换言之，就是等差数列 3, 7, 15,

19, …中包含无穷多个素数。这就产生了一个有趣的问题：一个等差数列 $a, a+b, a+2b, \cdots, a+nb, \cdots$ 中是否包含无限多个素数？

数学家狄利克雷回答了这一问题（**狄利克雷定理**）：

假如 a 和 b 是互素的（就是说它们不能同时被一个大于 1 的正整数整除），那么答案是肯定的！

不要以为欧几里德的方法可以轻松解决这一问题哦。事实上，除了少数情形之外，这个问题是不可能用它来简单解决的。

如果我们把等差数列换成其他数列，结论会怎样呢？比如考虑以下的数列：

$$2, 5, 10, 17, 26, \cdots, n^2+1, \cdots$$

其中是否有无限多个素数呢？让人颇为失望的是，这至今仍是一个未解决的难题。

3 素数是怎么分布的？

知道“素数有无限多个”仅仅是个开始。我们还想知道更多！比如，素数在所有自然数中所占的比率多大？当然，我们首先要说明“比率”在这里意味着什么。对任何正实数 x，我们用 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数的个数。比如 $\pi(1)=0$, $\pi(4)=2$, $\pi(2.5)=1$ 等等。我们用 $\frac{\pi(x)}{x}$ 来反映所有不超过 x 的正整数中，素数所占的比率——也称作平均分布密度。

一个简单的结论告诉我们：当 x 非常非常大时，$\frac{\pi(x)}{x}$ 几乎就等于 0。换句话说，素数在所有正整数中极为罕见，可以说少得几乎没有——尽管我们知道它们有无穷多个！这就好比宇宙中有生命的星球也许有无限多个，但是它们相隔得太远，相对整个宇宙来说实在是十分稀疏罕见的。

对一般人来说，这个结论似乎已经让我们走到了问题的尽头。但是天才数学家高斯却不这么认为。在那个没有计算机的年代（1792-1793 年间），他通过大量的手工计算，单凭超人的直觉，竟然得到了一个让人吃惊的猜测（但其本人并未证明）：

当 x 非常大时，素数出现的比率 $\frac{\pi(x)}{x}$ 约等于 $\frac{1}{\log x}$ 。换言之，$\frac{\pi(x)}{x/\log x}$ 约等于 1，这里 $\log x$ 是 x 的对数函数。

高斯原始的猜测要比上面的表述式更为精确。在高斯之后，数学家勒让德实际上也通过数值计算得到过类似的猜测公式（1800 年左右），但没有高斯的精确。证明这一结论是极其困难的工作。直到 19 世纪中叶，俄国数学家切比雪夫才有了突破性进展，他证明了：

$$C_1 \le \frac{\pi(x)}{x/\log x} \le C_2 \text{ ,}$$

这里 C_1 和 C_2 是确定的常数。此猜想大约到 19 世纪末，才由法国数学家阿达玛和 Paussin 几乎同时独立证明。人们将它称作**素数定理**。阿达玛等人的证明是建立在天才数学家黎曼的研究基础上的，用到了极为高深的函数理论。到了 1949 年前后，才由数学家爱尔特希和塞尔伯格给出了初等证明。请注意，这里所谓的“初等”只是说没有用到太多高深的数学理论，但是证明本身是很复杂的，也较为难懂。数学中有很多这样的问题（比如哥德巴赫猜想），它们表面上很简单，但实际上要证明它们往往是极其困难的。

素数定理只是在大样本范围内描述了一种统计规律。素数本身的分布位置极不规则。当你确定一个素数之后，很难预测在它之后的下一个素数是多少。尽管如此，我们仍有一些猜测和结论来描绘素数在整数集中分布性态。有趣的是，猜想要比结论多得多。

首先是著名的**伯特兰猜想**（后被切比雪夫证明），它断言：

对任何大于 1 的正整数 n，必定有素数落在 n 和 $2n$ 之间。

比如 n 取 4，那么在 4 到 8 之间我们可以找到素数 5 和 7。当 n 非常大时，这一结论显然是素数定理的直接推论。

你可以随手举出很多类似伯特兰 - 切比雪夫定理的猜想，比如在 n^2 和 $(n+1)^2$ 之间是否必有素数存在？这一看似简单的问题实际上至今仍未解决！

其次是著名的**孪生素数猜想**：

是否存在无限多个素数 p，使得 $p+2$ 也是素数？

我们将这样的一对素数 $(p, p+2)$ 称为孪生素数对。比如 (3, 5), (5, 7), (11, 13) 等等都是孪生素数对。类似地，你也可以定义三生素数对 $(p, p+2, p+6)$，亦即要求这三个数同时为素数。三生素数猜想就是问：是否存在无限个三生素数对？回答仍是“不知道”。我们也可以定义 n 生素数对，并提出类似的猜测。有趣的是，有人证明：n 生素数猜想和以下的三角不等式猜测互为矛盾——也就是说不可能同时正确：

$$\pi(x+y) \le \pi(x)+\pi(y) \text{ ,}$$

这里 $\pi(x)$ 定义同前。

另一个著名的猜想就是在国内广为人知的**哥德巴赫猜想**：

任何大于等于 6 的偶数必定能写成两个奇素数之和；任何大于等于 9 的奇数都是三个奇素数之和。

这个猜想和陈景润的名字联系在一起，带有很多现代历史的色彩。许多民科投身于哥德巴赫猜想的证明也与此有关。哥德巴赫只是一个普通的数学家，除了提出这个猜想之

外没有什么数学贡献。他将这一猜测告诉了天才数学家欧拉。遗憾的是，后者未能证明它，但是该猜想却得以被很多人知道。容易看到，哥德巴赫猜想第二部分只不过是第一部分的简单推论。但有趣的是，第二部分反而先被证明了（称作**三素数定理**），第一部分却迟迟得不到解决。目前最好的结果是陈景润的“1+2”定理，即充分大的偶数都可以写成一个素数和一个不超过两个素数乘积的数之和。哥德巴赫猜想的研究是十分艰难的，它本质上涉及到十分深刻的函数论知识，不可能如那些民科所妄想的那样，拍拍脑袋就能用初等方法做出来。

虽然我们无法彻底证实这个猜想，但是却可以退而求其次，用所谓的*密率方法*得到以下的有趣结论：

> 任何大于1的正整数必可写成不超过26个素数之和。

4 如何构造素数？

上面的讨论只是介绍了素数在整数中的分布情况，但是我们至今还没有具体构造出这些素数来。一个基本的问题就是：如何构造素数？最原始的办法就是古典筛法。比如我们要找出所有不超过 100 的素数，那么首先将所有从 $4=2^2$ 开始的偶数全部从这 100 个数中去除掉；接着将所有从 $9=3^2$ 开始的 3 的倍数全部去除掉；再将所有从 $25=5^2$ 开始的 5 的倍数全部去除掉……以此类推，最终通过筛选剩下的数恰好就是所有不超过 100 的素数。

上面的筛法虽然可以逐一列出不超过某个上限 N 的全部素数，但是当 N 很大时，其工作量也是巨大的。因此人们开始寻找其他方法来构造素数。通常的思路是构造一个有规律的数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得数列中每一项都是素数。这样的数列称作素数公式。比如费马构造了以下数列（费马数），并

数学家群星图；排在最上面的是数论结果及高斯和欧拉等数论先驱

美国一家网络安全基金会悬赏超长素数；1 千万位素数的十万美元被加州大学的 Edson Smith 领走。他找到了第 46 个梅森数（见上图）

猜测它们都是素数：

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

他计算了前五项，即 3, 5, 17, 257, 65537，确实都是素数。然而欧拉以其高超的计算能力手算验证了 $F_5 = 641 \times 6700417$ 不是素数。事实上，由目前的计算机验算可知，从 F_5 到 F_{11} 都不是素数。是否存在无限多个费马素数？这是一个未解之谜。

尽管欧拉的计算粉碎了利用费马数构造素数公式的企图，但是这并不表示研究费马数没有意义。高斯在年少时期，证明了一个让人无比惊叹的奇妙结论，让费马素数声名大噪。这个结论（**正 m 边形尺规作图**）是说：

> 一个正 m 边形能用尺规作图得到的充分必要条件是：$m=2^e p_1 p_2 \cdots p_s$，这里诸 p_i 是费马素数，且两两不同。

比如 $m = 17$ 是费马素数，因此可以用尺规作图得到正十七边形！要知道，在高斯之前的几百年，有那么多人研究尺规作图问题，但谁也没有想到正十七边形居然可以尺规作图得到。这个结论的重要性在于，它将几何（代数）问题和数论问题这两个看似无关的领域奇妙地结合起来。

与费马数对应的是著名的梅森数列：

$$M_p = 2^p - 1, \qquad p = 2,3,5\cdots$$

这里 p 依次取遍所有的素数。人们也曾猜测梅森数都是素数。比如前几项分别为 3, 7, 31, 127 都是素数。但是 $M_{11} = 23 \times 89$ 不是素数。一个有趣的结论断言：

> 如果素数 p 被 4 除余数为 3，并且 $2p + 1$ 也是素数，那么 M_p 必定不是素数。

梅森数的遭遇与费马数类似，尽管没有能够达到原始的构造素数公式的目的，但是它却和另一个著名的定理联系起来。为了叙述该定理，我们做些准备工作。给一个正整数 n，我们把它的所有可能的因子（就是能整除 n 的那些正整数）加起来得到的总和记作 $\sigma(n)$。如果 n 满足 $\sigma(n) = 2n$，那么我们就称 n 是完全数。比如 $n = 6$ 就是完全数，因为 n 的因子只有 1, 2, 3, 6, 加起来正好是 12。同样地，$n = 28$ 也是完全数。我们有如下的**偶完全数定理**：

> 所有的偶完全数都可以写成 $\frac{1}{2}p(p+1)$，这里 p 是梅森素数。反之，这样的表达式得到的数也必定是偶完全数。

上面说的 $n = 6$ 恰好写成 $\frac{1}{2}3(3+1)$，其中 3 是梅森素数；28 可以写为 $\frac{1}{2}7(7+1)$，其中 7 是梅森素数。

由此产生另一个有趣的问题：奇完全数存在吗？这又是数论中一个至今悬而未决的著名猜想。人们借助计算机检验了 10^{300} 以内所有数，竟然都没能找到奇完全数！另外一个同样让人沮丧的事实是，至今我们还不知道是否有无穷多个梅森素数。

欧拉提出了另一类构造素数的方式。比如考虑多项式 $n^2 - n + 41$。当 n 从 0 取到 40 时，多项式的值皆素数。我们同样可以考虑多项式

$$n^2 - n + p\ ,$$

这里 p 是素数，使得当 n 从 0 开始直至某个数 N 为止逐一代入时，上述多项式取值始终为素数。对任意 N，我们是否总能找到这样的 p 满足上面的要求呢？这个有趣的问题也是未解决的难题之一。让我们在上述多项式中分别取 $n = 1, 2, 3$, 那么得到的三个值恰好为 $p, p + 2, p + 6$。如果上面的问题答案是肯定的话，这就立刻证实了前文所述的孪生素数猜想和三生素数猜想！因此很显然上面的问题要远远难于孪生或三生素数猜想。

有趣的是，假如我们要求上述 $N = p-1$ 的话，那么这个历史上著名的难题有一个极为漂亮的解答（**Rabinovtch 定理**）：

> 设 $m \geq 2$，二次多项式 $f_m(x) = x^2 - x + m$ 当 $x = 0, 1, \cdots m-1$ 时总取素数值的充分必要条件是 m 为以下正整数之一：2, 3, 5, 11, 17, 41.

（注记：上面的 m 的六种取值是有深刻背景的，它们恰好对应所有类数为 1 的虚二次域。）

看了这样几个例子之后，你也许会问：是否真有素数公式呢？有是有的，但这类公式通常意义不大。我们这里举一个例子来说明。为此需要一些准备。对任何实数 x，我们用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。比如 $[1.2] = 1$, $[0] = 0$, $[-1.2] = -2$。这个记号是高斯引进的，称作 x 的取整函数或高斯函数。此外我们用 $n!$ 表示乘积 $1\times2\times3\cdots n$，它称作 n 的阶乘。

现在我们可以构造素数公式

$$a_n = n + (n-2)\times\left(\left[\frac{(n-1)!+1}{n}\right] + \left[-\frac{(n-1)!+1}{n}\right]\right).$$

对任何大于 1 的正整数 n，项 a_n 都是素数，比如最前面的几项分别为 2, 3, 2, 5, 2, 7, $\cdots$ 这个素数公式表面上看似乎很神奇，其实并没有太多的新东西。它只是利用了和素数有关的**威尔逊定理**：

> 一个大于 1 的正整数 n 是素数的充分必要条件为：$\frac{(n-1)!+1}{n}$ 是整数。

比如 $n = 5$ 是素数，$4!+1 = 25$ 显然是 5 的倍数。另一方面，对任何非整数的实数 x，总有 $[x]+[-x] = -1$；而对整数 x，则有 $[x]+[-x] = 0$。现在我们能够看到，a_n 实际上在 n 是素数时就等于 n，在其他情况下都取值 2。

5 素数和方程

素数的很多有趣的性质都是从方程开始的。在经典数论（即研究整数性质的理论）中，人们关心的一个问题就是某些多项式方程是不是有整数解。比如著名的勾股方程 $x^2+y^2 = z^2$ 或者佩尔方程 $x^2 - dy^2 = 1$ 等。

当我们只关心这类方程的整数解（或有理数解等等）时，这样的方程通常就称为不定方程或者丢番图方程。我们这里介绍一些和素数有关的方程。它们中的一些对数学的发展起到了很大的作用。以下设 p 是素数。

(1) 我们考虑不定方程

$$x(x-1)\cdots(x-(p-1)) = py.$$

对任一整数 n，假设它被 p 除的余数是 r。那么 $n-r$ 显然被 p 整除。因此对任何整数 n，p 总是能整除连乘积 $n(n-1)\cdots(n-(p-1))$。这样，当我们把 $x = n$ 代入上述方程的左边，则可求出整数解 y。利用这个简单的不定方程和下面的费马小定理，人们可以得到前面提及的威尔逊定理。

(2) **费马小定理**断言：不定方程

$$x^p - x = py,$$

对任何整数 $x = n$，都有整数解 y 存在。换句话说，对任何整数 n，素数 p 总是能整除 $n^p - n$。费马小定理的“小”字是相对费马大定理（也称费马最后的定理或者费马猜想）而言的，他声称方程

$$X^n + Y^n = Z^n, \qquad n > 2,$$

没有非零的整数解 (X, Y, Z)。但费马只证明了 $n = 4$ 的情形。其余情形经过许许多多数学家的艰苦努力，终于在 1994 年前后由英国数学家怀尔斯彻底解决。如果我们将素数 p 换成一般的整数 m，那么费马小定理可以推广到一般情形——即欧拉定理。我们这里不打算讨论它。

(3) 假设 n 是一个整数，并且不为 p 整除。我们来求解不定方程

$$nx - py = 1$$

的整数解 (x, y)。由费马小定理，我们取 $x = n^{p-2}$，即可求得整数 y。从几何的角度看，上面的方程在平面上描绘了一条直线。因此我们相当于要找出该直线上的整数点 (x, y)。

(4)（**平方剩余**）求解以下方程的整数解是初等数论的核心问题之一：

$$x^2 - py = q.$$

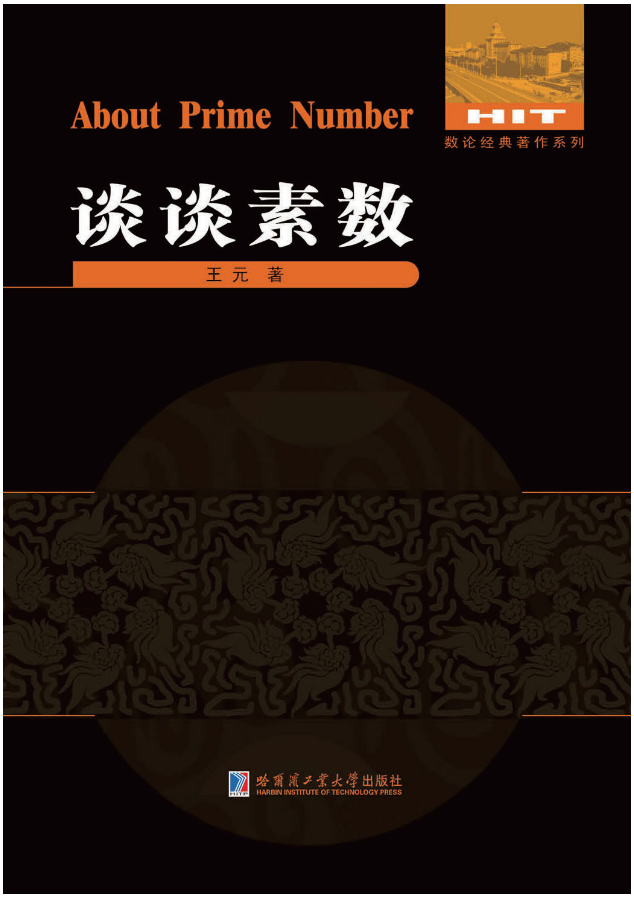
这里 q 是给定的正整数。高斯在其名著《算术研究》中对此作了深入研究，给出了一系列漂亮的研究成果。与前面几个方程不同的是，该方程有可能无整数解，比如

$$x^2 - 3y = 2.$$

如果 $x^2 - py = q$ 有解，我们就说 q 在模 p 下是平方剩余的——这里不打算解释该术语的意思。为了表示该方程是否有解，勒让德引进了一个方便的符号

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{若有解，} \\ -1, & \text{若无解。} \end{cases}$$

若 $p = 2$ 的话，方程当然有解，因此我们只关心 p 是奇素数的情形。此时高斯用巧妙的初等方法（但并不显而易见）首



王元院士 2011 年的科普新作《谈谈素数》

先得到以下结果

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

这就是说，如果 p 被 8 除余数为 1 或 7，那么方程 $x^2-py=2$ 必定有解；否则就无解。类似地还有

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

当 q 也是奇素数时，高斯发现了数论史上具有里程碑意义的重要结果，即著名的**二次互反律**：

$$\left(\frac{q}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

高斯将此定理比喻为“数论之酵母”，意思是说这个深刻定理对数论的研究极其重要。近代数学的研究也验证了这一观点。事实上这一定理经过许多数学家——比如希尔伯特、高木贞治等——的努力，推广到代数数论研究中，发展成了深刻的理论——类域论。二次互反律也可以这样解释：

当 p, q 中有一个被 4 除余数是 1 时，以下两个方程

$$x^2-py=q,\qquad z^2-qw=p$$

要么同时有解要么同时无解；当 p, q 被 4 除余数都是 3 时，那么其中一个方程有解而另一方程无解。

对一般的整数 q，由算术基本定理，我们可以将它写成素因子乘积 $q=\pm p_1\cdots p_s$，从而可以通过以下关系求出勒让德符号的值以判断方程是否有解：

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{\pm 1}{p}\right)\left(\frac{p_1}{p}\right)\cdots\left(\frac{p_s}{p}\right).$$

从几何角度看，平方剩余问题对应的方程就是平面上的一条抛物线。因此我们等价于寻找抛物线上的整数点 (x, y)。

(5) **两平方和问题**：一个素数 p 什么时候可以写成两个平方数之和？比如

$$5=1^2+2^2,\quad 13=2^2+3^2,\quad 17=1^2+4^2,\cdots$$

容易检验，7 不可能写成两平方数之和。这个问题等价于求不定方程

$$x^2+y^2=p$$

的整数解。从几何上看，相当于寻找一个圆周上的整数点。费马早在 1640 年前后就得到了以下的结论，但是并未正式发表；欧拉最早给出了其正式证明。

> 如果 p 被 4 除余数是 3，那么上述方程无解，即不能分解为两个平方数之和；如果 p 被 4 除余数是 1，则上述方程有唯一解，即 p 能唯一表示成两个平方数之和。

这个结论的第一部分可以从平方剩余问题 (4) 简单地得到。事实上，由方程 (3)，我们可以找到一个整数 z，使得 $yz-1$ 能被 p 整除。由于

$$pz^2=(xz)^2+(yz)^2=(xz)^2+(yz-1+1)^2$$
$$=(xz)^2+1+(yz-1)^2+2(yz-1),$$

故得

$$(xz)^2-p\left(z^2-2\left(\frac{yz-1}{p}\right)-p\left(\frac{yz-1}{p}\right)^2\right)=-1.$$

因此上面方程有解也就意味着

$$1=\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

这就相当于 p 被 4 除余数为 1。

无论如何，要具体求出 p 的平方数之和的精确表达式并非易事。这就需要用到更加高深的工具了。

上面这些不定方程的研究为古典数论提供了许多重要的原动力，发展出了很多重要的数学工具。如何求解一般的不定方程实际上是个很困难的问题。希尔伯特在他著名的23 个数学问题中也作了探讨。近代的一种重要思想是：先退而求其次，求方程的有理数解。对每个素数 p，将方程放到 p-adic 数域情形去求解（p-adic 数是和素数 p 有关的一类很特殊的“数”）。我们将相应的 p-adic 解综合起来，根据这些解的信息，试图构造出真正的有理数解。这一思想曾被成功地应用到二次不定方程上。它可以归结成著名的 **Hasse-Minkowski 定理**：

> 假设 $f(x, y)$ 是二次多项式（比如 x^2+y^2-1 等等），方程 $f=0$ 有有理数解的充分必要条件是：它有实数解，并且对每个素数 p，它也有 p-adic 解。

本节最后，我们再介绍一个与素数和方程有关的重要猜想—— ***abc* 猜想**：

> 任意给定正实数 $\varepsilon>0$，则最多只有有限个三元组 (a, b, c)，满足以下条件：
> (1) a, b, c 皆整数，并且两两之间互素，
> (2) $a+b=c$，
> (3) $c>d^{1+\varepsilon}$，此处 d 是乘积 abc 中所有互不相同的素因子的乘积。

如果 abc 猜想正确，那么立刻可以推出费马猜想对充分大的方幂 n 都成立。这还不止，其实有许许多多重要的猜想和定理竟然都能从 abc 猜想推出来，而后者本身看上去却如此简单！

6 素数和代数

素数在整数中具有如此特殊的地位，它除了包含许多有趣深刻的性质之外，也留下诸多未解之谜。人们自然会想到将素数的概念推广到更一般的数域上来研究，比如实数域、复数域等等。高斯首先研究了这样一些复数（称为高斯整数）：

$$a+b\sqrt{-1}\ ,$$

这里 a, b 都取整数。所有这些复数构成的集合记为 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$。我们可以像在整数情形一样定义高斯整数的加减乘运算，甚至我们还可以定义两个高斯整数的带余数除法等。完全类似地，我们自然也可以定义 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ 中的“素数”概念。

整数集合里的素数在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ 中不一定是素数哦。比如当 p 被 4 除余数为 1 时，根据上一节的结论，它可以写成两平方数之和

$$p=a^2+b^2.$$

因此 p 在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ 中可以写为两个高斯整数的乘积

$$p=(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})\ .$$

高斯的一项有趣的工作，就是找出了 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ 中的所有素数 P：

> (1) $P=1+\sqrt{-1}$；
> (2) $P=a+b\sqrt{-1}$，使得 $p=a^2+b^2$ 是整数集合里被 4 除余数为 1 的素数；
> (3) P 就是整数集合里被 4 除余数为 3 的素数。

在整数中我们不把 ± 1 这样的数作为素数；同样地，在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ 中我们也不考虑以下诸如 ± 1, $\pm\sqrt{-1}$ 这样的数——单位数。如果两个高斯整数只相差一个单位数，它们的数论性质一般没什么差别，所以我们有时只挑选其中的一个代表来讨论。接着，我们同样可以得到高斯整数的算术基本定理等等一系列的数论性质。

高斯对于 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ 的研究可以说是代数数论的重要起源之一。为什么高斯要研究高斯整数呢？原来高斯一开始在研究四次剩余问题（即不定方程 $x^4-py=q$ 求解）时，没有能够找到类似二次互反律那样的有效算法来判断方程是否有解。他在研究中逐渐意识到，这一问题不能只局限于整数范围内考虑，而应该扩展到 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ 上研究其算术性质，用高观点来探讨这一问题。这是一种富有启发性的数学思想，当人们把视野扩大后，很多问题的答案也许就会变得清晰起来。事实正是如此，很快高斯就在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ 中找到了四次互反律。不过他并未给出证明，而是由雅可比和艾森斯坦后来分别独立给出了证明。

进一步，如果我们考虑除法，整数集合 $\mathbb{Z}$ 可以扩张到有理数域 $\mathbb{Q}$ 上。因此类似地，高斯整数集合也可以扩张到高斯有理数域 $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ 上，里面的数无非是两个高斯整数的比值而已。很自然地，我们也可以考虑更一般的数域——二次域：

$$\mathbb{Q}[\sqrt{m}]=\left\{a+b\sqrt{m}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Q}\right\},$$

这里 m 是任意整数，并且我们可以假设 m 不含平方因子。$m=-1$ 就是高斯有理数域。$\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ 中的“整数”是什么样的呢？答案与我们想象的稍微不同：

情形一：如果 m 被 4 除余数是 2 或者 3，那么二次域中的“整数”（称作代数整数）都可以写为，

$$a+b\sqrt{m}\ ,$$

这里 a, b 是整数。

情形二：如果 m 被 4 除余数是 1，那么二次域中的“整数”可以写为

$$a+b\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right),$$

这里 a, b 是整数。

同样地，人们可以考虑这样的“整数”什么时候能称作“素数”等等基本问题，这里我们不再详细展开。那么著名的算术基本定理在这时是否一定成立呢？答案是否定的！这里我们举一个简单的例子。在 $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ 中，21 竟然有两种完全不同的素因子分解：

$$21=3\times7=(1+2\sqrt{-5})(1-2\sqrt{-5}).$$

在历史上，人们一开始并未意识到这一问题。最初，人们之所以引进这样的数域，是为了研究著名的费马猜想，就是证明不定方程

$$X^n+Y^n=Z^n$$

当 n 是大于 2 的正整数时没有非零整数解。比如我们可以在高斯整数的意义下证明 $n=4$ 的情形没有非零解，因此在通常整数意义下就更不可能有非零解了。类似地，高斯在数域 $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ 中也巧妙地证明了 $n=3$ 的情形也没有非零解——这一证法远比欧拉的证明更简洁且更具启发性。一般情形下，人们将有理数域扩展到由 n 次单位根生成的数域上（所谓单位根就是方程 $x^n=1$ 的根）。这样，费马方程的左边在该数域下就可以分解为一次因式的乘积。如果我们事先知道这样的数域中也有算术基本定理，那就很容易推出矛盾，从而证明费马猜想。

当这一想法第一次被正式提出时，遭到了很多数学家的质疑和反对。事实上，数学家库莫此前早已意识到这一问题，即复数情形下“素因子”分解不一定唯一！为了弥补这一缺陷，库莫引入了理想数的概念，证明理想数有类似于算术基本定理那样的唯一分解性质，从而成功证明费马猜想在 $n<100$ 时成立。

其实理想数并不是真正的数，而是一组数的集合。但有趣的是，我们也可以定义这种集合之间的乘法运算，并且定义出类似素数的东西——素理想，最终证明理想数唯一分解定理——算术基本定理的推广。理想数的引入可以说是极为关键的。它使数论的研究观点和方法产生了质的飞跃，促使了代数数论的发展。继库莫的工作之后，戴德金将理想数推广到了更一般情形，从而发展成了系统的理想理论。这一理论是交换代数等学科中的核心内容之一。它不但对数论发展极为重要，而且还深入到其他各个数学领域中，特别是对代数几何等等学科有着重要的影响。

素数和函数

上一节我们从一个侧面看到素数及算术基本定理对于数学的重要影响，它们的推广促进了代数数论等领域的发展。同样地，素数对于函数的研究也有极为深刻的影响。如前所述，除了算术基本定理，素数另一重要的基本结论就是“素数个数无限”。我们曾经介绍了欧几里德关于这一结论的存在性证明。实际上，欧拉还给了另一个巧妙的证明，这个证明极富启发性，常被人们视为解析数论之发端。下面我们用不太严格的方式来介绍一下。欧拉的证明利用了下面几个简单的事实

(1)：对任何介于 0 和 1 之间的实数 x，都有无限求和公式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots;$$

(2)：将下式左边展开并利用算术基本定理得到

$$\prod_p\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

左边的大写希腊字母在这里表示求乘积符号，就是把每个素数 p 对应的项 $(1+\frac{1}{p}+\cdots)$ 都相乘起来。

(3)：结合上面两个式子，则有

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots.$$

如果素数只有有限个，那么上式左边是个有限的数。但无论如何，上式右边的值是无穷大（数学上叫做发散），这就推出矛盾！因此素数个数必定无限。

从上面的讨论，我们可以定义一个重要的函数——黎曼 ζ 函数

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots.$$

稍微推广一下前面的恒等式，就得到有趣的恒等式

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\zeta(s).$$

黎曼 ζ 函数是数学中极其重要的函数。黎曼首先研究了这种函数的诸多深刻性质，并且第一次发现了黎曼 ζ 函数居然和素数之间存在着极为深刻的内在联系！按照上述方式定义的黎曼 ζ 函数的定义域还比较小。通过一定的数学技巧，我们可以把它的定义域扩大到除了 $s=1$ 以外的整个复平面上（即对所有不等于 1 的复数 s 都有定义）。人们感兴趣方程 $\zeta(s)=0$ 的根——通常称作零点。黎曼 ζ 函数有许许多多零点，其中一部分很容易求出来，我们把它们叫做平凡零点。剩下那部分非平凡零点落在哪里呢？黎曼做出了一个重要的猜测：

> $\zeta(s)$ 的非平凡零点一定可以写成形如 $s=\frac{1}{2}+b\sqrt{-1}$ 的复数（b 是实数）。换言之，所有的非平凡零点都落在直线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ 上，这里 Re 表示取复数的实部。

这个猜想被称为**黎曼猜想**，它被列为千禧年七大数学猜想之一，也被希尔伯特收入到 23 个著名数学问题中。这是个极其困难的问题，它远比费马猜想艰深得多。我们注意到，《数学文化》刊登的卢昌海博士的系列文章对黎曼猜想作了非常生动的介绍。

为什么黎曼猜想如此重要呢？黎曼以其深刻的洞察力，发现素数的许多性质和黎曼函数的解析性质密切相关。黎曼函数也可以稍稍变化，改成更一般的狄利克雷级数

$$D(s)=f(1)+\frac{f(2)}{2^s}+\frac{f(3)}{3^s}+\cdots+\frac{f(n)}{n^s}+\cdots.$$

此外还有许多更复杂的函数。研究表明，许许多多重要的数论猜想或定理本质上都和研究这类函数的零点位置有关。比如前面说的素数定理等等。因此从这样的深刻背景来看，我们有理由预见，那些表面上看似简单的未解决之难题，即使有证明也必定是极其艰深的，绝不可能用简单的初等方法获得。

黎曼的这一杰出工作，可以说是开了解析数论之先河，给数论研究提供了强有力的研究工具和技巧。尽管我们至今无法证实黎曼猜想，但是可以退而求其次，想办法证明所有这些零点落在一条狭窄的区域里面——这个区域当然要包含整条直线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$。我们要做的是将这个区域不断地缩小。如果最终能压缩成直线 $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$，那就等于证明了黎曼猜想。一个十分有趣的现象是：区域缩得越小，那么就能得到越多的关于素数的深刻定理。

另一种迂回的方式，则是企图在函数域情形探讨黎曼猜想的一个模拟。事实上，Weil 在有限域代数曲线上建立了这样的类似猜想——Weil 猜想。Weil 本人于 1948 年证明了该情形的猜想。对有限域上高维代数簇情形，Weil 也提出了类似猜想。数学家 Deligne 利用代数几何等理论工具于 1973 年证明了它。尽管这一猜想离原始的黎曼猜想还相差很远，但这一杰出的工作已经影响深远，极大地推动了数学各领域的发展，特别是代数几何理论。

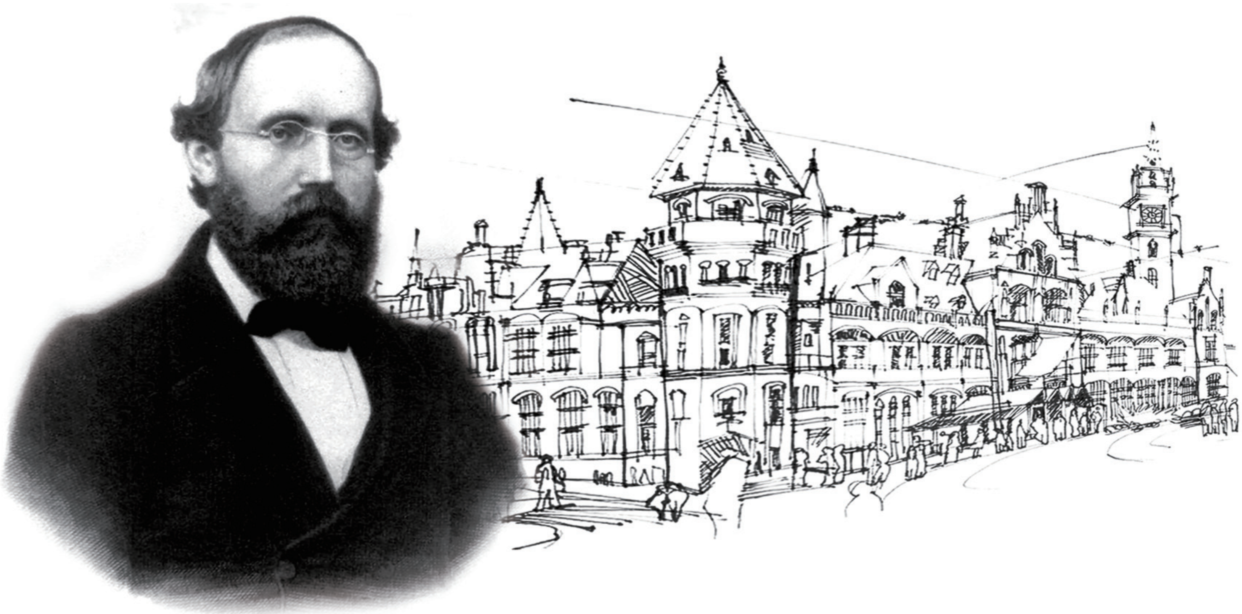
8 一些题外话

我最早是通过汤涛教授的新浪微博了解《数学文化》的，并立刻被深深吸引住了，成为其忠实粉丝。在这里，我要感谢《数学文化》各位老师给我这次难得的锻炼机会，也要感谢他们在科普传播方面的辛勤劳作，让我们能够看到数学有如此生动有趣的一面。

作者介绍：

陆俊，华东师范大学数学系讲师，代数几何方向，师从谈胜利及陈志杰教授。

Riemann



黎曼猜想漫谈(六)

卢昌海

32 从模算术到有限域

“山寨版”黎曼猜想这枚坚果该从哪里啃起呢？为了彰显将科普进行到底的决心，让我们从小学算术啃起吧！

这并不是搞笑，在它背后其实有一段小小的故事——一段与美苏冷战有关的故事。那是在半个多世纪前的 1957 年。那一年，苏联先于美国将一颗人造卫星送入了近地轨道，迈出了航天时代的第一步。这一在太平年代可以令全人类共同自豪的成就，由于发生在冷战时期，带给美国的乃是巨大的震动和反思。作为反思的结果，美国初等教育界兴起了一场以革新教材为主旨的所谓“新数学”运动（New Math），试图“从娃娃抓起”，加强教育、奋起直追。在这场运动中，许多原本晚得多才讲述的内容被加入到了小学和初中教材中，其中包括公理化集合论（axiomatic set theory）、模算术（modular arithmetic）、抽象代数（abstract algebra）、符号逻辑（symbolic logic）等[注 32.1]。这种“拔苗助长”般的革新不仅远远超出了普通中小学生的接受能力，甚至也超出了一部分中小学教师的教学能力，因此只尝试了几年就被放弃了。不过对我们来说，这场“小跃进”式的“新数学”运动却是一

注 32.1

与本系列的上下文不无巧合的是，这些新内容的选择在一定程度上受到了韦伊参与创立的布尔巴基学派的影响。

Riemann

个很好的幌子，让我们能够宣称从小学算术开始本节的科普，因为我们将要介绍的“山寨版”黎曼猜想，可以从“新数学”当中的一种——模算术——说起。

模算术的一个典型的题目是：现在时钟的时针指向 7，请问 8 小时之后时针指向几？这个题目与“7+8=?”那样的传统小学算术题的差别，就在于时钟上的数字是以 12 为周期循环的，从而不存在大于 12 的数字。这种带有“周期”的算术题就是典型的模算术题目，它通常被表述为“7+8=? (mod 12)”，其中的“(mod 12)”表示以 12 为周期，而这周期的正式名称叫做“模”（modulus），模算术之名因此而来 [注 32.2]。

模算术是数论中一种很有用的工具，数学大腕欧拉、拉格朗日、勒让德等人都使用过，但对它的系统研究则要归功于高斯。1801 年，这位被后世尊为“数学王子”，且当时正值“王子”年龄（24 岁）的年轻数学家在其名著《算术研究》（Disquisitiones Arithmeticae）中系统性地运用了模算术，证明了许多重要命题，并为后世奠定了该领域的若干标准术语。由于讲述模算术的最通俗例子就是上面所举的有关时钟的题目，因此模算术也称为“时钟算术”（clock arithmetic），而为了纪念高斯对这一领域的贡献，那时钟则被一些科普作家称为高斯时钟（Gauss clock）。

高斯时钟所包含的刻度数目不一定非得像普通时钟那样为 12，而完全可以是其它数目。事实上，对于我们的真正兴趣而言，刻度数目为 12 的高斯时钟是一个很糟糕的特例，因为在它上面虽然可以进行加减法和乘法，但作为乘法逆运算的除法却并不总能够进行的（请读者自行证实这一点）。在数学上，一个集合的元素之间如果加、减、乘、除全都可以进行，而且无论怎么折腾，都像孙悟空翻不出如来佛掌心一样，仍在那集合之中，那样的集合有一个专门的名称，叫做域（field）[注 32.3]。域的概念在数学上有很大的重要性，并且也是我们真正感兴趣的东西，因为我们熟悉的有理数、实数、以及表述黎曼猜想时用到过的复数的集合全都是域，即将介绍的“山寨版”黎曼猜想也离不开域。而所含刻度数目为 12 的高斯时钟由于无法保证除法的进行，便无法用来表示域，从而是一个很糟糕的例子。

对于域，我们可以粗略地分为两类：一类是像有理数、实数和复数的集合那样所含元素数目为无限的，另一类则是所含元素数目有限的。这两类域各有一个很直白的名字，前者叫作无限域（infinite field），后者叫做有限域（finite field）。我们真正感兴趣的东西粗略地讲是域，确切地说其实是有限域，因为它在某些方面比无限域来得简单，是构筑“山寨版”东西的好材料。

虽然所含刻度数目为 12 的高斯时钟——如前所述——无法用来表示域，但某些高斯时钟确实可以用来表示域——当然，这里的域是指有限域。比如，有限域的一个最简单的例子就是只含 0 和 1 两个刻度的高斯时钟（请读者自行列出这个有限域中的加、减、乘、除结果），这个有限域通常记为 F_2——下标 2 表示元素的数目（等同于高斯时钟的刻度数目）。

很简单吧？不愧是小学算术，但我们的科普很快就要提速了。

既然含有两个元素的有限域记为 F_2，那么大家一定可以猜到，含有 p 个元素的有限域的记号就是 F_p。完全正确！不过，细心的读者也许会提出一个问题：那就是 p 这个字母在我们这个系列中通常是表示素数的，这里为何不用一个更普通的字母，比如 n 呢？答案是：这是存心的。我们刚才提到过，某些高斯时钟可以用来表示有限域，到底是哪些高斯时钟呢？正是那些所含刻度数目为素数的高斯时钟。这一点的普遍证明并不困难，感兴趣的读者可

注 32.2

需要说明的是，普通时钟与以 12 为模的模算术略有差异：前者包含的数字是从 1 到 12，后者则是从 0 到 11。这两者是等价的，因为 12=0 (mod 12)，但后者对数学研究来说更方便，因为否则的话，就必须接受一个不方便的事实，那就是 12 这个看起来非零的数字具有 0 的算术性质。

注 32.3

在加、减、乘、除这四种运算中，加和乘是基本运算，减和除作为加和乘的逆运算，可以由每个元素相对于加和乘必须存在逆元素（唯一的例外是 0 相对于乘不存在逆元素）这一要求引申出来。此外，我们在小学算术中就已熟悉的交换律、结合律和分配律也是域的定义的一部分，感兴趣的读者请参阅域的完整定义。

以从前面所说的刻度数目为 12 的高斯时钟不能表示有限域的原因入手，来琢磨一下普遍证明的思路。

能够用高斯时钟来表示，对于有限域来说无疑是一个很利于科普的特点，但却不是必不可少的条件。事实上，不能用高斯时钟来表示（即元素数目不是素数）的有限域也是存在的。而更微妙的是，有限域的元素数目虽然可以不是素数，却也不是完全任意的。那么，究竟什么样的元素数目才是可能的呢？答案是：它必须为素数的正整数次幂。换句话说，如果我们用 F_q 表示有限域，那么 q 只能是 $q=p^n$（$n=1, 2, 3, \ldots$）[注 32.4]。现在我们可以对所含刻度数目为 12 的高斯时钟做出更完整的评价：它确实是一个很糟糕的例子，因为 12 不仅不是素数，连素数的正整数次幂都不是，因此根本就不存在元素数目为 12 的有限域，更遑论用那样的高斯时钟来表示。

好了，从模算术开始，我们引出了有限域这个概念，并宣称这是我们在本节中真正感兴趣的东西。那么，对于有限域，究竟有什么东西值得我们研究呢？答案是：方程。事实上，域的概念的引进，本身就与研究方程有着密切关系，因为减法与除法这两种运算的引进，在很大程度上就是为了研究诸如 $a+?=0$ 和 $a\times?=1$ 那样的方程。研究方程是数学中最古老的探索之一，像方程是否有解？有多少个解（即解的数目）？如何求解？那样的课题，从古至今都有一些数学家在研究。

而对这些课题的研究，往往与在什么域中研究有着很大关系。比如说，曾经难住数学家们长达 358 年（这个记录连黎曼猜想也未必能打得破）才被解决掉的费马猜想（如今已荣升为费马大定理）如果放到实数域中，根本就不是问题。既然对方程的研究与在什么域中研究有着很大关系，那么有限域上的方程自然也就成为了研究课题之一。这其中很受数学家们钟爱的一类方程叫做代数方程（algebraic equation），也叫多项式方程（polynomial equation），它只包含变量的整数次幂（费马大定理所涉及的方程就是一种代数方程）。我们接下来要讨论的就是有限域上的代数方程。

作为有限域上代数方程的最简单例子之一，我们考虑有限域 F_q 上的二元代数方程 $F(x, y)=0$，其中 $F(x, y)$ 是一个所有系数及变量 x、y 都在 F_q 中取值的多项式（“所有系数及变量 x、y 都在 F_q 中取值”是该方程作为“有限域 F_q 上”的方程所须满足的定义性条件）。我们知道，像 $F(x, y)=0$ 这样的二元方程在实平面上的解（即 x、y 都为实数的解）的集合通常是曲线，借用这种术语，数学家们把二元代数方程 $F(x, y)=0$ 的解的集合称为代数曲线（algebraic curve）[注 32.5]，如果该二元代数方程是有限域上的方程，则相应的解的集合称为有限域上的代数曲线。当然，这种所谓的“曲线”实际上只是有限多个点的集合，因为它所在的整个“平面”$F_q\times F_q$ 总共也只有 q^2 个点。

另一方面，一个代数方程 $F(x, y)=0$ 如果是有限域 F_q 上的方程，当然也是以 F_q 为子域（subfield）、但比 F_q 更大的有限域上的方程，从而可以表示那些更大的有限域上的代数曲线。那些更大的有限域称为 F_q 的扩张域（extension field）。可以证明，F_q 的扩张域是那些所含元素个数为 q 的正整数次幂的有限域，即 F_{q^m}（$m=1, 2, 3, \ldots$）。因此，有限域 F_q 上的代数方程 $F(x, y)=0$ 可以被视为是所有有限域 F_{q^m}（$m=1, 2, 3, \ldots$）上的代数方程。

以上这些貌似与黎曼猜想风马牛不相及的东西，就是“山寨版”黎曼猜想赖以存身的那座“山”。

注 32.4

细心的读者可能还会提出这样一个问题：我们用 F_q 来表示元素数目为 q 的有限域，但如果那样的有限域有不止一个怎么办？用什么办法来区分它们呢？答案是，元素数目为 q 的有限域彼此是同构（isomorphic）的，即彼此的元素及运算关系全都是一一对应的。对于数学研究来说，这样的有限域可以视为等同，从而无需区分。另外补充一点：不仅有限域的元素数目必须为素数的正整数次幂，而且对于任何一个素数的正整数次幂 p^n，都必定存在一个元素数目恰好为 p^n 的有限域。

注 32.5

效仿普通解析几何的做法，由 $F(x, y)=0$ 的解的集合所定义的代数曲线本身也可以用 $F(x, y)=0$ 来表示，称为代数曲线 $F(x, y)=0$。另外要提醒读者的是，代数曲线不仅可以用像 $F(x, y)=0$ 那样的代数方程来表示，也可以用方程组来表示，就好比普通空间中的曲线：比如一个圆既可以用一个方程 $x^2+y^2=1$ 来表示，也可以用方程组 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $z=0$ 来表示。为行文简洁起见，我们在正文中一律以方程为例。

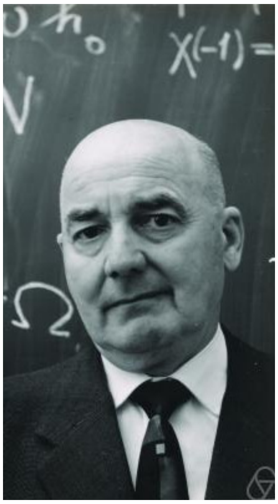
Riemann

33 “山寨版”Riemann 猜想

现在我们要往“山寨版”黎曼猜想靠拢了。由于黎曼猜想是关于黎曼ζ函数零点分布的猜想，因此很明显，要想有黎曼猜想，首先得有黎曼ζ函数。只不过，黎曼猜想如果是“山寨版”的，作为其“核心部件”的黎曼ζ函数当然也只需是“山寨版”即可。这“山寨版”的黎曼ζ函数从何而来呢？正是从有限域上的代数曲线中来。

为此，我们要引进有限域上代数曲线 $F(x, y)=0$ 的一个重要性质，那就是它所含点的数目。这个性质之所以重要，因为它实际上就是有限域上代数方程 $F(x, y)=0$ 的解的数目。如前所述，解的数目对于研究方程来说是一个重要课题，相应的，所含点的数目对于代数曲线来说也是一个重要性质。我们在前面说过，有限域 F_q 上的代数方程 $F(x, y)=0$ 可以被视为是所有有限域 F_{q^m}（m=1, 2, 3, ...）上的代数方程。用代数曲线的语言来说，这意味着有限域 F_q 上的代数曲线 $F(x, y)=0$ 可以被视为是所有有限域 F_{q^m}（m=1, 2, 3, ...）上的代数曲线。另一方面，代数曲线 $F(x, y)=0$ 所含点的数目，或代数方程 $F(x, y)=0$ 的解的数目，显然是与定义域 F_{q^m} 的选取有关的。为了体现这种关系，我们用 N_m 表示定义域为 F_{q^m} 时的这一数目。

埃米尔•阿廷
Emil Artin



海尔穆特•哈塞
Helmut Hasse

有了这些准备，现在我们可以定义“山寨版”的黎曼ζ函数了，那就是：

$$\varsigma_C(s)=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}N_m(C)\frac{q^{-ms}}{m}\right)$$

如此定义的“山寨版”黎曼ζ与“正版”黎曼ζ一样，是关于复变量 s 的函数，它有一个比较正式的名字，叫做有限域上代数曲线的ζ函数。在这一函数的定义中，我们特意引进了一个表示代数曲线的字母 C，因为此定义所给出的函数显然与代数曲线的选取有关。上述定义中还含有 q，这也是显而易见的，因为代数曲线 C 的原始定义域是 F_q。

有了“山寨版”的黎曼ζ函数，我们就可以表述有关其零点分布的“山寨版”黎曼猜想了。由于这个猜想是关于有限域上代数曲线的ζ函数零点分布的，因此我们称其为有限域上代数曲线的“山寨版”黎曼猜想。

> 有限域上代数曲线的“山寨版”黎曼猜想：有限域上代数曲线的ζ函数的所有零点都位于复平面上 Re(s)=1/2 的直线上。

由于“山寨版”黎曼ζ函数与代数曲线的选取有关，实际上有无穷多种。因此上述“山寨版”黎曼猜想实际上也是无穷多个猜想的统称。对于特定的代数曲线及原始定义域，该猜想可以通过对“山寨版”黎曼ζ函数的直接计算加以验证，有些甚至是相当容易的，但涵盖所有代数曲线及原始定义域的普遍证明却大为不易。

我们在 31 节中曾经提到，安德烈•韦伊（André Weil, 1906-1998）并不是“山寨版”黎曼猜想这一研究方向的开创者。事实上，早在 1923 年，奥地利数学家埃米尔•阿廷（Emil Artin, 1898-1962）就提出了有限域上一类被称为超椭圆曲线（hyperelliptic curve）的特殊代数曲线上的ζ函数，以及相应的“山寨版”黎曼猜想。1933 年，德国数学家海尔穆特•哈塞（Helmut Hasse, 1898-1979）则证明了有限域上一类被称为椭圆曲线（elliptic curve）的特殊代数曲线上的“山寨版”黎曼猜想（请注意，阿廷只是提出猜想，哈塞则是证明猜想，不过两人所针对的是不同情形下的猜想——前者针对超椭圆曲线，后者针对椭圆

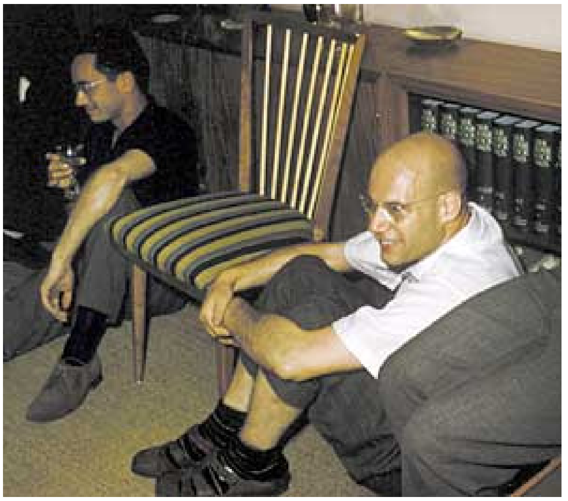
Riemann

曲线）[注 33.1]。

阿廷的猜想及哈塞的证明虽都有一定的广泛性（都涵盖了无穷多的个例），但针对的仍只是特定类型的代数曲线。韦伊的贡献则在于给出了上述“山寨版”黎曼猜想的普遍证明（即针对任意代数曲线）。不过，在 31 节提到的他给埃利 • 嘉当（Élie Cartan, 1869-1951）的信件中，他给出的只是证明的大致思路，完整的证明直到二战结束后的 1948 年才发表。韦伊对“山寨版”黎曼猜想的贡献还不止于此。完成了对上述猜想的证明后的第二年，即 1949 年，韦伊对该猜想进行了一次重要推广。这个推广的证明是如此困难，不仅他自己未能给出，在接下来二十四年的时间里，参与研究的所有其他数学家也都未能给出完全的证明。他的这一推广因此而被称为了韦伊猜想（Weil conjectures）。

韦伊猜想包含了若干个命题，“山寨版”黎曼猜想是其中之一，并且从历史上讲是证明最为不易的一个。不过，韦伊猜想中的“山寨版”黎曼猜想的证明虽然困难，其由来却是对上述“山寨版”黎曼猜想的很直接的推广，即将上述猜想中的代数曲线推广为高维几何对象。这种高维几何对象有一个专门的名称，叫做代数簇（algebraic variety），它也是用代数方程（或方程组）来定义的，并且也可以定义在有限域上。与有限域上代数曲线的 ζ 函数完全类似，也可以引进有限域上代数簇的 ζ 函数。对于这种 ζ 函数，也存在“山寨版”的黎曼猜想，我们称其为有限域上代数簇的“山寨版”黎曼猜想，它是韦伊对有限域上代数曲线的“山寨版”黎曼猜想的推广，也是韦伊猜想的一部分。

有读者可能会问：将曲线推广为高维几何对象这样直截了当的推广，那是中学生都能想到的事情，为何要等到 1949 年才问世？答案是：有限域上代数簇的“山寨版”黎曼猜想与普通（即有限域上代数曲线的）的“山寨版”黎曼猜想以及“正版”黎曼猜想有一个绝非显而易见的差异，那就是它所要求的零点分布并非是单一直线，而是与代数簇的维数有关的一系列直线。具体地说，韦伊猜想中的“山寨版”黎曼猜想是这样的：



菲尔兹奖 1954 年得主塞尔（左）与 1966 年得主格罗滕迪克摄于 1958 年。

> 有限域上代数簇的“山寨版”黎曼猜想：有限域上的 d 维代数簇的 ζ 函数的所有零点都位于复平面上 $\mathrm{Re}(s)=1/2, 3/2, \ldots, (2d-1)/2$ 的直线上。

如前所述，这一“山寨版”黎曼猜想只是韦伊猜想的一部分，而非全部。韦伊猜想还包括了关于有限域上代数簇的 ζ 函数的另外几个命题。虽然与普通（即有限域上代数曲线的）“山寨版”黎曼猜想及“正版”的黎曼猜想都有所不同，这个推广了的“山寨版”黎曼猜想与后两者的相似性还是很显著的，不算有负“山寨版”的“光荣称号”。此外，在 d=1 的特殊情况下，该猜想可以自动给出有限域上代数曲线的“山寨版”黎曼猜想，这也印证了它作为“山寨版”黎曼猜想的地位。

韦伊猜想提出后引起了很多数学家的兴趣，在试图证明这一猜想的数学家中，包括了阿廷的学生 Bernard Dwork（1923-1998）、阿廷的儿子迈克尔 • 阿廷（Michael Artin, 1934-）、1954 年菲尔兹奖得主塞尔（Jean-Pierre Serre, 1926-）、1966 年菲尔兹奖得主格罗滕迪克（Alexander Grothendieck, 1928-）等人。经过这些数学家的努力，韦伊猜想的某些部分在二十世纪

注 33.1

超椭圆曲线是指形如 $y^2=f(x)$ 的代数方程所表示的代数曲线，其中 $f(x)$ 为满足特定条件的四次以上多项式。椭圆曲线是指形如 $y^2=f(x)$ 的代数方程所表示的代数曲线，其中 $f(x)$ 为满足特定条件的三次多项式。

六十年代得到了证明，但有限域上代数簇的“山寨版”黎曼猜想部分，则直到 1974 年才由格罗滕迪克的学生、比利时数学家皮埃尔 • 德利涅（Pierre Deligne, 1944-）所证明，他的证明借助了格罗滕迪克的工作。四年之后，德利涅因这一工作获得了 1978 年的菲尔兹奖。在证明包括“山寨版”黎曼猜想在内的韦伊猜想的过程中，数学家们发展出了一些很有用的东西，比如格罗滕迪克创立了一种全新的数学工具：平展上同调（Étale cohomology），对数学——尤其是代数几何——的发展起到了促进作用。从这个意义上讲，“山寨版”黎曼猜想与其它一些重要的数学猜想一样，是一只“会下金蛋的鹅”（这是希尔伯特对费马猜想的评价）。这也是它的证明虽迄今不曾为人们提供证明“正版”黎曼猜想的有效思路[注 33.2]，却依然被视为重要成就的主要原因。当然，“山寨版”黎曼猜想的证明，多多少少使一些人对“正版”黎曼猜想的成立抱有了更大的信心。

在结束本节前，还有一件事情需要交代一下。细心（或挑剔？）的读者也许还会提出这样一个问题：我们说了半天的“山寨版”黎曼猜想，作为基础的那个所谓“山寨版”的黎曼 ζ 函数跟“正版”的黎曼 ζ 函数并不像啊？难道就凭它的零点也都在直线上，就将它称为“山寨版”的黎曼 ζ 函数，既而将有关其零点分布的猜想称为“山寨版”的黎曼猜想吗？如果那样的话，炮制“山寨版”黎曼猜想可就忒容易了，因为构造一个所有零点都在直线上——甚至在 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线上——的函数其实是很容易的事情（请读者自行构造几个那样的函数），难道那样一来它们就都可以跟黎曼猜想攀上亲？

这些问题的答案是：这里引进的“山寨版”黎曼 ζ 函数及黎曼猜想与“正版”黎曼 ζ 函数及黎曼猜想的相似性，绝不仅仅是因为它们的零点都分布在直线上，而有着更深层的理由。比方说，“山寨版”黎曼 ζ 函数跟“正版”黎曼 ζ 函数一样，可以写成类似于欧拉乘积公式那样的表达式，而且也满足类似于“正版”黎曼 ζ 函数所满足的函数方程。不仅如此，与“正版”黎曼猜想的成立可以给出对素数分布的最佳估计（即与素数定理之间的最小偏差——参阅第 5 节）相似，“山寨版”黎曼猜想的成立可以给出对有限域上代数簇所包含的点的数目（即定义代数簇的方程或方程组在有限域上的解的数目）的某种最佳估计。可惜的是，这些结果，以及“山寨版”黎曼猜想的证明，都不是省油的灯（比方说“山寨版”黎曼 ζ 函数所满足的函数方程——对有限域上的代数簇而言——其实是韦伊猜想的一部分）。考虑到它们毕竟只是关于“山寨版”的，而我们还想保留几枚牙齿去啃点别的东西，在这个方向上就不多逗留了。如果本节的介绍让读者大致知道了“山寨版”黎曼猜想是怎么一回事，比诸如“它是黎曼猜想在代数簇上的类似物”之类口诀式的介绍强一点，我们的目的就算达到了。

聊完了“山寨版”的黎曼猜想，接下来，我们要走向另一个极端，去领略几款“豪华版”的黎曼猜想。

34 “豪华版” Riemann 猜想

本节我们来介绍“豪华版”的黎曼猜想。所谓“豪华版”，顾名思义，就是要比“普通版”更高一筹，后者有的前者都得有，而且还得有新东西。对于数学命题来说，这意味着得比原命题更强、更普遍，将原命题包含为自己的特例。那样的命题如果成立，原命题就自动成立，但反过来则不然（否则两者就等价了，对不住“豪华版”这一光荣称号）。

“豪华版”黎曼猜想与第 33 节介绍的“山寨版”黎曼猜想虽分属不同类别，有一点却是共同的，那就是都得从对黎曼 ζ 函数的变通入手，因为黎曼猜想所关注的无非就是黎曼 ζ 函数非平凡零点那些事儿，对它的各种变通，归根到底也就是对黎曼 ζ 函数的变通。只不过“山寨版”黎曼猜想中的黎曼 ζ 函数只需与普通黎曼 ζ 函数有抽象的对应即可，而“豪华版”黎曼猜想中的黎曼 ζ 函数却必须将后者包含为自己的特例，以保证猜想的“豪华”性。黎曼猜想的“豪华版”有不止一款，我们将着重介绍其

注 33.2

韦伊年轻时曾对“山寨版”黎曼猜想有可能为“正版”黎曼猜想提供借鉴或证明抱有乐观看法。他甚至设想，如果自己因此而证明黎曼猜想的话，将会有意推迟到 1959 年——黎曼猜想提出 100 周年时——才公布。不过，他的这种乐观到晚年时已不复存在，他曾对一位友人表示，自己希望能在有生之年看到黎曼猜想的解决，但这是不太可能的。

Riemann

狄利克雷
Johann Dirichlet

中有代表性的两款。

我们首先介绍一款较浅显的，叫做广义黎曼猜想（Generalized Riemann Hypothesis）。当然，这里所谓的“浅显”，绝不是指容易证明（挂有“黎曼猜想”这一招牌的东西哪会有容易证明的？），而是指相对来说比较容易介绍。这一“豪华版”黎曼猜想所采用的变通后的黎曼ζ函数叫做狄利克雷L-函数（Dirichlet L-function），它是一个级数的解析延拓，那个级数叫做狄利克雷L-级数（Dirichlet L-series），通常记为$L(s,\chi_k)$，其定义是（k、n为正整数）[注 34.1]：

$$L(s,\chi_k)=\sum\nolimits_n \chi_k(n)^{-s} \quad (\mathrm{Re}(s)>1)。$$

读者们想必还记得，普通黎曼ζ函数也是一个级数，即（n为正整数）

$$\zeta(s)=\sum\nolimits_n n^{-s} \quad (\mathrm{Re}(s)>1)$$

注 34.1

本定义中的χ看起来很像英文字母x(从计算机屏幕上看更是如此)，其实是希腊字母Chi。另外要提醒读者的是，有些文献将$L(s,\chi_k)$记为$L_k(s,\chi)$。

的解析延拓（不记得的读者请参阅第2节）。这个级数有一个不太常用的名称，叫做p-级数（p-series）。这个名称之所以不常用，是因为它一般只表示s为实数的情形，比上述黎曼ζ函数级数表达式的定义域小得多。不过为行文便利起见，我们在本节中将用它来称呼上述级数。

对比这两个级数，不需要很厉害的眼力就可以看出两者间的相似性，以及狄利克雷L-级数是p-级数的推广这一表观特点——因为后者无非就是前者中各项系数$\chi_k(n)$全都等于1的特例。不过，要想确认这一表观特点，必须得知道$\chi_k(n)$的定义，尤其是得知道$\chi_k(n)$是否真的能全都等于1，因为$\chi_k(n)$并不是任意的系数，而是一组被称为狄利克雷特征（Dirichlet character）的东西[注 34.2]，它们能否全都等于1不是可以随意假定，而必须是由定义决定的。那么，$\chi_k(n)$的定义是什么呢？是由以下三个条件共同构成的（k为正整数，m、n为整数）：

1、对一切n，$\chi_k(n)=\chi_k(n+k)$，
2、对一切m和n，$\chi_k(m)\chi_k(n)=\chi_k(mn)$，
3、对一切n，若k和n互素，则$\chi_k(n)\neq 0$，否则$\chi_k(n)=0$。

由上述定义不难证明（请读者自行完成），对一切n，$\chi_1(n)=1$。因此$\chi_k(n)$全都等于1的确是$\chi_k(n)$的一组可能的取值（即k=1的特殊情形）。这表明狄利克雷L-级数确实是p-级数的推广。当然，这也意味着作为相应级数解析延拓的狄利克雷L-函数是黎曼ζ函数的推广。

与p-级数在Re(s)>1的区域内可以写成连乘积表达式（即欧拉乘积公式）相类似，狄利克雷L-函数在Re(s)>1的区域内也可以写成连乘积表达式：

$$L(s,\chi_k)=\prod\nolimits_p\left[1-\chi_k(p)p^{-s}\right]^{-1},$$

注 34.2

更具体地说，$\chi_k(n)$是所谓模为k的狄利克雷特征(Dirichlet character to the modulus k)。另外，对于狄利克雷L-函数的某些方面(比如函数方程)的研究往往要求k为$\chi_k(n)$的最小模——即不存在k的因子$d<k$，使得对一切n，$\chi_k(n)=\chi_d(n)$。这样的狄利克雷特征也被称为primitive Dirichlet character。

Riemann

其中右边的连乘积针对所有的素数进行。与黎曼 ζ 函数及欧拉乘积公式包含了素数分布的信息（参阅 第 3 节）相类似，狄利克雷 L- 函数及上述连乘积表达式可以用来研究算术级数（arithmetic progression）中的素数分布 [注 34.3]。1837 年，德国数学家狄利克雷（Johann Dirichlet, 1805-1859）进行了那样的研究，得到了所谓的狄利克雷算术级数定理。这个定理的内容是：如果正整数 n 和 k 互素，则序列 $n, n+k, n+2k, \cdots$ 中存在无穷多个素数。狄利克雷对这一定理的证明方法类似于我们在 第三节 中介绍过的欧拉 (利用欧拉乘积公式) 对素数有无穷多个这一命题的证明。

他那项研究在数论历史上有着重要地位，被视为是解析数论（analytic number theory）这一分支领域的开山之作。正是为了纪念狄利克雷的重大贡献，人们以他的名字命名了狄利克雷 L- 级数、狄利克雷 L- 函数、以及狄利克雷特征等术语。

可以证明，狄利克雷 L- 函数作为狄利克雷 L- 级数的解析延拓，与黎曼 ζ 函数一样，是复平面上的亚纯函数（其定义请参阅第 2 节）。狄利克雷 L- 函数与黎曼 ζ 函数的相似性是相当广泛的，比如它也满足类似于黎曼 ζ 函数所满足的那种函数方程。此外，狄利克雷 L- 函数的零点也有平凡与非平凡之分，非平凡零点也全都位于 $0<\mathrm{Re}(s)<1$ 的带状区域（即 critical strip）内。而所谓的广义黎曼猜想，则是宣称狄利克雷 L- 函数的所有非平凡零点也全都位于 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线（即临界线）上，即：

广义黎曼猜想：狄利克雷 L- 函数的所有非平凡零点都位于复平面上 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线上。

由于狄利克雷 L- 函数是黎曼 ζ 函数的推广，因此广义黎曼猜想显然是黎曼猜想的推广。在所有“豪华版”黎曼猜想中，广义黎曼猜想是被引述得最为广泛的，有大量数学命题的成立是以这一猜想的成立为前提的。不仅如此，与黎曼猜想的成立可以给出对素数分布的最佳估计相类似，广义黎曼猜想的成立可以给出对算术级数中的素数分布的最佳估计。

我们要介绍的第二款“豪华版”黎曼猜想叫做扩展黎曼猜想（Extended Riemann Hypothesis）[注 34.4]，它所采用的变通后的黎曼 ζ 函数则叫做戴德金 ζ 函数（Dedekind zeta function），是以德国数学家理查德 • 戴德金（Richard Dedekind, 1831-1916）的名字命名的。这一函数也是一个级数的解析延拓，只不过该级数的定义是需要多费一些口舌才能介绍清楚的。我们先把定义写下来：

$$\zeta_K(s)=\sum_I N(I)^{-s} \quad (\mathrm{Re}(s)>1)。$$

粗看起来，这个定义并不复杂，与普通黎曼 ζ 函数的 p- 级数表达式相比，只不过是在左侧的函数名称上添了一个下标 K，把右侧级数中的 n 换成 $N(I)$，再把对 n 的求和换成了对 I 的求和而已。不过，这种简单性纯粹是数学符号的简洁性带来的幌人耳目的表面现象。事实上，这里的每一处看似细小的差别，即 K、I 和 $N(I)$ 的背后都大有文章。我们先把它们的名称写下来，让大家感觉一下它们一个比一个递进的陌生性。它们的名称是什么呢？

- K 是数域；
- I 是数域 K 的整数环的非零理想；
- $N(I)$ 是数域 K 的整数环的非零理想 I 的绝对范数。

如果你不是很熟悉代数学的话，上面这些名称看了估计就跟没看一样——如果不是更犯晕的话。数学是一个高度抽象的领域，试图了解一个陌生数学分支中的概念，有时就像初学英语者拿着英 - 英词

注 34.3

这里所说的 arithmetic progression 是指形如 $n, n+k, n+2k, \cdots$ 的序列 (n、k 为正整数)。中文译名“算术级数”(也叫“等差级数”) 来自于《英汉数学词汇》(科学出版社，1987 年第二版)。不过这一译名在我看来并不恰当，因为“级数”一词对应于英文的 series，通常是指序列的和，与 arithmetic progression 所指的序列本身颇为不同。如果让我建议的话，arithmetic progression 宜译为“算术序列”或“等差序列”。

注 34.4

Extended Riemann Hypothesis 似乎尚无标准中译名，有时也被称为“广义黎曼猜想”。Extended Riemann Hypothesis 与 Generalized Riemann Hypothesis 之间的这种名称混淆不仅存在于中文中，也存在于英文中。在个别英文资料中这两者的名称与内容间的对应与本节介绍的恰好相反，此外也有人用 Generalized Riemann Hypothesis 来表示类似于本节末尾提到的 Grand Riemann Hypothesis 那样更“豪华”的黎曼猜想。但多数文献对这两个猜想的命名方式与本节介绍的相同。

Riemann

典（English-English Dictionary）查找单词一样，往往在查找到的解释之中又夹杂着新的陌生词汇，大有发生“链式反应”（chain reaction）之势。上面的努力就是一个例子，我们想知道什么是戴德金 ζ 函数，于是查找到它的级数表达式，但在级数的定义中却冒出了诸如“数域”（number field）、“整数环”（ring of integer）、“理想”（ideal）、“绝对范数”（absolute norm）之类的陌生名称。而为了解释这些陌生名称，天知道会不会遇到其它陌生名称。但既然我们已决定要介绍“豪华版”的黎曼猜想，就只好硬着头皮一个一个啃下去了。

先说说“数域”这个概念。这是一个相对简单的概念，对多数读者来说，可能是上述诸名称中唯一一个眼熟的概念，尤其是我们在第 32 节中还刚刚介绍过什么是“域”。但简单归简单，它却也没有简单到可以望文生义成“数字组成的域”（否则它跟“域”基本就是一回事了）。那么，究竟什么是数域呢？它是有理数域（field of rational numbers）的有限次代数扩张域（finite algebraic extension field）。果然，不解释还好，一解释“链式反应”就又来了：什么是有理数域的“代数扩张域”？什么又是“有限次”代数扩张域呢？所谓有理数域的代数扩张域，指的是那样一个域，其中所有元素都是系数为有理数的代数方程的解（忘了什么是“代数方程”的读者请温习第 32 节）。那样的元素（即数域中的数）被称为代数数（algebraic number），而数域本身则因此也被称为代数数域（algebraic number field）。数域的一个很简单的例子是所有形如 $a+b\sqrt{2}$（a, b 为有理数）的数构成的域（请读者自行证明这样的数构成一个域，并且每个这样的数都是一个系数为有理数的代数方程的解）。$a+b\sqrt{2}$ 这一形式让人联想起向量空间（vector space）中用一组基（basis）表示向量的做法——其中 1 和 $\sqrt{2}$ 扮演基的作用，a 和 b 则是任意向量在该组基下的分量。这种从向量空间角度看待代数扩张域的做法有一定的普适性，相应的向量空间的维数（对 $a+b\sqrt{2}$ 这一例子来说是 2）称为代数扩张域的度数（degree）。度数有限的代数扩张域就称为有限次代数扩张域。这样我们就解释了什么是有理数域的有限次代数扩张域，即数域了。

中文中常见的“实数域”、“复数域”那样的名称容易给人一个错觉，以为实数、复数的全体也构成数域。其实，它们的全体虽然构成域，却并不是数域，因为它们并不是有理数域的代数扩张域，更不是有限次代数扩张域。这方面英文的名称比较好，在英文中“实数域”、“复数域”分别是“field of real numbers”和“field of complex numbers”，突出了“field”（域）的概念，却不包含“number field”（数域）这一组合，从而不像中文那样容易望文生义。

接下来说说数域的“整数环”这一概念。要说整数环，首先得说说“整数”，因为这里所谓的整数并不仅仅是大家在小学课上学过的那些整数，而是所谓的代数整数（algebraic integer）。我们上面说过，数域中的元素都是代数数，即系数为有理数的代数方程的解。如果那代数方程的系数不仅为有理数，而且是整数，并且首系数（即幂次最高项的系数）为 1，那么它的解就是所谓的代数整数 [注 34.5]。粗看起来，这种数跟整数似乎没什么共同点，它们为什么被称为代数整数呢？原因有好几条：

- 首先，所有普通整数都是代数整数（请读者自行证明）。
- 其次，所有代数数都可以表示为代数整数的商，就如同所有有理数都可以表示为普通整数的商。
- 最后，代数整数与普通整数一样，对加法、减法和乘法封闭，但对除法不封闭（即两个代数整数的商未必仍是代数整数）。

可以证明，一个数域中的所有代数整数构成一种特殊的代数结构，叫做环（ring）。环这一概念是戴德金提出的（名称则是希尔伯特引进的），它是一种比域更简单的结构，相当于在域的定义中去除了乘法交换律，及每个非零元素存在乘法逆元素这两个要求。当然，这是指环的一般定义，对于整数环来说，由于其元素都是数域中的数，因此乘法交换律是

注 34.5

这里要说明的是：系数为有理数的代数方程实际上等价于系数为整数的代数方程（请读者自行证明），因此代数整数定义中的系数是整数并不是新要求，真正的新要求是在系数为整数的情况下要求首系数为 1。另外顺便说一下：首系数为 1 的代数方程有一个专门名称，叫做首一代数方程（monic algebraic equation）。

自动满足的。另外要提醒读者注意的是，有些文献在环的定义中还去除了乘法结合律，在这种定义下满足乘法结合律的环（即普通定义中的环）被称为结合环（associative ring）。由一个数域 K 中的所有代数整数构成的环就叫做该数域的整数环。作为一个例子，如果数域是有理数域，则可以证明代数整数正好就是普通整数（事实上，对任意数域，一个代数整数如果是有理数，它就必定是一个普通整数），而整数环则恰好就是全体整数的集合，即整数集。

说完了整数环，再说说整数环的“理想”。这“理想”当然绝不是中国大陆读者们从小耳熟能详的“无产阶级革命理想”之类的东西，而是一个不折不扣的数学概念。这个概念也是戴德金提出的，是环的一种子集，是对德国数学家恩斯特 • 库默尔（Ernst Kummer, 1810-1893）早些时候提出的一个叫做“理想数”（ideal number）的概念的推广（其名称也由此而来）。对于我们所讨论的情形来说，理想是整数环的一个子集，对加法、减法和乘法封闭，包含零元素，并且它的任意元素与整数环的任意元素的乘积仍在该子集内 [注 34.6]。从某种意义上讲，理想这个概念跟“0”这个概念有一定的相似性，因为 0 乘以任何数仍然是 0，与理想所满足的“它的任意元素与整数环的任意元素的乘积仍在该子集内”相似。事实上，以 0 为唯一元素的子集确实是任何环的理想，称为零理想（zero ideal），而理想这个概念与 0 之间的相似性，则可以用来对环中的元素进行约化，即通过把理想视为广义的 0，把通常建立在两个元素之差等于 0 基础上的元素相等概念中的 0 换成理想，而对环中的元素进行分类（大家很快就会看到一个例子）。一个环的理想是不唯一的（否则戴德金 ζ 函数的级数表达式中对理想 I 的求和就没什么意义了），比如对于整数集（即有理数域的整数环）这一特例来说，所有形如 $\{\cdots, -2n, -n, 0, n, 2n, \ldots\}$（$n$ 为非负整数）的集合都是理想（请读者们依据理想的定义予以验证），这种集合通常被记为 nZ（Z 是表示整数集的符号），整数集的所有理想都具有这种形式。

> **注 34.6**
>
> 对于一般情形，由于环上的乘法未必满足交换律，因此在理想的定义中需区分左乘积与右乘积，相应的理想也有左理想 (left ideal) 与右理想 (right ideal) 之分。

最后要介绍的是理想的“绝对范数”。我们刚才说过，从某种意义上讲，理想这个概念跟“0”这个概念有一定的相似性。这一点，连同整数集的理想是 nZ（n 为非负整数）这一结果，使我们联想起第 32 节中介绍过的模算术，因为一个以 n 为模的模算术的基本特点就是 n 具有 0 的算术性质——比如在以 12 为模的模算术（即刻度数目为 12 的高斯时钟这一特例）中，12 具有 0 的算术性质（参阅 [注 32.2]）。事实上，不仅 n，所有等于 n 整数倍的数，即形如 $\cdots, -2n, -n, 0, n, 2n, \ldots$ 的数（也就是理想 nZ 中的所有元素），在以 n 为模的模算术中都具有 0 的算术性质，而任意两个其差等于这种数（也就是属于理想 nZ）的数则被视为相等，这正是我们上面所说的用理想来对环中的元素进行约化的一个例子。一般地讲，用理想对一个环中的元素进行约化类似于模算术的推广，即将两个数的相等定义为其差属于该理想。那么什么是一个理想的绝对范数呢？它就是用该理想对环中的元素进行约化后不同元素的数目。对于整数集的理想 nZ 这一特例来说，约化后的不同元素只有 n 个，即 $0, 1, \cdots, n\text{-}1$（这也正是相应的高斯时钟的刻度数目），因此该理想的绝对范数是 n。

这样，我们就走马观花般地完成了对戴德金 ζ 函数的级数表达式的介绍。不仅如此，在介绍的过程中——不知读者们有没有意识到——我们其实已完成了对 K 为有理数域这一特例下戴德金 ζ 函数的计算！计算的结果是什么呢？让我们来挑明一下：

- 首先，在介绍整数环时我们说过，有理数域 K 的整数环恰好就是整数集；
- 其次，在介绍理想时我们说过，整数集的理想 I 全都是形如 nZ 的集合；
- 最后，在介绍绝对范数时我们说过，理想 nZ 的绝对范数是 n。

把这些结果合并起来，我们可以看到，对于 K 为有理数域这一特例，戴德金 ζ 函数中对非零理想 I 的求和实际上是对正整数 n 的求和（因为 n=0 所对应的是零理想，从而被排除），而相应的绝对范数 $N(I)=n$，因此戴德金 ζ 函数的级数表达式可以写成（其中数域 K 的符号被换成了有理数域的符号 Q）：

Riemann

$$\zeta_Q(s)=\sum_n n^{-s}\quad(\mathrm{Re}(s)>1)\ 。$$

这个表达式大家一定认出来了，它就是普通黎曼 ζ 函数的级数表达式 p- 级数。因此，$\zeta_Q(s)=\zeta(s)$，这表明黎曼 ζ 函数是戴德金 ζ 函数的特例，而戴德金 ζ 函数与狄利克雷 L- 函数一样，是黎曼 ζ 函数的推广。与后两者一样，戴德金 ζ 函数也可以写成类似欧拉乘积公式的连乘积表达式：

$$\zeta_K(s)=\prod_P\left[1-N(P)^{-s}\right]^{-1}。$$

其中连乘积所针对的是所谓的“素理想”(prime ideal)，通常表示为 P。这里我们不幸再次遇到了“链式反应”，即“素理想”这一概念。什么是素理想呢？对于我们所讨论的情形来说，它是这样一种理想，如果整数环中的两个数的乘积在该理想之中，那么两个数中至少有一个数本身就在该理想中。对于有理数域的整数环——即整数集——来说，一个理想 nZ 为素理想当且仅当 n 为素数（这一点的证明十分容易，请读者们自己完成）。显然，在这种情况下，上述连乘积公式完全等同于欧拉乘积公式（因为对素理想 P 的求积就是对素数 p 的求积）。

当然，以上介绍的还只是戴德金 ζ 函数在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 上的级数表达式。不过与狄利克雷 L- 函数一样，它也可以被解析延拓为整个复平面上的亚纯函数，而且也满足类似于黎曼 ζ 函数所满足的函数方程。这些结果是德国数学家（又是德国数学家，本节几乎从头至尾都在介绍德国数学家的成果）Erich Hecke（1887-1947）所证明的。不仅如此，戴德金 ζ 函数的零点也同样有平凡与非平凡之分，非平凡零点全都位于 $0<\mathrm{Re}(s)<1$ 的带状区域（即 critical strip）内。有了这些结果，扩展黎曼猜想的表述也就一目了然了，那就是：

> 扩展黎曼猜想：戴德金 ζ 函数的所有非平凡零点都位于复平面上 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线上。

注 34.7

Grand Riemann Hypothesis 似乎也尚无标准中译名，并且如 [注 34.4] 所说，有时也被混同于 Generalized Riemann Hypothesis（广义黎曼猜想）。“大黎曼猜想”这一名称系本文作者自拟的译名。

由于戴德金 ζ 函数是黎曼 ζ 函数的推广，因此扩展黎曼猜想也显然是黎曼猜想的推广，从而是“豪华版”的。

从上面的介绍中我们看到，广义黎曼猜想与扩展黎曼猜想作为普通黎曼猜想的推广，是建立在对黎曼 ζ 函数的两种不同推广之上的，前者是狄利克雷 L- 函数，后者则是戴德金 ζ 函数。我们还看到，无论狄利克雷 L- 函数还是戴德金 ζ 函数，都与普通黎曼 ζ 函数有着极大的相似性。这种令人瞩目的相似性也许会启示读者问这样一个问题，那就是这些彼此相似的函数是否可以被统一起来，纳入一个更宏大的框架中，成为一类更广泛的函数的特例呢？这是一个好问题，它的答案是肯定的。事实上，狄利克雷 L- 函数与戴德金 ζ 函数都是一类被称为自守 L- 函数（automorphic L-function）的涵盖面更广泛的函数的特例。大家也许还会进一步问：自守 L- 函数是否也有相应的“豪华版”黎曼猜想呢？答案也是肯定的，这种涵盖面更广泛的函数也有一个“豪华版”的黎曼猜想，堪称是“史上最豪华”的黎曼猜想，它的名字很气派，叫做“大黎曼猜想”(Grand Riemann Hypothesis）[注 34.7]。不过，自守 L- 函数这一概念所牵涉的“链式反应”十分剧烈，而建立在这一概念之上的大黎曼猜想的应用却极少（这种应用的多寡主要体现在有多少数学命题以假定其成立为前提），我们就不详加介绍了。在这里，我们只把大黎曼猜想的内容叙述一下（其实不叙述大家想必也不难猜到），那就是：

> 大黎曼猜想：自守 L- 函数的所有非平凡零点都位于复平面上 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线上。

当然，这里的“非平凡零点”仍是指位于 $0<\mathrm{Re}(s)<1$（即 critical strip）内的零点。大黎曼猜想包含了普通黎曼猜想、广义黎曼猜想、扩展黎曼猜想、以及若干有名字或没名字的其它“豪华版”黎曼猜想为其特例，它若能被证明，则黎曼猜想这一研究领域几乎就被一锅端了。不过从目前的情况来看，我们距离这一天还差得很远。事实上，别说是大黎曼猜想，有关自守 L- 函数的许多简单得多的性质，比如它的解析延拓及函数方程等，也都还是未被普遍证明的东西。

Riemann

35 未竟的探索

我们的黎曼猜想漫谈到这里就接近尾声了。在过去的一个半世纪里，无数数学家从各种角度为探索这一猜想付出了艰辛的努力，但可惜的是，直到今天它仍是一个未被证明（或否证）的猜想，对这一猜想的探索迄今仍是向前延伸着的一条未竟的征途。

在数学领域中，超过一个半世纪未能解决的猜想当然不止黎曼猜想一个，比如著名的费马猜想（即如今的“费马大定理”）自提出后隔了超过三个半世纪才被解决；迄今尚未被证明（或否证）的哥德巴赫猜想（Goldbach Conjecture）也已存在了两个半世纪以上，黎曼猜想的历史与它们相比还差得很远。但在所有高难度的数学猜想中，若以它们跟其它数学分支之间的关系，乃至与物理学那样的自然科学分支之间的关系（这些关系在很大程度上决定了一个数学猜想的重要性）而论，黎曼猜想可以说是无与伦比的 [注 35.1]。

与费马猜想或哥德巴赫猜想那种连中学生都能看懂题意的数学猜想不同，理解黎曼猜想是有一定“门槛”的，因为仅仅理解其表述就需要有一些复分析方面的知识。由于这一特点，这一远比费马猜想和哥德巴赫猜想更重要的数学猜想在公众中的知名度要远远低于后两者，也较少受到民科们的青睐——当然也绝非没有，但起码是不曾有任何机构收到过数以麻袋计的来信，声称自己证明（或否证）了黎曼猜想（费马猜想和哥德巴赫猜想都曾引发过此等“盛举”）。不过，尽管“杂音”相对较少，但在黎曼猜想那样艰深的数学猜想面前，无论多么精英的群体也难免会搞出意外事件来。我们在第 6 节中曾经介绍过一次那样的事件，即荷兰数学家斯蒂尔吉斯 (Thomas Stieltjes, 1856-1894) 声称自己证明了一个比黎曼猜想更强的命题，但后来却一直没有发表完整的“证明”，最终不了了之。在最近这十几年里，也出现过两次值得一提的事件。在结束我们的漫谈之前，我们先来聊聊这两次事件。

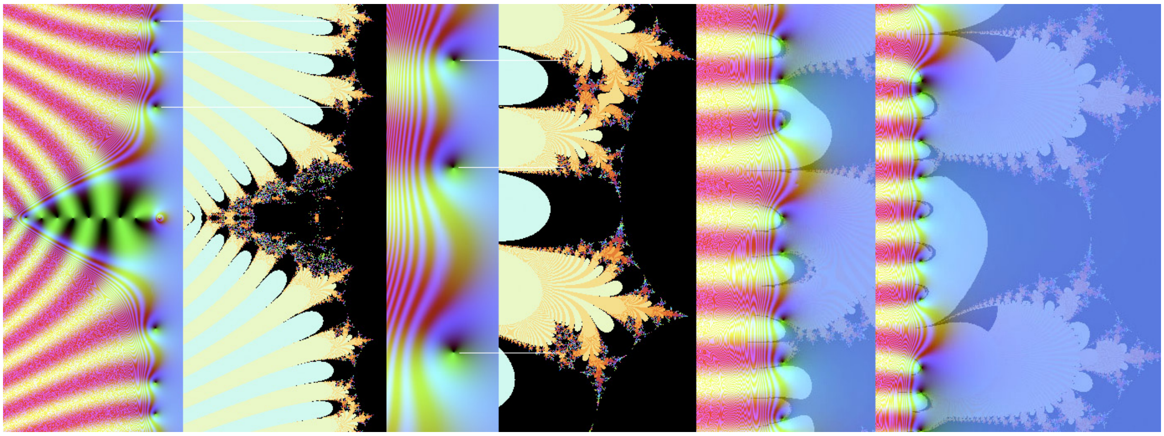
这两次事件中的第一次始于二十世纪九十年代中期，核心人物是法国数学家阿兰 • 科纳（Alain Connes，1947-）。科纳是一位极有声望的数学家，曾获得过 1982 年的菲尔兹奖，并且是非对易几何（Noncommutative geometry）的主要奠基者。对于小道消息相对匮乏的数学界来说，这样一位著名人物开始研究黎曼猜想的消息自然是非同小可的消息。因此早在科纳正式发表这方面的文章之前，有关他正在研究黎曼猜想的小道消息就在圈内不胫而走，并引起了很多人的兴趣。扑灭小道消息的最好手段无疑就是用“官方消息”取而代之。1997 年早春，这样的“官方消息”正式出炉了：科纳决定到普林斯顿高等研究所，向包括塞尔伯格在内的黎曼猜想研究领域的若干巨头报告自己的工作思路。

科纳的思路确实颇有来头：既继承了自二十世纪七十年代之后颇受瞩目的希尔伯特 - 波利亚猜想的路子，也借鉴了韦伊和格罗滕迪克等人在研究“山寨版”黎曼猜想的过程中发展起来的代数几何方法，甚至还用上了科纳自己参与开创的“看家本领”：非对易几何。这几条路子每一条都很吸引眼球，科纳居然将它们一起融入到自己的研究之中，确实是不简单，也很对得起“观众”们的热情。但来到普林斯顿高等研究院听报告的那几位巨头却并不是看热闹的人，那些令常人眼花缭乱的东西，在他们锐利思维的解剖下，被一一还原为冰冷的逻辑，并且显出了漏洞，那就是科纳所报告的方法存在一个“先天”不足，它无法发现不在临界线上的非平凡零点！这个漏洞是很严重的，因为科纳的方法如果无法发现不在临界线上的非平凡零点，那它就会营造出一个错觉，让人误以为所有的非平凡零点全都在临界线上。这就好比有一批不是蓝色就是红色的小球，你若戴上一副只能看见其中一种颜色的滤光镜去看它们，就有可能误以为所有小球都是那种颜色的。因此，普林斯顿高等研究院的那几位巨头在科纳报告之后所给出的最正面的表示也只是审慎的鼓励，即认为科纳确实取得了一些进展，但与黎曼猜想的

注 35.1

另一个衡量数学猜想重要性的指标，是看在研究该猜想的过程中是否发展出有价值的数学手段。从这个角度上讲，黎曼猜想也是无与伦比的。比方说，费马大定理的证明就在一定程度上受益于因研究“山寨版”黎曼猜想而发展起来的代数几何手段。

Riemann



由黎曼ζ函数零点及其迭代过程生成的彩图

证明仍有相当距离 [注 35.2]。

这一事件原本就到此为止了，没想到后来却闹出了一点新的意外。科纳的普林斯顿演讲之后不久恰好是西方社会一个最有趣的节日："愚人节"。很多人在这一天（4 月 1 日）的习惯是互相开玩笑，试图对别人（通常是朋友）进行善意的愚弄，出席过科纳报告的巨头之一、1974 年菲尔兹奖得主蓬皮埃利（Enrico Bombieri, 1940-）（我们在第 14 节中曾提到过他）也不例外，他给一位朋友发去了一封"愚人节"邮件，宣称有位年轻的物理学家受科纳报告的启发，终于完成了黎曼猜想的证明！由于当时数学界很多人正四处打探和传播着有关科纳工作的消息（尤其是与科纳的普林斯顿报告有关的消息），蓬皮埃利这权威之人发自权威之地的消息一出，收到邮件的数学家朋友当场就信以为真地把它传了出去。这消息传得很快，甚至连已从普林斯顿回到法国的科纳本人都很快就知道了，让他颇为不快。

当然，有道是"谣言止于智者"，一个"愚人节"玩笑在智者云集的数学家群体中是不会惹出太大动静的，不久之后有关科纳报告导致黎曼猜想被证明的消息就平息了下去。但这个误传的消息似乎将数学家们对科纳的兴趣透了支，以至于后来无论是科纳 1999 年正式发表的论文，还是他在同一方向上的进一步研究，都没有再引起当初那样的关注。不过科纳本人对此看得很开，他曾经表示：

> 对我来说，数学一直是一所教人谦虚的最好学校。数学之所以有价值，主要就是因为那些极其困难的问题，它们就像数学的喜玛拉雅山。登顶是极其困难的，甚至必须为之付出代价，但千真万确的是，如果我们能登顶，那里的风景将是奇妙的。

对于那"必须为之付出"的代价，他在 2000 年发表的一篇文章的开头曾经作过这样的表述 [注 35.3]：

> 按我第一位老师 Gustave Choquet 的说法，公开面对一个著名的未解决问题是一种冒险，因为别人将更多地记住你的失败而不是其它。

尽管如此，科纳仍选择了冒险攀登数学的喜玛拉雅山，因为：

注 35.2

据说在对有关黎曼猜想的研究进行评述时有一种比较"规范"的总结词就是："这确实是一个重要进展，但如何才能证明黎曼猜想仍不是很清楚"，普林斯顿高等研究院的巨头们对科纳的评价与那种总结词颇有异曲同工之意。

注 35.3

科纳这段话中提到的 Gustave Choquet（1915-2006）是一位著名的法国数学家，在分析与拓扑等领域作出过重要工作。

Riemann

在到达某个年龄之后,我意识到“安全地”等待自己生命的终点同样是一种让自己失败的选择。

有关科纳的事件大体就是如此,他目前仍在攀登,虽然已不再是镁光灯下的焦点,我们仍衷心祝愿他取得进展。

在科纳的事件之后又过了几年,2004 年,另一个事件发生了:美国普度大学(Purdue University)的数学教授路易斯•德勃艮地(Louis de Branges, 1932-)在互联网上张贴了一篇长达 124 页的论文,宣称自己证明了黎曼猜想!由于在此前的 2000 年 5 月,美国克雷数学研究所(Clay Mathematics Institute)已经为七个所谓的“千禧年问题”(Millennium Problems)设立了每个一百万美元的巨额奖励,而黎曼乃是其中排名第四的问题[注 35.4]。因此德勃艮地的宣称立刻引起了一些媒体的关注。

但数学界对此事的反应却相当冷淡。

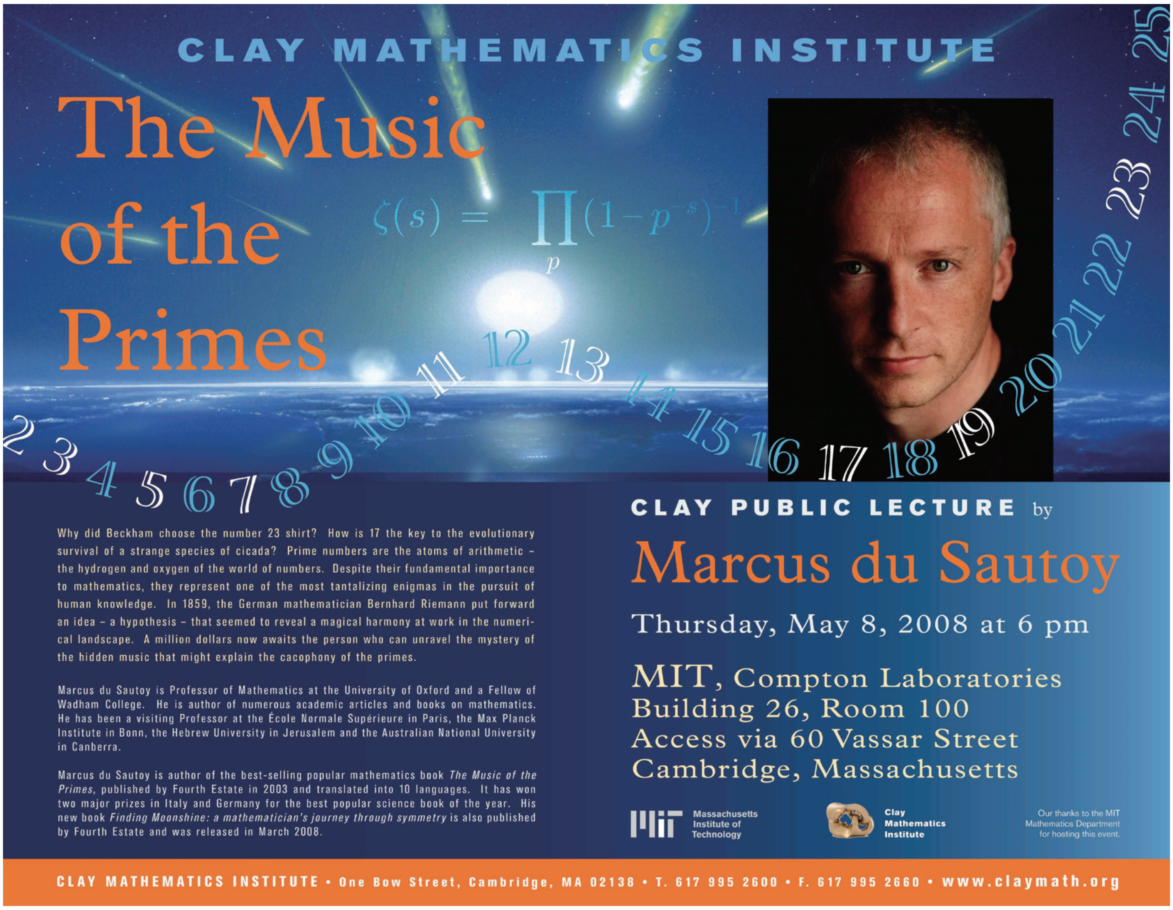
为什么呢?这还得从德勃艮地是一位怎样的数学家说起,简单地讲,德勃艮地堪称是一位史上最离群的数学家。数学界离群的人物为数并不少,但其他数学家再怎么离群,至多是在人际关系上离群,德勃艮地却连数学工具也是离群的,他是一个几乎只用自创的数学工具进行研究的家伙,而他自创的数学工具除了他本人和为数有限的几位学生外,几乎无人通晓。这种超乎寻常的离群性大大孤立了德勃艮地,他在数学界的人缘连他自己也不得不承认是很惨的。更糟糕的是(其实这才是重点),他还是一个工作很粗心的家伙,甚至颇有民科气质,经常宣称自己证明了重大数学猜想,其中包括对证明黎曼猜想的多次错误宣称,只不过在“千禧年问题”出炉之前媒体不太关注而已。当然,德勃艮地如果真是一个民科,我们就不会在这里谈及他的事情了。此人的恼人之处就在于他虽然很有民科气质,却也真刀真枪地作出过一次正确的宣称,而且所解决的还是一个有着几十年历史的著名猜想:比贝尔巴赫猜想(Bieberbach conjecture)——那猜想如今已被称为了德勃艮地定理(de Branges's theorem)。

照说有过此等业绩、甚至有数学定理以其名字命名的数学家是不该受到如此冷遇的。而且德勃艮地当年对比贝尔巴赫猜想的证明本身也是在有过几次错误宣称之后,才得到公认的。这似乎在从历史角度启示人们应该对他有关黎曼猜想的证明给予一点关注(或同情?)。可惜的是,德勃艮地在犯错方面的名声实在太狼藉了,以至于就连对比贝尔巴赫猜想的证明也不够份量来抵消了。比如塞尔伯格就毫不客气地嘲笑说德勃艮地曾经犯过所有类型的错误,他对比贝尔巴赫猜想的证明只不过说明他还犯下了“做对了”的错误(made the mistake of being right)。

德勃艮地的“证明”受到数学界的冷遇还有两个重要原因:其中一个就是我们前面所说的,他几乎只用自创的数学工具进行研究,而那工具除他本人和几位学生外,几乎无人通晓。这给人们检验他的工作造成了巨大困难。当年他对比贝尔巴赫猜想的证明之所以被接受,乃是几位苏联数学家花费了几个月的时间研读他的证明,并对之进行简化的结果。而此次有关黎曼猜想的文章比当年的证明还要复杂得多,他的名声却比那时更差了,愿意花时间去研读他文章的人自然就更少了。而且要命的是,他的论文还引用了过去几十年他所撰写的其它一些无人问津的论文,从而对读者来说更是“不可承受之重”。另一个也许更致命的原因则是,虽然德勃艮地的“证明”受到了数学界的冷遇,但毕竟还是有个别数学家对他的论文进行了粗略光顾。不幸的是,光顾的结果却是发现了缺陷,从而进一步坐实了他的恶劣名声。另外还有人注意到他的论文中有一些“前言不搭后语”的东西,比如序言里反复提到量子力学,正文中却完全没有呼应;文献中列举了赫尔曼•外尔(Hermann Weyl)的一部著作,正文中也根本没有引用,这一切都让人深切地感觉到黎曼猜想被这位已年过七旬的老人所证明实在是不太可能的事情。也许是因为缺陷遭到曝光的缘故,德勃艮地后来撤掉了最初版本的论文,但他并未就此认栽。他的论文几经修改后,口气反而越改越大,目

注 35.4

“千禧年问题”的排序不是依照问题的重要性,而是依照问题英文名称的长度进行的。这种排序的目的是使列举“千禧年问题”的新闻稿看起来更加有序,从而更能吸引眼球。



《素数的音乐》作者在美国克雷研究所的演讲广告。

前所宣称的结果甚至比我们在上节中介绍过的“豪华版”黎曼猜想之一的广义黎曼猜想还略强一些。可惜他这第 N+1 次的“狼来了”故事是真的再也无人问津了，更没有学术刊物愿意发表。

这就是有关德勃艮地的事件。除德勃艮地外，还有一些其他人也宣称过自己“证明”或“否证”了黎曼猜想，他们的论文往往只有寥寥几页或十几页，引起的反响则基本是零，就按下不表了。

接下来我们再聊点趣话。读者们也许还记得，在一百多年前的十九世纪末，法国数学家哈达玛（Jacques Hadamard）和比利时数学家瓦利 - 普桑（Vallée-Poussin）取得了自黎曼提出猜想三十多年以来的第一个实质性进展，即将非平凡零点的分布范围由 0≤Re(s)≤1 缩小到了 0<Re(s)<1（参阅第 7 节）。很巧的是，这两人在数学家之中都以长寿著称：哈达玛活到 98 岁，瓦利 - 普桑活到 96 岁。数学界后来流传起了一个说法，那就是如果有人证明了黎曼猜想，他就会不朽——不仅是抽象意义上的不朽（那是毫无疑问的），而且是实际意义上的不朽（即长生不老），因为哈达玛和瓦利 - 普桑这两人仅仅取得了一点点进展，就都活到了将近百岁。当然，这个传说看来是没有关怀到另一些也取得过一点点（有的甚至还不止一点点）进展的数学家，他们可就没那么好命了，比如证明了波尔 - 兰道 定理（参阅第 22 节）的波尔（Harald Bohr）和兰道（Edmund Georg Landau）就分别只活了 63 岁和 61 岁。比上述传说更厉害（或更歹毒）的传说则是 Andrew M. Odlyzko（1949-）（我们在第 16 节中介

Riemann

绍过此人）提出的，是一个与上述传说恰好“互补”的说法，即谁要是否证了黎曼猜想，他就会立刻死去！Odlyzko 甚至开玩笑说其实黎曼猜想已经被否证了，只不过那个否证了黎曼猜想的倒霉蛋没来得及发表文章就死去了。

这些传说当然只能为我们的漫谈增添点趣话，不过，证明或否证黎曼猜想的人会“不朽”或“速死”虽是无稽之谈，黎曼猜想的极度艰深倒确实有可能对数学家的健康产生影响。事实上，数学界的确有人认为黎曼猜想的极度艰深有可能对几位数学家的精神异常起到过一定作用（不过证据都不是很强）。这方面比较著名的例子有两个：一个是广为流传的传记作品《美丽心灵》的主角、美国数学家约翰•纳什。二十世纪五十年代后期，这位已在博弈论等领域做出过重要工作的数学家对黎曼猜想产生了兴趣。不久之后，他开始宣称自己找到了黎曼猜想的证明。而数学界此时流传的却是一些有关他罹患精神分裂症的消息。这消息很快得到了证实：1959 年，纳什在哥伦比亚大学作了一次演讲。这次据说意在宣布黎曼猜想证明的演讲实际上成为了公开展示纳什精神分裂症的场合，他的演讲几乎达到了语无伦次的程度，到场听讲的数学家们只有用平时很少使用（对著名同事更是几乎从不使用）的词汇——比如“灾难性的”、“完全是胡扯”等等——才能形容那次演讲的糟糕。由于纳什罹患精神分裂症与他研究黎曼猜想发生在同一时期，一些人相信黎曼猜想对他的病症发展有可能起到过推波助澜的作用。

另一个例子的主角是我们在第 33 节中提到过的、曾经为证明“山寨版”黎曼猜想（即韦伊猜想的一部分）作过重要铺垫工作的格罗滕迪克。这位在代数几何等诸多领域有着卓越贡献的数学家据说也有可能是因为研究黎曼猜想的缘故，使得精神出现异常，自上世纪七十年代开始就基本退出了学术界，后来发展到“离家出走”，几乎从世界上消失了。人们猜测他目前住在法国南部。关于他在做什么，则众说纷纭，有人说他正在研究一种新的经济学，有人说他在牧羊，而据个别自称与他仍有过交往的数学家说，他已沉溺于对恶魔（devil）的想象不能自拔，比如他相信是恶魔把本应该是每秒 30 万公里的数值优美的光速变成了很难看的每秒 299,887 公里（细心的读者也许注意到了，这个数值本身就是

黎曼（Bernhard Riemann）的墓碑

错的，实际数值应为每秒 299,792.458 公里，不知是格罗滕迪克记错了还是数学家传错了）。格罗滕迪克失踪十几年后，很多人都已搞不清他是否还健在，他却忽然于 2010 年 1 月给自己以前的学生、法国数学家 Luc Illusie（1940-）写了封亲笔信，宣布自他“消失”后所出版或再版的他的一切文字都是未经许可的，那些文字在他有生之年不得再版，已收录了那些文字的图书馆也必须将之撤除。他的这一信件被公布后，一些提供那些文字的网站已对有关内容作了撤除。这个要求对数学界是一件不幸的事情，因为他的很多文字，比如著名的《代数几何基础》（Éléments de géométrie algébrique——简称 EGA）和代数几何讨论班资料（Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie——简称 SGA），都早已是极重要的资料，如果不能再版或不能被图书馆收录的话，后人将会越来越难看到它们。

格罗滕迪克这一例子，尤其是研究黎曼猜想有可能对其精神异常有过影响这一猜测来自于 Marcus du Sautoy（1965-）的《素数的音乐》（The Music of Primes）一书。该书作者是牛津大学的数学教授，为撰写此书亲自采访了很多数学家，其中包括本系列提到过的 Bombieri、Odlyzko、te Riele、Selberg、Zagier 等人，是一位比较可信的作者。不过格罗滕迪克这一例子有些例外，我虽进行了引述，对其可靠性却不无怀疑。首先是格罗滕迪克的精神是否异常，不像 Nash 的例子那样清楚，因为他自“消失”之后与社会的联系微乎其微，有关他的很多说法都只是传闻。其次，即使他的精神确实异常，那是否是研究黎曼猜想所致，du Sautoy 没有给出证据，我在其它资料中也未看到过对这一说法的支持。从行为上看，格罗滕迪克的异常始于 1970 年离开法国高等科学研究院（Institut des Hautes Études Scientifiques——简称 IHÉS）一事。但一般认为（du Sautoy 自己也持此说）此事乃是他的极端和平主义思想所致，他是因为发现 IHÉS 的经费有一部分来自军方之后，才愤然离开了这一堪称自己学术黄金之地的研究所。在那之前，格罗滕迪克的研究课题之一是韦伊猜想，他曾试图用一系列所谓的“标准猜想”(Standard Conjectures) 来证明韦伊猜想中的“山寨版”黎曼猜想部分。他在这方面的努力遭到了挫折（“标准猜想”直到今天仍未被证明），但那挫折虽在时间上与他自 1970 年开始的行为变化有些巧合，却未必有因果联系，而且那挫折对他的精神造成过多大影响也并不清楚。

写了这么多有关黎曼猜想的故事，介绍了这么多有关黎曼猜想的进展，有一个问题似乎不能不提一下——而且那想必也是读者们感兴趣的问题，那就是黎曼猜想将会被证明是正确的呢，还是会被证明为错误（即否证）？可惜的是，这个有关黎曼猜想“前途命运”的问题是一个谁都能提出，却没有人能够回答的问题，数学家们对此也各有各的倾向而毫无共识。

有些数学家坚信黎曼猜想是正确的，比如我们在第 14 节中提到过的那位输掉了葡萄酒的查基尔（Don Zagier, 1951-）。他相信黎曼猜想的理由很“纯朴”，那就是认为数值证据已经足够强大了——读者们想必还记得，他是因为有人验证了黎曼 ζ 函数前三亿零七百万个零点都在临界线上而输掉葡萄酒的。这个纪录如今早已被打破，二零零四年十月，法国人 Gourdon 与 Demichel 已经验证了黎曼 ζ 函数前十万亿（10^{13}）个零点都在临界线上。不仅如此，我们在第 16 节中还介绍过，Odlyzko 曾经验证过第 10^{22} 和 10^{23} 个零点附近的几百亿个零点也全都在临界线上。这些证据都远远强于使查基尔满意的证据。可见支持黎曼成立的数值证据确实很强大。但可惜的是，所有这些证据加在一起，也无法成为让人们信服黎曼猜想的可靠理由。其原因不仅在于从逻辑上讲再多的数值证据对于一个包含无穷多个例的猜想来说都是微不足道的，而且也因为在数学上我们已经遇到过这样的例子，即一个数学命题的反例出现在比上述所有数值证据都强得多的证据之外。那例子就是我们在第 3 节中提到过的、被李特尔伍德（John Littlewood）所否证了的关于 $\mathrm{Li}(x)-\pi(x)>0$ 的猜测。对于迄今所有被验证过的情形，$\mathrm{Li}(x)-\pi(x)>0$ 都成立，但李特尔伍德却运用分析的力量，不仅证明它不成立，而且证明了它会被违反无穷多次！那么所有验证过的情形说明什么呢？说明虽然有无穷多个 x 违反 $\mathrm{Li}(x)-\pi(x)>0$，但其中哪怕最小的 x 也大得异乎寻常 [注 35.5]。事实上，我们直到今天也不知道这个最小的 x 究竟有多大，目前对它的估计约为 10^{316}。这个数字如果用中文写出来的话，是：一万亿……亿（此处作者略去三十七个字——别想歪了，大家知道略去的是什么字）。与这个数字相比，我们对黎曼 ζ 函数非平凡零点的数值验证简直差得太远了。假如黎曼猜想的反例也出现在那样的地方（即比如出现在第 10^{316} 个零点的附近），那我们再算上几辈子也未必能碰到数值反例。因此，有关黎曼猜想的数值证据虽然不容忽视，说服力却是很有限的。

当然，除了数值证据外，我们还有许多有关黎曼猜想的解析证据，比如第 28 节中提到的康瑞（Brian Conrey）所证明的 2/5 的非平凡零点在临界线上。可惜这也远远不够（连一半都不到嘛）。支持黎曼猜想的其它理由还包括了一些在假定黎曼猜

注 35.5

这个最小的 x 被哈代称为 Skewes 数（Skewes' number），因为最早对它进行数值估计的是李特尔伍德的学生、南非数学家 Stanley Skewes（1899–1988）。

Riemann

想成立的基础上被证明过的数学命题后来被发现不假定黎曼猜想的成立也能被证明，这表明黎曼猜想与那些命题、或者说与数学的其它部分有很好的相容性。此外，我们在第 33 节中介绍过的“山寨版”黎曼猜想的成立也被认为是支持黎曼猜想的一条很强的理由。

相信黎曼猜想的数学家们各有各的理由，不相信黎曼猜想的数学家们则只要一条理由就够了，那就是：所有支持黎曼猜想的理由都不是证明。在数学上，这是一条打不倒的理由。当然，个别数学家会有自己更独特的理由，比如我们在第 9 节中提到的那位曾在黎曼猜想研究上作出过重大成就，后来却表示“假如我们能够坚定地相信这个猜想是错误的，日子会过得更舒适些”的李特尔伍德不相信黎曼猜想的理由是“一个长期不能解决的分析领域中的猜想通常会被发现是错误的，一个长期不能解决的代数领域中的猜想则通常会被发现是正确的”。由于黎曼猜想是一个“长期不能解决的分析领域中的猜想”，因此李特尔伍德认为它很可能是错误的。李特尔伍德没有为自己的理由列举具体的例子（起码我没查到），我想他对 $\mathrm{Li}(x)-\pi(x)>0$ 这一猜想的否证也许是他心目中的例子之一。但他这个理由其实也没什么说服力，比如我们上面提到过的被德勃艮地所证明的比贝尔巴赫猜想就是一个几十年不能解决的分析领域中的猜想，结果却被证明是正确的。

除了上述这两种非此即彼的态度外，还有少数人由黎曼猜想的长期悬而未决联想到了著名的歌德尔不完备性定理（Gödel's incompleteness theorems），认为黎曼猜想也许是一个在现有分析体系内不可判定——即既不能证明其成立也不能证明其不成立——的命题。据说歌德尔本人就有过这种看法。不过，对于像黎曼猜想那样如果不成立就可以用明确的算法——即按虚部从小到大的顺序对零点进行逐一验证——来予以推翻的命题，如果真有人能证明它是一个不能证明其不成立的命题（有点拗口），实际上等于表明它是成立的——因为否则的话只要用那个算法，原则上总可以验证到使黎曼猜想不成立的第一个反例，从而证明其不成立。因此如果黎曼猜想真的不可判定，那实际上是表明它成立。

在本系列的最后，让我们“饮水思源”，一同去看一眼黎曼的墓碑，这位伟大的数学家只度过了 39 年 10 个月零 3 天的短暂人生，就于 1866 年 7 月 20 日在意大利的一座湖畔小镇去世了。据他生前挚友戴德金的描述，黎曼直到去世前的那一天，仍坐在一棵果树下进行着数学探索，当那最后的时刻来临时，“他的眼睛很平静，没有一丝挣扎和临终前的抽搐，仿佛他是在饶有兴致地观看着灵魂与肉体的分离”。黎曼去世后一度被葬在当地一座教堂的墓地里，可惜那墓穴却在后来的一次教堂地产的重组中遭到了损毁，如今保留下来的只有一块墓碑，嵌在离原址不远处的一堵墙上。

好了，亲爱的读者，我们的黎曼猜想漫谈到这里就正式结束了。从 2003 年 11 月写下第 1 节，到今天完成最后一节，这个系列前前后后已持续了八年多的时间，虽然有关黎曼猜想的探索还远未结束，我却要跟大家说再见了。当然，如果在我有生之年黎曼猜想被数学界公认得到了解决，我一定会续写这个系列的，但现在请允许我先说一声——

再见！

完结

2012 年 1 月

自然的奥秘：混沌与分形

谨以此文纪念混沌之祖庞加莱逝世一百周年

丁玖

“自然界的大书是以数学符号写的。”—— 伽利略

（一）引子

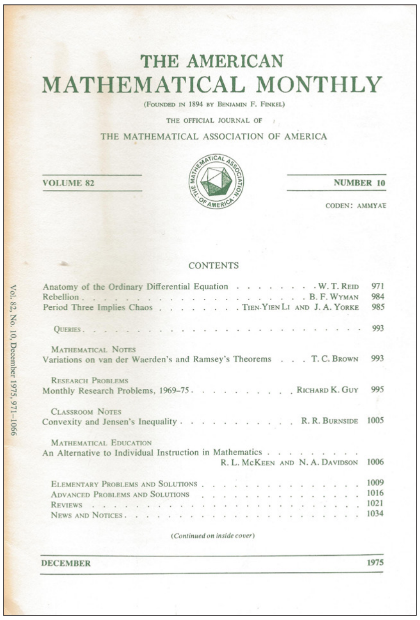
2009 年的春天，新的一期《美国数学会会刊》（Notices of the American Mathematical Society）刊登的一篇题为“鸟与青蛙”的文章吸引了全世界许许多多的读者。这是生在英国、年逾八旬的美国普林斯顿高等研究院教授戴森（ Freeman Dyson, 1923- ）应美国数学会之邀所作的上年度“爱因斯坦讲座”的讲演稿。这位在学术界备受尊敬的理论物理学家和数学家形象地描绘了近代自然科学发展四百年来从十七世纪的英国人培根（Francis Bacon, 1561-1626） 和法国人笛卡儿（Rene Descartes, 1596-1650）到二十世纪的匈牙利人冯 • 诺依曼（John von Neumann, 1903-1957）和中国人杨振宁（1922- ）等典型的两类学术巨匠：大鸟般的俯瞰大地者与巨蛙式的深入探究者。

戴森在文章中描述了与那些“鸟”和“蛙”融为一体的几大学科，并不吝笔墨地用了近两页的篇幅来讨论混沌研究的发展。

戴森：“在混沌领域里，我仅知一条有严格证明的定理，是由李天岩和詹姆斯 • 约克在 1975 年发表的一篇短文‘周期三意味着混沌’中证明的。”（In the field of chaos I know only one rigorous theorem, proved by Tien-Yien Li and Jim Yorke in 1975 and published in a short paper with the title, “Period Three Implies Chaos.”）正如约克后来在寄给同一杂志的“读者来信”中第一句所述，他和李天岩“欣喜地”读到戴森接下来的评语：

“李 - 约克论文是数学文献中不朽的珍品之一。”（The Li-Yorke paper is one of the immortal gems in the literature of mathematics.）

为什么在演讲稿中甚至对大数学家冯 • 诺依曼都颇有微辞的戴森对李天



THE AMERICAN
MATHEMATICAL MONTHLY
(Founded in 1894 by Benjamin F. Finkel)
THE OFFICIAL JOURNAL OF
THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA

VOLUME 82 | NUMBER 10

CODEN: AMMYAE

Vol. 82, No. 10, December 1975, 971–1066

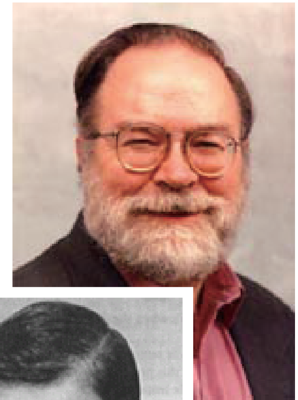
CONTENTS

(Continued on inside cover)

DECEMBER 1975

刊登李 - 约克论文的那期《美国数学月刊》

戴森（1923- ）



上图：约克（1941- ）；下图：李天岩（1945- ）

岩 - 约克的那篇“immortal”论文情有独钟？在这篇历史上第一次给予“混沌”这一普通名词之严格数学定义并在“混沌”、“分形”发展史上承前启后、继往开来的八页论文的背后，是什么样的风云变幻与扑朔迷离？

如今，混沌、分形的术语已在科学技术界家喻户晓。我们要追溯它们的历史，就必须首先请时光倒流一百年，去和被美国数学史家、1937 年初版的名著《数学伟人传》（Men of Mathematics）的作者贝尔（Eric Temple Bell, 1883-1960）称为“最后的全能数学家”的昂利 • 庞加莱（Henri Poincare, 1854-1912）来一番亲密接触。

（二）“三体问题”的困惑

真正意义上的现代物理科学大概是从意大利实验物理学家伽利略（Galileo Galilei, 1564-1642）著名的自由落体实验开始的。伽利略死后一年而生、“站在巨人肩膀上”的无与伦比的牛顿（Issac Newton, 1643-1727）24 岁前以“超过全人类的智能”，集前人研究成果之大成，提炼出他的“运动三大定律”，加上“万有引力定律”，构成经典力学的大框架。“英国人的骄傲”牛顿和“德国人的宠儿”莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716）各自独立发明的微积分，早已成为每一个理工科大学生的必修科目。

正如牛顿爵士的墓志铭上写着的，“他几乎神一般的思维力，最先说明了行星的运动和图像、彗星的轨道和大海的潮汐。”质量已知、外力给定，加上初始条件，运动物体在任何时刻的空间位置就可被牛顿定律所确定。有谁不赞叹他天才思想的洞察、神工鬼斧的创造？有谁不感谢他那颗智慧的大脑给我们的世界带来的亿万财富？

春夏秋冬、日复一日，太阳每天从东方升起，在西天落下，钱塘江每年一次涨潮落潮的壮观景象周而复始。每一天，当我们清晨早起，迎着灿烂的阳光走向工厂、农场、机关、学校的时候，我们会感到世界似乎是那么的有序，一切如同牛顿力学的“决定论”哲学思想所描绘的那样。

可是，无序无处不在。湍急的水流、物种的变异、股票的走向、心脏的跳动，甚至我们自己的喜怒哀乐，等等等等，无一不昭示着大自然和人类行为的随机性、不连续性、不稳定性这些不规则行为的方方面面。

对“世界有序”信条的第一次科学的挑战，在十九世纪末拉开了帷幕。正如美国记者格莱克（James Gleick, 1954-）在 1987 年出版的畅销书《混沌》的第一章“序曲”中所说：“混沌开始之处，就是经典科学终止之时。”

1885 年，瑞典和挪威国王奥斯卡二世（Oscar II, 1829-1907）为了庆祝他四年后的六十岁生日，提供 2500 克朗有奖悬赏求解我们赖以生存的太阳、地球、月亮这三大天体在相互之间万有引力的作用下，如果知道了在某个时刻它们的初始位置和初始运动，在后来任意的时刻它们的位置和速度是什么样？比如说，在一万年之后？这就是所谓的“三体问题”。两个物体的“二体问题”又叫做“开普勒（Johannes Kepler, 1571-1630）问题”，它早在 1710 年就已被约翰 • 伯努利（Johann Bernoulli, 1667-1748）首先解决了，他是瑞士历史上最令人吃惊的伯努利

家族的代表人物之一，该家族前后一百年间的三代人中就出现了八位“青史留名”的数学家，约翰•伯努利是第一代两兄弟中的弟弟。但增加一个物体，难度的增加几乎是无穷大。

牛顿万有引力定律说，两个物体之间的相互吸引力跟物体质量的乘积成正比，跟它们之间距离的平方成反比。根据牛顿运动第二定律，物体运动的加速度乘上它自己的质量等于作用在该物体上的外力。加速度是物体运动速度的变化率，换句话说，它表示速度的变化有多快，而速度又是物体在空间中位置的变化率。一个变量的变化率就等于微积分中的“因变量关于自变量的导函数”，即所谓“函数的导数”。所以物体的加速度等于“物体的空间位置”这个函数关于“时间”这个自变量的“导数的导数”，即所谓的“二阶导数”。这样一来，由于每个物体在空间中的位置由它的三个笛卡儿坐标表示，“三体问题”对应于求解九个“二阶非线性微分方程”，并检查当时间愈来愈远时解的最终性态。可惜的是，方程组的解虽然存在，但没有办法可以写出它的具体表达式，就像大多数自然界的应用问题一样。

新的方法应运而生，它来自庞加莱那颗杰出的“水牛般的大脑袋”。

庞加莱曾被无产阶级革命导师和辩证唯物主义哲学家列宁半褒半贬为一个“伟大的科学家，渺小的哲学家”。但在第一次世界大战中，当对法国充满敌意的一位英国将军询问他的同胞、数学家和哲学家罗素（Bertrand Russell, 1872-1970）谁是法国现代最伟大的人物时，后者立刻答道：

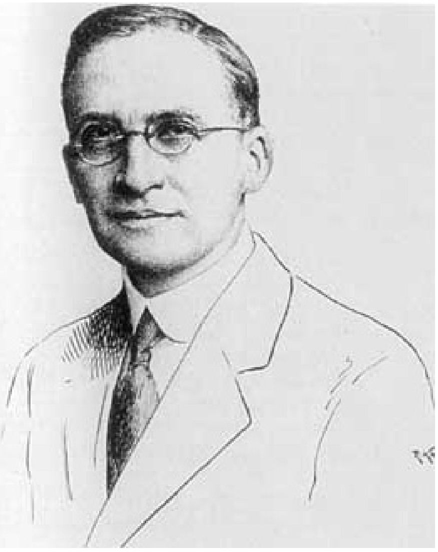
“庞加莱。”

“什么？那个家伙？”将军以为罗素指的是法国的总统雷蒙•庞加莱（Raymond Poincare, 1860-1934）。

当罗素知道那人如此惊愕的原因后，笑了一笑：

“我想到的是雷蒙的堂哥，昂利•庞加莱。”

庞加莱（1854-1912）



伯克霍夫（1884-1944）

庞加莱是数学研究领域包括纯粹数学与应用数学的几乎所有方面的最后一位数学通才，并在物理学许多领域，包括相对论，多有建树。他对数学和科学哲学的见解和论述，几乎让所有其他科学家难以望其项背。他的科学普及读物，像《科学与方法》，是科学专业人士和普通老百姓在巴黎的咖啡馆或公园里的读本，一百多年来被翻译成西方和东方多种文字出版，影响了几代人的科学思维和方法。由于其优美的语言表达和科学方法论著作的文学成就，他被选为法兰西学院文学部院士，这是对科学界人士的独特荣誉。

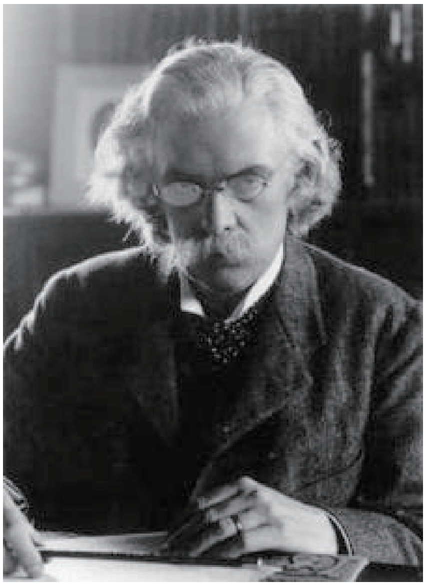
庞加莱出生于法兰西一个既显赫又杰出的家族，在童年时就显示出超群绝伦的智力。但有趣的是，已经成为那个时代一流数学家的他曾经参加过以同时代法国心理学家比奈（Alfred Binet, 1857-1911）名字命名的智力测验，结果是：如果他被当作孩子的话，大概属于“低能儿”。他一生当中的主要娱乐是阅读，其读书的速度快得令人难以置信，并有着比瑞士的大数学家欧拉（Leonhard Euler, 1707-1783）更强的记忆力，这大概和他与生俱来的差视力有关。与一般人通常用眼睛帮助记忆不同，庞加莱几乎是靠耳朵，但与后来在一些国家中盛行的“耳朵识字”伪科学无关。事实上，在大学念书时，因看不见黑板上的字，他坐在后排听，不记笔记，只靠耳朵，非同寻常的记忆力派上了大用场。看来，近视眼的学生，大可不必花钱配眼镜，坐在课堂的后面听讲也许是锻炼记忆力的一大秘诀。

庞加莱 17 岁以第一名的成绩考入了法国著名的巴黎高工。他的数学天才技惊四座，别人的数学难题一告诉他，“答案就像一支箭似地飞了出来。”但他不善体育，绘画入学考试零分，差点被拒绝在校门之外，就像中国的大学者钱钟书（1910-1998）当初报考清华大学时那样。

从 1878 年提交数学博士论文给巴黎的法国科学院，到他 1912 年因病辞世，庞加莱在他不长的 34 年学术生涯中留给全人类近 500 篇数学论文和 30 多本覆盖数学、物理和天文等众多学科的著作，还不包括那些科学哲学的名著和为大众撰写的通俗文章。他去世前不久发表了他未能证明的一生中

魏尔斯特拉斯（1815-1897）

埃尔米特（1822-1901）



米塔 - 列夫勒（1846-1927）

最后一个重要定理，给后来者提出了前景美好的新的重要问题。这条与三体问题也有关系的所谓“庞加莱最后的几何定理”很快就被一名后起之秀、年轻的美国数学家伯克霍夫（George David Birkhoff, 1884-1944）证明。为他一生画上句号的这条漂亮定理大意是说，如果你保持面积地双向扭曲一个像只垫圈的环形区域，让圆形的外边和内边分别按顺时针和逆时针方向旋转，则圆环中至少有两个点“不为扭曲所动”。

1889 年，庞加莱提交了他对三体问题的研究以及由此而生的对微分方程的一般讨论。这个理论不同于传统的那个只需要求出方程解公式的定量理论，而是探讨其表达式求不出的解的种种性质。虽然他未能完全解决三体问题，却在求解过程之中以及他生命的最后十年创立了“组合拓扑学”或“代数拓扑学”这一新学科。由当时健在的三个顶尖数学家，分别为德国人、法国人和瑞典人的魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass, 1815-1897）、埃尔米特（Charles Hermite, 1822-1901）和米塔 - 列夫勒（Magnus Gosta Mittag-Leffler, 1846-1927）组成的评奖委员会决定授于他奥斯卡国王的这一奖金。

魏尔斯特拉斯在写给米塔 - 列夫勒的评奖报告中赞美道，庞加莱的工作“是非常重要的，它的发表将在天体力学史上开创一个新的时代”。

但是，庞加莱获奖工作的基本假设是“同宿点不存在”。所谓的同宿点是关于一个不动点的稳定流形和不稳定流形在别处相遇的一个点。他起初认定这两个流形在别处不相遇，天下因此太平，大家都很高兴，他也拿到了 2500 克朗的奖金。

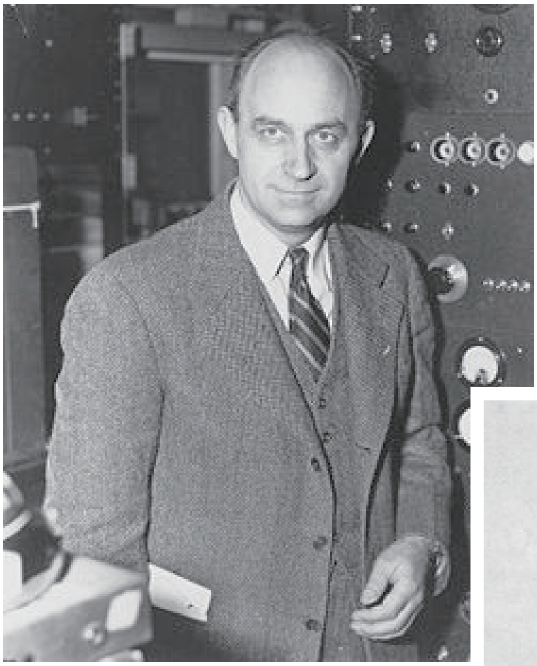
那一年的冬季，庞加莱的获奖论文开始印刷，准备发行。一名数学家和庞加莱本人在校对样稿时都发现了其中的一些地方证明不太清楚。认真负责任的庞加莱开始全力以赴地修改这些部分，并且通知杂志的主编收回了已经印出的杂志予以销毁。他还主动自掏腰包地付了 3585 克郎，赔偿出版社的经济损失。这就是说，除了贴上他的奖金，他还倒赔了一千多克郎。但这个人的小损失，换来了人类的大进步。修改后的文章增加了将近三分之一的篇幅。正是这次修改导致了他对“同宿点可能存在”的伟大发现。

最终，庞加莱的这篇长达 270 页的论文“关于三体问题的动力学方程”于 1890 年 10 月在瑞典领头数学家米塔 - 列夫勒所创办的《数学杂志》（Acta Mathematica）上发表。从此，他一不做二不休，乘胜前进，自 1892 年到 1899 年一口气地撰写了三大卷充满新思想的宏伟巨著《天体力学的新方法》。

庞加莱首先证明了三体问题不像二体问题，不可能通过发现各种“不变量”来把问题化繁为简以获得解析解，这就让他那一代的数学家们想找到三体问题显式解的梦想破灭，彻底地重塑人们研究微分方程的基本想法。

更为重要的是庞加莱发现，三体问题微分方程组的稳定流形和不稳定流形由于相交而产生同宿点，因此引起方程的一般解在某些区域具有异常复杂的状况，以至于对于给定的初始条件，几乎是无能为力来预测当时间趋于无穷大时，这个解曲线的最终命运。

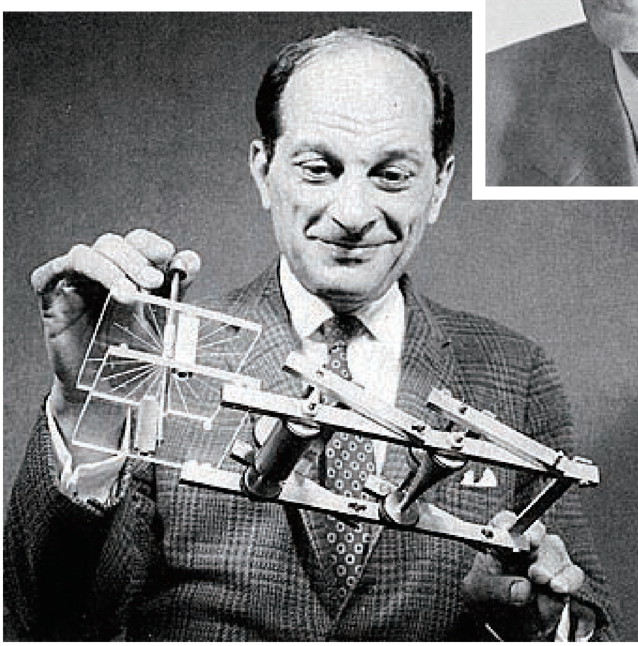
庞加莱对找不到解的解析表达式的微分方程解的一般理论，导致了用几何和拓扑方法研究微分方程解的定性理论的诞生。这门学问现在被纳入



费米（ 1901-1954 ）

特勒（1908-2003）

奥本海默（1904-1967）



乌拉姆（1909-1984）

费恩曼（1918-1988）

称之为动力系统的大范畴。他在研究天体运动的三体问题时已经清楚地知道它的解对初始条件的“敏感依赖性”，以及解的最终性态的“不可预测性”。可以说，他是人类历史上懂得自然界混沌可能性的第一人。

今天，即便是学过非线性微分方程初级理论的大学高年级学生也已知道，混沌可以出现在看上去很简单的双摆运动之中。为什么高中物理或大学普通物理课的老师并没有告诉这一事实？也许他们也被伽利略或荷兰大物理学家惠更斯（Christiaan Huygens, 1629-1695）这样的先知先觉所误导。我们高中第一学期曾经学过的没有阻

力的单摆运动是像一百年前上海资本家大亨家的客厅里那只时髦大挂钟下端的摆一样周而复始、来回不停的小幅摆动。在这种理想的小振幅情形下，十七世纪的实验物理学家们坚持不把摆动的角度改成它的正弦值这个精确数，只因为小角度的正弦值可以用测量角度的弧度值来代替，误差是微乎其微的。这样一来，万事大吉，正确的二阶非线性微分方程近似成简单的二阶线性微分方程，“非周期运动”的可能性就从这个忽略中溜走了。

如果我们的单摆可以摆动任意角度，惠更斯名垂青史的那个“摆的周期定律”就成了谬误。我们只好又回到那个精确的、基于牛顿力学的、包含摆动角度正弦的非线性微分方程。如果我们做一点点试验，把单摆的“初始角度”取得比较大，再给它某一些“初始角速度”，也许能见识到其他类型的摆动形式。几十年来，一些喜欢动动手玩玩游戏的混沌学家制作了基于摆的混沌装置，如太空球和球面摆，它们有时有条不紊地有节奏摆动着，有时却处于变化莫测的混沌运动之中。

庞加莱的获奖论文和那三卷大书奠定了现代天体力学和动力系统研究的基础，尽管他的众多想法要等几十年以后才慢慢地被一批“思考者”所领悟而进一步推进。他太超越一百年前的那个时代了。直到近半个世纪之后，由于第一个“遍历定理”的证明，第一台电子计算机的问世，成就了第一代的“非线性分析”的先驱们，从而兴起了后来者们混沌学研究的热浪。

（三）非线性分析的先驱

位于美国西南部靠近墨西哥的新墨西哥州的洛斯阿拉莫斯（Los Alamos）国家实验室是世界上第一颗原子弹诞生的摇篮。被公认为“原子弹之父”、第二次世界大战后曾任普林斯顿高等研究院院长的美国物理学家奥本海默（Robert Oppenheimer, 1904-1967）领导了这个代号为“曼哈顿工程”的原子弹研制工作。李政道（1926-）芝加哥大学博士论文导师、1938年在瑞典参加他荣获诺贝尔物理奖的颁奖仪式后即赴美国定居的意大利人费米（Enrico Fermi, 1901-1954），杨振宁在同系的博士论文导师、长寿的匈牙利人特勒（Edward Teller, 1908-2003），“电子计算机之父”、特勒的同胞冯•诺依曼，“氢弹之父”、波兰人乌拉姆（Stanislaw Ulam, 1909-1984），以及聪明绝顶而又风趣盎然、且于1965年成为诺贝尔物理奖得主之一的美国人费恩曼（Richard Feynman, 1918-1988）等物理学大家、数学天才聚集在奥本海默的周围，为了击溃法西斯、赢得二战胜利献出了他们的智慧。有点悲剧性的是这些极度爱国的科学家中那些直接接触过放射源的宝贵人才，如费米、冯•诺依曼和费恩曼，都患癌症英年早逝，就像中国的“原子弹之父”邓稼先（1924-1986）那样。


冯•诺依曼（1903-1957）

约翰•冯•诺依曼大概是上世纪全世界最聪明的数学家，让美籍德国物理学家、“曼哈顿工程”理论部主任、1967年诺贝尔物理奖获得者贝特（Hans Bethe, 1906-2005）感叹不已：

“冯•诺依曼这样的大脑是不是意味着存在比人类更高一级的生物物种？”

比冯•诺依曼大一岁并同在匈牙利一个精英中学相差一届毕业的魏格纳（Eugene Wigner, 1902-1995; 1963年诺贝尔物理奖获得者）终生对他似乎有一种近乎自卑的情结藏于心中：

“不管多么聪明的人，和冯•诺依曼一起长大就一定会有挫败感。”

虽然冯•诺依曼被视为“现代计算机之父”和“博弈论之父”，但他认为自己最重要的贡献都在数学上：希尔伯特空间的自共轭算子理论、量子力学的数学基础和以他名字命名的“冯•诺依曼平均遍历定理”。然而，在他临终前的美国首都华盛顿里德医院病房里，对现代数学几乎一窍不通的美国国防部正副部长、陆海空三军司令以及其他军政要员“围聚在他的病榻前，聆听他最后的建议和非凡的洞见。”

作为洛斯阿拉莫斯国家实验室的顾问，当时最受美国政府尊敬的数学家冯•诺依曼邀请了他终生的朋友和知音、比他小五岁多的另一位数学奇才斯坦•乌拉姆加盟洛斯阿拉莫斯。从此，这位不到二十岁就以证明无穷集合重要定理而留名数学史的神童和具有非凡创造力的理论家，就开始与物理学家为伍，一只脚从纯粹数学的天空跨进了应用学科的地盘。

和冯•诺依曼一样，乌拉姆也是犹太人，生于律师之家。在其1976年初版的自传《一个数学家的经历》一开头，他回忆到四岁时就对家中东方地毯的复杂图形着迷。十一岁前，当他目视着父亲书房内一本欧拉的书《代数》，那种“神秘的感觉”油然而生。在那个现在国际数学界已名闻遐迩的“苏格兰咖啡店”，年轻的乌拉姆和他的老师之一、现代数学分支“泛函分析”集大成者、二战结束时因长期饥饿和重病而壮志未酬的杰出波兰数学家巴拿赫（Stefan Banach, 1892-1945）等数

学师友们持续不停地提出、讨论、争执以及解决数学问题，其集体思维磨擦出的阵阵火花被他们及时地记录在著名的“苏格兰笔记”上。乌拉姆自己也经常惊奇“黑板或草稿纸上的一些乱涂会改变人类发展的进程”。

乌拉姆是科学计算中十分有用的“蒙特卡罗法”的提出者之一。他 1960 年出版的一本仅有 150 页的“小”书《数学问题集》是启迪跟随者们研究灵感的凝聚物。他的两本文集《集合、数及宇宙万象》和《科学、计算机及故友》，充满令人称奇的数学智慧和超越时代的科学思想。他无愧于去世后，世人慷慨赠与他的“贤者”（Sage）这一崇高称号。

正如冯 • 诺依曼的一位传记作者所说，招入乌拉姆是冯 • 诺依曼“对原子弹做出的两大贡献之一”。这两大贡献，一是找到了帮助洛斯阿拉莫斯实现数学化的快捷方式，二是爆聚炸弹。对于后者，在 1945 年 5 月德国投降后的 6 月 6 日冯 • 诺依曼写给乌拉姆的信中，他认为是乌拉姆的数学而不是其他的什么人做出了最大的贡献。信中说：

“当我听说物理学向集合论无条件投降时，特别高兴。我认为独特的问题就应该有独特的解决方法才对。尽管基地知识界鱼龙混杂，你几乎可说是这个想法之父。”

无独有偶，在几年后的氢弹研制中，乌拉姆再一次发挥了神奇的作用。1991 年再版的乌拉姆自传之后记中，他法国出生的太太弗兰科斯 • 乌拉姆回忆了令她牢记在心的 1951 年 1 月 23 日那一天中午：

“我发现他正在家中起居室表情奇怪地凝望着窗外的花园，说道，

‘我找到了一个让它工作的途径。’

‘什么工作？’我问。

‘氢弹’，他回答道。

‘这是一个全然不同的方案，它将改变历史的进程。’”

乌拉姆过世后，美国主流新闻杂志的悼念文章中说他“确实是氢弹之父”。乌拉姆和特勒在洛斯阿拉莫斯的上司贝特早在 1968 年就评述道：

“氢弹被造后，记者开始称特勒为氢弹之父。为了历史起见，我认为这样说更精确：乌拉姆是父亲，因他提供了种子；特勒是母亲，因他‘十月怀胎’。至于我，我猜我则是助产士。”

尽管笼罩在战时的紧张气氛之中，洛斯阿拉莫斯国家实验室自由、宽松的学术研究气氛，与乌拉姆的工作方式很合拍。他不必按时上下班，在帮助科学家、工程师们进行原子弹设计计算之余还可以继续他天马行空般的、与原子弹无直接关系的数学研究。

四十年代的中后期，随着冯 • 诺依曼帮助研制成功的第一台现代电子计算机的出现，方便而又快速的数值计算极大地帮助了创造型数学家的大脑思维，成了他们提出问题、解决问题的好帮手。作为最早接触现代计算机的数学家，在与像费米这样的大物理学家合作解决物理问题的过程中，冯 • 诺依曼、乌拉姆就和费米等人成了“非线性分析”这一集数学、物理、计算机等学科于一身的科学领域的开创者。

我们生活的世界在“时间”这位统帅的率领下昂首阔步地向前进，直到乐观主义者的“无穷远”，或到悲观主义者“世界末日”的有穷远为止。不管怎么样，天生具有好奇心的人类都想预测未来，甚至是最终的未来。一门新学科“非线性分析”由此而诞生，它不久也被称为“动力系统理论”。对于这门学科和后来的混沌学的联姻关系，乌拉姆曾戏称道：

“把混沌研究称为‘非线性分析’，好比是把动物学叫做‘非象类动物的研究。’”

非线性分析的目的主要是探索任何随时间而变化的量当时间走向无穷大时的最终性态。时间是一个连续的自变量，它对应的函数变量往往满足一个微分方程，就像十九世纪末期庞加莱研究三体问题以及二十世纪中叶洛伦茨预测天气变化用到的那些根植于牛顿力学的微分方程。研究微分方程那样的解当时间趋于无穷大时表现的那部分动力系统称为“连续动力系统”。为了把一些复杂的问题简单化一点，我们也可以把时间的长轴分成同等长度的无穷多个时间段，最方便的划分是让时间取所有的正整数值 1, 2, 3, 4, 5, … 。这样，微分方程解的渐近性态就成了“解在时间为 1 时的值”所定义的某个函数的逐次迭代之渐近性态。这就是被称为“离散动力系统”的另一个学科所要做的事。

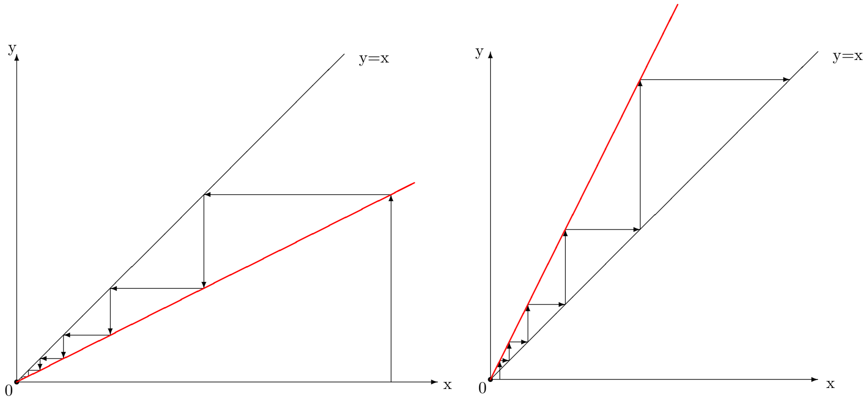
想象力丰富并且喜欢做“梦”的我国先秦时期的哲学家庄子（约前 369- 前 286）无意中曾经叙述了一个离散动力系统问题：

“一尺之锤，日取其半，万世不竭。”

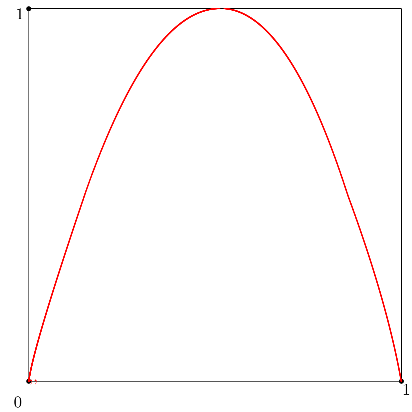
这不光包含了古人关于“无穷”的思想，而且，用离散动力系统的语言说，他所表达的问题就是从初始数 1 开始，每次除以 2，无穷次地除下去，最后的数将趋向于 0，这是该计算过程之前就可以预测到的未来结果。

在数学上，庄子的问题可翻译成迭代简单的线性函数 $f(x) = x/2$。中学生都知道，线性函数的图像是一条直线，这条直线和笛卡儿发明的 xy- 直角坐标系的东北 - 西南方向对角线有一个交点，这个交点的横坐标和纵坐标相等，所以该函数在这一点的值等于自变量的值，称之为函数的“不动点”。如果我们嫌计算函数迭代太花费时间，有一条“几何的快捷路径”可走：

首先在 x- 轴上代表初始值 x_0 的那个点沿着竖线走，直到和函数的图像相交，在交点处向左或向右转弯沿着横线走，一直走到和对角线相交，这个交点就代表第一个迭代点 x_1。然后从这点沿着竖线走，一直走到和函数的图像相交，在交点处向左或向右转弯沿着横线走直到和对角线相交，这个交点则代表第二个迭代点 x_2。如



函数迭代的几何途径法



逻辑斯蒂模型的图像

此走下去，我们就依次得到对角线上代表迭代点 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots$ 的一个点列。

把这个快速的几何方法用到一个线性函数，我们发现，随便从哪一个初始点出发，对角线上那些迭代点的序列要么趋向于函数图像和对角线的那个交点，要么越走越远，最终走到无穷远。无论如何，这些迭代点的最终性态是可以预测的，这可不是未来的混沌学家想要看到的那样。因而，线性函数的迭代是没啥可看的。幸运的是我们生活的世界几乎处处是非线性的。

对于非线性的函数，更有趣的现象纷至沓来。譬如说，冯•诺依曼曾经建议用如下的简单方法来产生区间 [0, 1] 上的随机数：任取一个六位小数，平方一下，再砍掉小数点后的前六位数字，得到下一个六位小数。重复同一过程就得到一列随机数。这相当于无穷次迭代非线性函数 $f(x) = 1000x^2$ (mod 1)，其中括号内的符号意思是砍掉函数值结果的整数部分。

对于一般的非线性函数，早在 1931 年，在不到 30 岁那几年已经硕果累累的冯•诺依曼就证明了第一批遍历定理中的第一个。这就是被他自己视为一生中三大数学贡献之一的“冯•诺依曼平均遍历定理”。受他工作的灵感启发，美国本土成长的哈佛教授伯克霍夫很快证明了“伯克霍夫逐点遍历定理”，并抢先一步发表，这让解决问题太快的冯•诺依曼有点儿自责：为什么自己不多走几步呢？这些第一代遍历定理大致是说，如果无穷次地迭代一个“遍历”的非线性函数，迭代点序列访问“相空间”内某一区域的频率恰恰等于这个区域关于整个空间的相对大小。这个事实简称为“时间平均等于空间平均”，从而奠定了统计力学中不太坚实的“波尔茨曼（Ludwig Boltzmann, 1844-1906）遍历假设”之严密的数学基础。可惜这位现在看来越来越伟大的奥地利物理学家再也不能破涕为笑了，因为早了四分之一个世纪他就因长期忧郁而最终自缢身亡。

1947 年，乌拉姆和冯•诺依曼研究了当今已成为混沌学这个学科中最有名气的混沌函数之一、所谓的“逻辑斯蒂模型” $f(x) = 4x\,(1\text{-}x)$。这是一个初中生都认识的二次多项式函数。它的函数图像是个开口朝下的抛物线。因为当 $x = 0$ 或 $x = 1$ 时函数值都等于 0，这个抛物线通过 xy- 直角坐标系中 x 轴和 y 轴的交点，称为直角坐标系的原点，和 x- 轴上位于原点右边与原点相距为 1 的那个点。更进一步地细看，这个抛物线顶点的横坐标为 $x = 1/2$, 纵坐标为 $y = 1$。所以当自变量 x 限制在 0 和 1 这两个数之间时，对应的函数值也位于 0 和 1 之间。这样一来，函数 f 把线段 [0, 1]“映入”到它自己之中，即 x 属于区间 [0, 1] 隐含着 $f(x)$ 也属于 [0, 1]。

于是，闭上眼睛在 [0, 1] 区间中随机地捡一个数 x_0，我们可以不断地迭代函数 f，得到位于 [0, 1] 区间上的一系列数。我们可以设想 f 是一个“函数机器”，它输进的“毛胚”是自变量值 x，输出的“产品”是对应的函数值 $f(x)$。迭代函数就相当于不断地把当前的函数值再输回到函数机器内得到下一个函数值。如此循环地做下去，我们就得到下面的无穷点列：

$$x_0,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(x_2),\ x_4 = f(x_3),\ \cdots 。$$

乌拉姆和冯•诺依曼知道这些迭代点依次在线段 [0, 1] 上像俄罗斯作曲家柴可夫斯基（Peter Ilyich Tchaikovsky, 1840-1893）的芭蕾舞剧《天鹅湖》中的可爱白天鹅那样翩翩起舞，跳来跳去。它们会像波兰伟大的爱国钢琴家肖邦（Frederic Francois Chopin, 1810-1849）的指尖在琴键上弹奏出他那大气磅礴的钢琴曲“革命”吗？

乌拉姆和冯•诺依曼想知道这些看上去无序排列的迭代点是否在某种意义下“有序”。这个意义就是或然率，在数学上它有一个专门化的名词：概率。

概率的问题到处可见。乌拉姆的祖国同胞和“非线性分析”的接棒人、已故波兰科学院院士洛速达（Andrzej Lasota, 1932-2006）这样讲概率：

“你准备离开一间屋子时，你出门的时侯有可能前后相差一分钟。随着时间的推移，又有不同的概率及可能发生的事要去考虑。比如，有百分之十的可能，你会发生车祸，而被送往医院；或许，有百分之十的机会，你会遇见从未谋面的漂亮女子，而深深为之倾倒，一切皆是偶然。所以事情会演变得愈来愈复杂，所有的事都牵涉到概率。”

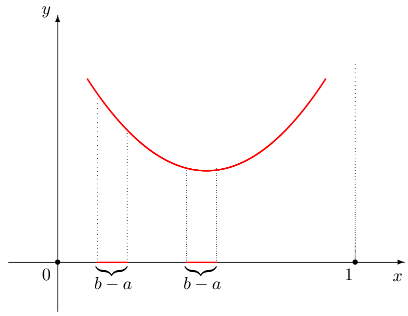
故有人曾经略微夸张地宣称：数学是概率的一部分。

乌拉姆和冯•诺依曼考虑了如下的概率问题：任取 $[0, 1]$ 区间内的一个子区间，记为 $[a, b]$，这些迭代点的无穷序列的每个点跳进这个子区间的总的或然率为多少？算出或然率，就要先算出总数为有限的点列中符合要求的那些点出现的频率。假如 10000 个点中有 4000 个点进入 $[a, b]$ 子区间，那么频率就是前一个数被后一个数除，等于五分之二。同样的道理，在

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \cdots,\ x_{n-1}$$

这 n 个点中，若有 k 个点进入 $[a, b]$ 子区间，那么进入该子区间的点的频率为一个分数 k/n。所有迭代点中进入 $[a, b]$ 子区间那些点的或然率就等于 当 所有迭代点的个数 n 越来越大直至无穷时，对应的频率值愈来愈趋近的那个数，如果这个“极限”数的确存在的话。

乌拉姆和冯•诺依曼发现，对所有的子区间 $[a, b]$，这些概率值不光存在，而且等于位于 $[a, b]$ 上方的一个“曲边矩形”的面积，并且对于“几乎处处”所取的初始点 x_0 都一样，即概率值只依子区间而定，而与初始点的选取无关。这个矩形的上边是一条形状像下垂的绳子的曲线，该曲线是他们找到的“概率密度函数” $y = 1/\{\pi[x(1-x)]^{1/2}\}$ 的图像。



概率密度函数 $y = 1/\{\pi[x(1-x)]^{1/2}\}$ 的图像

因此，乌拉姆和冯•诺依曼告诉我们：“无序”排列的迭代点列在概率的意义下可以是“有序”的。

从这个密度函数图像的形状可以看到，它在左边半个区间上是“递减函数”，像下山，在右边半个区间上是“递增函数”，像上山。并且当 x 的值越靠近 0 或 1 时，函数值越来越大，最后趋向无穷大。由此可知，区间 $[0, 1]$ 内两个小区间，即便有同样的长度，若一个比另一个更靠近 $[0, 1]$ 的两个端点之一，则它对应的曲边矩形的面积比另一个大一点，因而迭代点序列进入第一个小区间的概率比第二个小区间的更大。这说明逻辑斯蒂模型这个二次多项式函数的迭代点序列在区间 $[0, 1]$ 上不是“一致分布”的：在区间两端点旁比中央部分聚集着更多的点。如果好奇心强的读者还想看看这些点到底是怎样密密麻麻地分布的，可以进入美国波士顿大学数学系教授、斯梅尔（本文第五节将要遇到的拓扑动力系统开山祖师爷）的弟子中动力系统教科书写得最多的蒂凡尼（Robert L. Devaney, 1948-）的“动漫网站”（http://math.bu.edu/people/bob），去亲手体验函数迭代的乐趣。

这是乌拉姆和冯•诺依曼的非线性分析在数学分支遍历理论的花园中为我们采集的一朵绚丽的小花。遍历理论研究“确定性”动力系统诸多的概率统计性质，是集测度论、泛函分析、拓扑学、近世代数等知识于一身的综合性纯数学科目，同时也在物理、生命科学和工程科学中应用广泛，如统计物理、电子线路，以及与我们日常生活密切相关的无线电话，甚至目前最有人气的网络搜索引擎谷歌（Google）的研究也用到它。

然而，非线性分析的星星之火并没有很快在科学的茫茫大地上燎原开来，直到十年后一位终生喜爱天气的美国人无意中点燃了新的火种。

（四）蝴蝶效应

天气预报是个古老并与我们的日常生活密切相关的问题。我们每天都要看看天气预报以决定出门是否带伞。远古时代的天气预报大概主要靠猜或根据经验，故传统的方式不太像科学，更像感官性的技术。现代天气预报基于求解描述大气运动的微分方程组。理想的情况是我们能够预报长期的天气走向。如果能知道明年的今天天气是怎么样，那多么好啊，但是中央电视台的天气报告员就要伤心难受，因为饭碗可能要丢。这个科学幻想小说中可能描绘过的美好前景能够实现吗？

上世纪在非数学的领域中对全人类可能贡献最大的纯粹数学家冯•诺依曼是天气预报的乐观主义者。在他短暂的五十三年寿命最后的几年中，牛顿式决定论哲学思想占据着他智慧的大脑，这一思想是由法兰西皇帝拿破仑•波拿巴（Napoleon Bonaparte, 1769-1821）十六岁时在军事学校的考官拉普拉斯（ Marquis Pierre-Simon de Laplace, 1749-1827）发扬光大的。冯•诺依曼认为描述天气的方程就像描述行星的方程一样，都由牛顿力学确定，既然彗星能被精确预见多少年后再次光临，天气为什么不能被精确地预报呢？不光如此，他热情地展望，随着大规模科学计算的可能性跟随着计算机的发展接踵而至，人工控制天气的

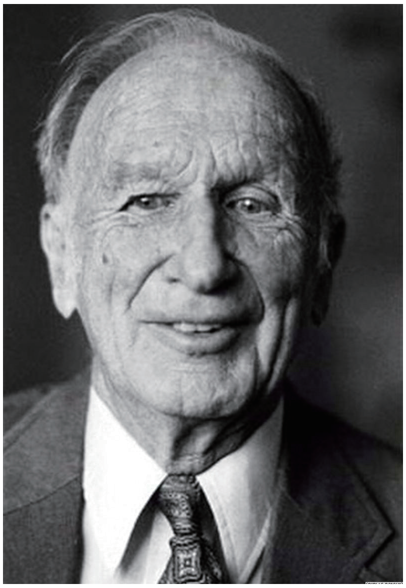
美好时代也将会随之到来。

天气变化是一个复杂的过程，但它被流体力学的基本定律支配着。天气预报依赖的是求解对应的偏微分方程组，它们的解是温度、气压、风速等这样的函数变量，它们以时间及其地球表面上空一定高度内所有点的三个坐标数作为自变量。要确定从某个初始时刻起以后依赖于时间和空间位置的天气变化的方程解，我们必须知道在那个初始时刻的温度、气压、风速等的空间分布。而这些初始数据可以通过密布全球的观测站收集。所谓的数值天气预报，就是数值求解偏微分方程组离散化后的代数方程组，观测资料越多，这些方程组的尺寸就越大，天气预报的准确度也就越高。但这在现代计算机出现之前的几百年间是难以做到的。

自从冯•诺依曼五十年代初在位于美国新泽西州的普林斯顿高等研究院造出第一台计算机，他就立下矢志，让越来越强大的计算机成长为一位“人造的英雄”，为天气预报以及更进一步控制天气发挥重要作用。真可惜，他千万没有想到，操纵天气变化的微分方程内在的性质即将扮演着反英雄的角色，让他所有的雄心壮志化为乌有。

1961 年冬季的一天，爱德华•洛伦茨（Edward Norton Lorenz, 1917-2008）教授像往常一样地走进他任教的美国麻省理工学院气象系的办公室，继续用他的那台 Royal McBee 型的简陋计算机来计算与天气预报有关的三个简单非线性微分方程的初值问题的数值解。

洛伦茨 1917 年出生于美国东北部新英格兰地区的康涅狄格州西 Hartford 市，从小就是一个气象迷，每天都在他家房子外面注视那个测量气温的温度计上的记录。他先后在达特茅斯学院和哈佛大学学数学，分别获得学士和硕士学位。在第二次世界大战中的 1942 年直至战后的 1946 年，



爱德华•洛伦茨（1917-2008）

他如愿以偿地成为美国空军的一名气象预报员。二战结束后，他又回到了学校读书，兴趣自然转向到气象学研究，故决定学气象，并从麻省理工学院拿到这个领域的两个学位，包括 1948 年的博士学位。他最终成了这所名校的气象学教授。

一年前，也就是 1960 年，洛伦茨选择数值天气预报方程时，选取了十二个微分方程来决定十二个变量，用计算机来模拟天气。一打方程，对于当时的计算机计算起来还是有点多。最后，他决定从耶鲁大学某个教授研究过的一组七个方程中选出三个，这些方程描绘流体的对流运动，即受热流体的上升运动，就像当我们夏天走在被太阳烤热的柏油马路上看到的冉冉升起的气流那样。这三个方程是非线性的，却是十分简单的非线性，只有二次项出现，并能对他制造的“玩具天气”令人信服地模拟。

这一天，与往常一样算了一阵子之后，为了去喝咖啡，洛伦茨暂停了计算，只是把计算机终端上的数据抄了下来，作为再次计算的初始数据输入计算机，然后他穿过大厅下楼喝咖啡去了。

一小时之后他回到办公室，十分吃惊地看到计算机并没有精确地重复老结果，这不是理所当然的事。照理说，程序一样，初始值一样，输出结果也应该一样。难以理解的是，他发现新的计算结果同上一次的计算结果随着时间的推移迅速偏离，面貌全非。不到几个“月”时间，“天气”完全不一样了。严谨而又细心的他将信将疑地重新算了几次，类似的现象在反复试验中总是出现。他的脑海里立刻闪过一个念头：计算机坏了。

但是，计算机完好无缺。一霎那，洛伦茨明白了。这个伟大的理解，借用格莱克的语句，“播下了一门新科学的种子。”

原来，计算机内存中的数据保持六位小数，输出时为了节省空间，只打印了四舍五入后留下的三位小数，比如 0.123456 打成 0.123，0.456789 打成 0.457。他喝咖啡前抄下的数据只有三位小数，与旧的计算结果仅仅相差不到千分之一而打进计算机的初始值，新的计算结果和原先预期的计算结果就会大相径庭，这真是奇怪的现象，与人们通常的观念相悖。

通常的观念是：小的输入误差导致小的输出误差。这是一切物理、几何测量的依据。任何测量都有误差，但只要误差足够小，结果就足够精确。譬如要算出一个正方形的面积，经验告诉我们，只要边长量得足够仔细，算出的面积就足够满意。

但是，小的输入误差也会导致大的输出误差。如果我们用天文望远镜来观察月亮上的一个物体，望远镜仰角极小的增加就会把我们的视线落在另一个相距甚远的目标上。这是因为地球和月亮之间的距离，作为角度测量误差导致弧长误差的“放大因子”，是太大了。

即便放大因子不太大，重复不断的放大也会“聚沙成塔、集腋成裘”。

让我们做个简单的数学实验。随便取一个 0 和 1 之间的数，加倍一下。如果结果还在 0 和 1 之间，就得到下一个数，再做同样的事;如果结果比 1 大，就砍掉它的整数部分，得到下一个数，再做同样的事。如此周而复始，给出一个迭代过程，所有的迭代点都落在 0 和 1 之间。

这个迭代产生的数列的每一个数都是前一个数乘以 2，再去掉整数部分。例如，如果第一个数是 0.1，那么它后面的数为 0.2，0.4，0.8，0.6，0.2，等等。如果第一个数有了 1% 的误差，那么第二个数的误差就为 2%，第三个数的误差为 4%，以后依次为 8%，16%，32%，64%，等等。我们看到，第七个数的误差就比初始误差放大了 $2^6=64$ 倍。

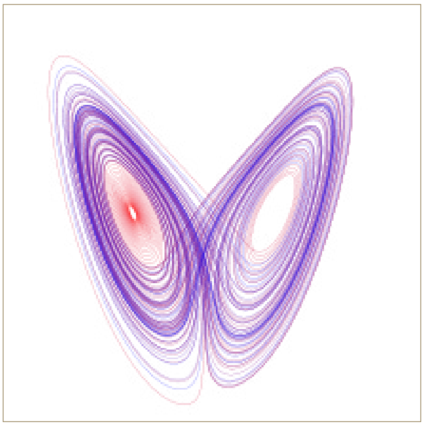
洛伦茨在他的计算中看到了这种“对初始值的极端敏感性”。他终于领悟到这一异常现象根植于天气预报所依赖的微分方程组的这个内在特性，而不是什么计算过程中的舍入误差在作怪。后来，在他写的《混沌的本质》这本有中文译本的书里，他再一次回忆到他当时的想法：

“如果实际大气的形态像这一简单模式的话，那么长期天气预报将是不可能的。温度、风以及其他和天气有关的量，确实不能精确地测量到三位小数。即使能够这样，但在观测点之间进行内插也不能达到类似的精确度。我有些激动，并且很快将我的发现告诉了一些同事。最终，我确信小的差别的放大是缺乏周期性的原因。”

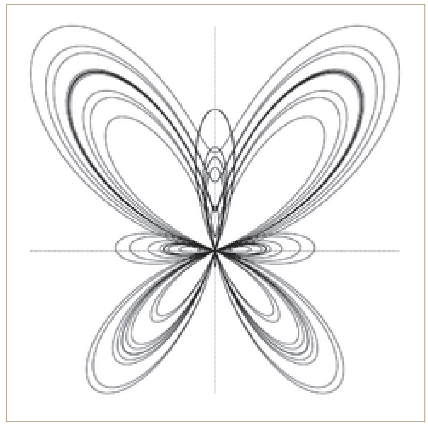
洛伦茨由此得出结论：

“一个确定性的系统能够以最简单的方式表现出非周期的形态。”

洛伦茨把他的发现和分析写成了论文“确定性的非周期流动”，发表在《大气科学杂志》1963 年的第 20 卷上。日后，他把这一现象形象地比喻成“蝴蝶效应”，用在了他 1979 年 12 月 29 日在美国科学促进会的演讲题目：“可预见性：一只蝴蝶在巴西扇动翅膀会在得克萨斯引起龙卷风吗？”



蝴蝶效应



费的蝴蝶图像

天气预报的蝴蝶效应由于格莱克 1987 年那本面向大众的国际畅销书《混沌》而成为路人皆知的一个形象说法、一个专用名词。美国南密西西比大学数学系的费（Temple H. Fay, 1940-）教授找到一个简单的三角函数，用极坐标画出的图像看上去是一只美丽绝伦的蝴蝶。他的漂亮作品发表在 1989 年 5 月期的《美国数学月刊》（The American Mathematical Monthly）上（见维基百科网页 http://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_curve_(transcendental)）。

约克对“不可预测性”的概念也有过形象的说明：

“生命中是充满着小改变导致大变化的情形。例如说车祸，假如人们早个或晚个十秒钟出门，或许就可避免一场车祸。所以小小的改变可以导致很大的变化。”

这也体现在中国的成语“差之毫厘，谬以千里”之含义中。“控制论之父”、美国第二个“国家科学奖”的获得者维纳（Norbert Wiener, 1894-1964）曾引用过这样的一首民谣：

钉子缺，蹄铁卸；
蹄铁卸，战马蹶；
战马蹶，骑士绝；
骑士绝，战事折；
战事折，国家灭。

它十分形象地描绘了日常生活和社会变革中随手拈来的混沌现象。

在自然科学领域，混沌现象的发现与相对论、量子力学一起被一些科学家们誉称为二十世纪物理学上的三大革命。混沌这门学科的第一次国际会议 1977 年颇具意义地在文艺复兴时代的发源地意大利召开。大会组织者之一、美国佐治亚理工学院的物理学家福特（Joseph Ford, 1927-1995）说：

“相对论除去了绝对空间与时间的幻想，量子力学清扫了可控测量过程的牛顿梦，而混沌学则宣告了拉普拉斯决定论式可预测性的幻灭。”

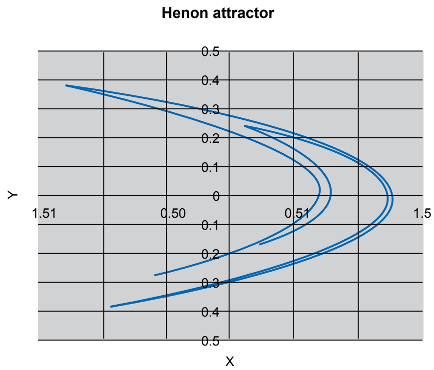
劲头十足的动力学家们继续研究混沌。法国庞加莱未竟事业的继承人之一、在巴黎郊外那个可视为美国普林斯顿高等研究院对等物的高等科学研究所钻研数学和远足探险并举的物理学家茹厄勒（David Ruelle, 1935-）和他的访问者、荷兰数学家塔肯斯（Floris Takens, 1940-2010）1971 年发现令人生畏的湍流与充满混沌的一种他们命名为“奇异吸引子”（Strange Attractor）的几何结构有关。他们的题为“湍流的本质”这篇论文，虽然全是数学风格，充满定义、定理和证明，却给了求解这一物理难题一个全新的视野。

所谓“奇异吸引子”是指一个动力系统的解曲线最终被一个混乱的吸

引子吸去了。也就是说，若我们跟随这些曲线走，最后会趋近于一团混乱的状态，毫无规则可寻。这种奇异现象在二维空间的微分方程里不会发生，这是因为庞加莱 - 本狄克森（Ivar Otto Bendixson, 1861-1935）定理所致：在二维平面内，从任一点出发并不能自我相交的有界的一维解曲线，就像那些极权专制国家的人民那样无甚自由度，无处可跑，只好趋向于一个平衡点或称之为“极限环”的一条闭曲线这个周期解。在像洛伦茨所碰到过的三维或更高维的微分方程，空间的自由度加大了，颇像自由的公民享用的民主政治，解曲线可以肆无忌惮、见缝插针地到处乱窜，就有可能产生“奇异吸引子”。

一下子奇异吸引子成了引人入胜的热门话题。研究者们，包括美国的威廉斯（Robert F. Williams, 1927-），首先对准了洛伦茨那个名气最大的天气模型。洛伦茨在他 1963 年的论文里附了一张像无穷大符号“∞”的图，看上去也像阿拉伯数字 8 夜间躺下睡觉的样子，右边只有两条曲线，而左边有五条，这是他的微分方程组的解作为“运动的点”在“相空间”的一部分轨迹，是 500 次相继计算的结果。这个图看上去也像蝴蝶的一对翅膀，这是否已经预测了他未来的蝴蝶效应这一说法？

实际上洛伦茨画出的只是茹厄勒和塔肯斯所发现的奇异吸引子的最初几根线条。虽然洛伦茨已经看到了比他图中画的更多的东西，但他仍对这个扑朔迷离的“一团麻线”难以想象。这个吸引子是稳定的和非周期的，它像螺旋线般的无穷多个环线永远不与自己相交，但在有限空间里宛如一只惊恐的小飞虫在两对蝴蝶翅膀之间随机地乱飞，忽上忽下、忽左忽右，行踪像魔鬼一样地飘忽不定。当茹厄勒十年后得知洛伦茨的工作提供了他自己理论的一个实际模型时，其惊讶和



埃依映射 $h(x, y) = (y + 1 - a x^2, b x)$ 的奇异吸引子

激动的表情是可想而知的。

虽然洛伦茨没有明确地定义混沌的精确意思，但作为继庞加莱之后第一个揭示自然界的不可预测现象的科学家，他被广泛地尊崇为“混沌之父”，获得了像日本“京都奖”这样的许多荣誉。他的那篇划时代论文，成了十年后点燃“李 - 约克混沌”概念思想火花的“火花塞”。

沿着气象学家洛伦茨的道路，一些使用非线性微分方程的工程学家继续在“混沌的家族”中添砖加瓦。加州大学伯克利校区电子工程与计算机科学系的菲律宾华裔教授蔡少棠（Leon Ong Chua, 1936-）1983 年以他发明混沌的“蔡 - 电路”而一鸣惊人，而从 2010 年起接替他担任《国际分支与混沌杂志》主编的香港城市大学电子工程系讲座教授陈关荣（1948-）也以他 1999 年作为洛伦茨系统之“对偶物”的混沌“陈 - 系统”而享誉工程界。他也是国际上“混沌控制”学说的早期开拓者之一和“混沌反控制”理论的创始人。2008 年以他为首的研究小组获得中国“国家自然科学奖”的二等奖。对经典的三体问题推广之后的“多体问题”有诸多贡献的美国数学家萨内（Donald G. Saari, 1940-）2001 年甚至出版了名叫《混沌选举》的一本学术专著。（顺便提一句，他优秀的中国学生夏志宏（1962-）在其 1988 年

徐悲鸿笔下的“骏马铁蹄”

的博士论文中解决了关于多体问题的一个百年猜想。）

有趣的是，蔡少棠的大女儿蔡美儿（生于虎年，现为耶鲁大学法学院讲座教授）在 2010 年出版了一本回忆为母十八年的书《虎妈妈的战歌》，其中记载的对一双女儿苛刻要求的“十不准”原则引发了东西方“育儿经”孰是孰非讨论的“天下大乱”：赞美之、诅咒之、理解之、茫然之、笑纳之、悲泣之，不一而足。这本新作在读者大众中激起的混沌程度绝不亚于她已经颐养天年的老爸当年创造的混沌电路！

整个六十年代，关于混沌还有一点零星的其他发现，如法国的天文学家埃依（Michel Henon, 1931-）研究了银河系的轨道，并以一类“埃依映射”这一平面映到自身带两个参数的混沌变换留名。但是，只有眼光敏锐、思想深邃的数学家们试图从整体上来理解不规则行为的真正原因。这样的洞察好像让我们再次看到了中国大画家徐悲鸿（1895-1953）笔下的“骏马铁蹄”。

未完待续

网上学数学

杨经晓

开头语

近年来国内公众在网上学习大学公开课形成热潮。作者一直留意网上的数学视频资源，直到去年，大学的数学课程还不齐全，今年突然发现数学视频资源增加很快，已经形成比较齐全的大学数学视频课程体系，而且课程数量还在迅速的增加。这些课程大都是免费开放，只要能上网，任何人都可随时随地学习。对于数学爱好者来说，这在以前还是很难想象的事。作者对网络上的数学视频资源进行了搜索和整理，写成此文。希望把网络上这些丰富的数学视频推荐给对数学有兴趣的校外数学自学者，期望对数学文化的传播和数学知识的普及有所帮助。文中的数学文化传播思想来源于刘建亚教授。有关数学教育的思想也深受《数学文化》杂志的启发。张英伯教授的《发达国家数学英才教育的启示》一文及王元、丁玖教授对人才培养的文章，令人耳目一新，引来很多回味和沉思。这些思想在国内的刊物上还不多见，通过《数学文化》的传播，这些先进的教育理念一定能在国内数学教育领域开花结果。

数学学习的传统方法是在校学习或是读书自学，而近几年一种网络视频数学教学在国内悄然兴起。只要有一台连接互联网的计算机，通过网上的数学视频课程，即使你身处边远地区，或因家境贫困无法上学，也能足不出户坐在家中接受国内外名校名师的授课，免费完成从小学到大学的数学课程学习，圆你的上大学梦。如果你想与人交流，网上的数学论坛、博客中有众多学者和网友帮你答疑解惑。如果你无意数学课程学习，网上还有许多讲座和制作精美的科普记录片，使你在视听享受中提高数学科学素养。互联网上海量的数学学习资源和分布全球的网友形成了开放式网络数学学习空间，遨游其中，可尽情探索数学知识宝库中的奥秘。

1 网上学习系统

网上学习对物质条件要求不高，所需要的仅是一台连接互联网的计算机（图1）。学习者使用笔记本或台式计算机以及各类网络终端设备，经有线宽带或无线（WiFi、3G）宽带接入互联网。在线或下载后观看教科书与教学视频，完成数学课程的学习。

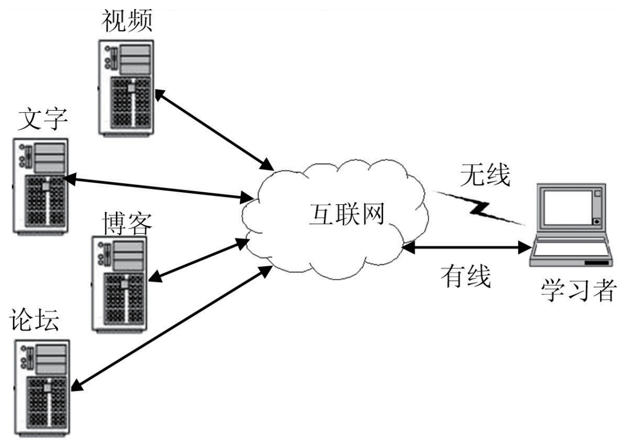


图 1 网络学习系统设备构成

网络学习所需投资就是购置电脑和宽带上网资费。网络学习对电脑的硬件配置要求不高，普通的平板电脑、便携或台式电脑、大屏幕智能手机都可以。笔者用的是一台价值几百元的康柏 Evo N400c 笔记本电脑（12英寸显示器，主频 850MHz 的奔腾 III 的 CPU，512M 内存），除执行多任务稍慢外，10M 的宽带下载和标准高清的视频播放均无问题。宽带上网分为有线宽带和无线宽带（3G 或 Wifi）。北京和广州已开始提供免费无线宽带上网服务，未来会有更多城市加入其中。

2 网上免费数学教学资源

互联网上的数学资源分为文字和视频两类（表1）。其中文字资源包括电子书籍、电子期刊、博客、论坛。常用的中外文数学书籍都可从网上免费下载，组建自己的电子图书馆。视频资源包括从小学到大学的教学课程、学术讲座、传记或记录片。由于网络学习多以视频为主，因此本文主要介绍视频资源。

表 1 互联网数学学习资源

项目		来源
文字资源		爱问共享资料 (ishare.iask.sina.com.cn)，VeryCD 网 (www.verycd.com)
视频资源	开放课程	国家精品课程资源网 (video.jingpinke.com)， 麻省理工学院数学开放课程 (ocw.mit.edu/courses//physics)， 台湾交通大学理学院开放课程 (ocw.nctu.edu.tw/riki_list.php?gid=1)， 网易公开课 (v.163.com/open)，新浪公开课 (edu.sina.com.cn/video/open/)，搜狐公开课 (tv.sohu.com/open/)
	视频网站	优酷 (www.youku.com)，土豆网 (vwww.tudou.com)，VeryCD(www.verycd.com)， 百度贴吧 (tieba.baidu.com)，超星学术视频 (video.chaoxing.com/)， 汗学院 (www.khanacademy.org) 等
资源搜索	文字	爱问共享资料 (ishare.iask.sina.com.cn)，VeryCD 网 (www.verycd.com)，百度文科 (vwenku.baidu.com)， 数学学科网络资源导航 (www.mathlib.nankai.edu.cn/DaoHang/catalog.htm) 等
	视频	百度 (video.baidu.com)，谷歌 (video.google.com) 等

3 中小学数学视频课程

在视频网站上有大量中小学数学教学视频课程。表 2 列出了部分国内中小学视频资源。

表 2 中小学数学视频课程

类别	课 程	网 址
小学数学	北京师范大学小学数学 (165 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_3286197.html
	人教版小学数学 1 年级上册 (39 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4743800.html
	人教版小学数学 1 年级下册 (32 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4743719.html
	人教版小学数学 2 年级上册 (26 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4708774.html
	人教版小学数学 2 年级下册 (31 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4743551.html
	人教版小学数学 3 年级上册 (33 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4742295.html
	人教版小学数学 3 年级下册 (35 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4742999.html
	人教版小学数学 4 年级上册 (34 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4744440.html
	人教版小学数学 4 年级下册 (31 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4744463.html
	人教版小学数学 5 年级上册 (39 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4744534.html
	人教版小学数学 5 年级下册 (49 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_5081293.html
	人教版小学数学 6 年级上册 (43 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4744715.html
	人教版小学数学 6 年级下册 (29 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4745073.html
	小学数学学习方法指导	www.youku.com/playlist_show/id_5081293.html
	小学奥数教程一至六年级 (6CD)	www.verycd.com/topics/65141/
	名师导学之挑战小学奥数 (5 CD)	www.verycd.com/topics/64812/
初中数学	初中数学 (88 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_2850159_ascending_1_mode_pic_page_1.html
	人教版初中数学七年级上册 (21 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_3872025.html
	人教版初中数学七年级下册 (23 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_6499277.html
	人教版初中数学八年级上册 (12 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_3872046.html
	人教版初中数学八年级下册 (21 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_6499176.html
	人教版初中数学九年级上册 (21 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_3872377.html
	人教版初中数学九年级下册 (19 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_6499137.html
高中数学	高中数学 (129 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_5386442_ascending_1_mode_pic_page_1.html
	人教版高中数学 (78 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_6449145.html
	高中数学教程 (163 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_2232010_ascending_1_mode_pic_page_1.html
	高中数学辅导 (205 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_61729.html
	高中数学教育网校视频 (164 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_5049292_ascending_1_mode_pic_page_1.html
	高中数学 (61 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_1070393.html
	人教版新课标高中数学必修 1(17 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_3908658.html
	人教版新课标高中数学必修 2(17 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_2450725.html
	人教版新课标高中数学必修 3(18 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_3908662.html
	人教版新课标高中数学必修 4(16 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_6040917.html
	人教版新课标高中数学必修 5(13 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4507771 html
数学教育	小学数学教学论，西南大学周玲 (18 讲)	222.178.184.135/sort.asp?typeid=1716
	中学数学课堂教学案例分析，西南大学李忠如 (20 讲)	222.178.184.135/sort.asp?typeid=885
	中学数学课堂教学设计，西南大学刘静 (20 讲)	222.178.184.135/sort.asp?typeid=1755

4 大学开放数学课程

2001 年麻省理工学院（MIT）启动开放课程（也称公开课）“MIT OpenCourseWare”项目，将大学课程上网（图 2），拉开了免费大学网络教育的帷幕。2006 年成立了 OCW 联盟，联合了包括我国在内的 20 多个国家的 200 多个高校，通过互联网向全球提供视频教学课程，实现大学教学资源的免费共享。其中 MIT 上网的课程已达 2000 多门。我国从 2003 年开始实施大学精品课程计划，制作了大量名师的教学录像。2011 年 11 月，教育部从众多精品课程中精选了 20 门课程免费对社会开放（图 3），今年计划上网课程 100 门，“十二五”期间，开放课程总数将达 1000 门。为了促进国内外名校开放课程在国内的传播，互联网门户网站网易公司投巨资用于上百门国外开放课程的翻译和字幕制作，并于 2010 年 11 月推出网易公开课。上线后即受到网民追捧，点击率直线上升，目前日均在线观看人数约 130 万。此后新浪、搜狐等网站也竞相推出自己的公开课网站，互联网上出现了公开课热。台湾在 2008 年成立了台湾开放式课程联盟（TOCWC），目前已有 27 所大学参加。其中台湾交通大学开放了大量大学数学课程（图 4）。除大学和政府机构外，专业公司也是大学视频课程制作的主力军。国内的超星公司制作了五千多位名师的六千多门学术讲座和大学视频课程，其中包括了很多数学讲座与大学数学课程（图 5）。

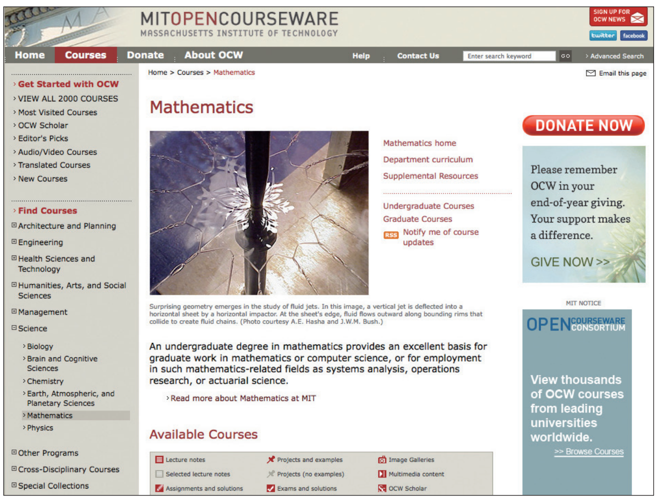


图 2 麻省理工学院数学开放课

图 3 国家精品课程网站

图 4 台湾国立交通大学数学开放课程

图 5 超星学术视频数学课程

随着大学开放数学课程的增加，目前网上已经形成基本完整的大学数学教学课程。表 3、表 4 分别列出了非数学专业和数学专业大学数学视频课程。完成这些课程的学习，可掌握数学的基本知识，也为以后深入学习和研究奠定基础。

表 3　非数学专业的大学数学视频课程

课　程	主　讲	网　址
高等数学	北京航空航天大学柳重堪 (117 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_1914631.html
	南开大学蔡高厅 (189 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_1303385.html
高等数学 (上)	西安交通大学李焕琴 (125 集)	video.chaoxing.com/playvideo-56660.html
高等数学 (下)	西安交通大学李焕琴 (118 集)	video.chaoxing.com/playvideo-56785.html
单变量微积分	麻省理工学院 David Jerison(35 讲)	v.163.com/special/sp/singlevariablecalculus.html
多变量微积分	麻省理工学院 Denis Auroux(35 讲)	v.163.com/special/opencourse/multivariable.html
微积分重点	麻省理工学院 Gilbert Strang(18 讲)	v.163.com/special/opencourse/weijifen.html
线性代数	大连理工大学施光燕 (12 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_2971742.html
	麻省理工学院 Gilbert Strang(34 讲)	v.163.com/special/opencourse/daishu.html
微分方程	台湾交通大学徐雍鑾 (15 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=191&cgid=5
概率论与数理统计	上海交通大学熊德文 (34 讲)	v.youku.com/v_playlist/f3727414o1p0.html
随机过程	中科院研究生院孙应飞 (43 讲)	www.verycd.com/topics/2845332/
	华中科技大学刘澍 (28 讲)	www.verycd.com/topics/2798480/
工程数学 (一)	台湾交通大学白明宪 (26 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=52&cgid=5
工程数学 (二)	台湾交通大学白明宪 (31 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=53&cgid=5
工程数学方法 II	麻省理工学院（21 讲）	v.youku.com/v_playlist/f3628328o1p0.html
数学物理方法	武汉大学姚端正 (53 讲)	www.verycd.com/topics/2780037/
	北京师范大学陈黎 (50 集)	video.chaoxing.com/videoinfon-2260.html
应用泛函分析	科罗拉多大学 Greg Morrow(29 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_3859109.html
应用数学	台湾中山大学周雄 (102 讲)	ocw.nsysu.edu.tw/files/11-1059-5407-1.php
微分几何在相对论中的应用	北京师范大学梁灿彬 (169 集)	www.ssvideo.cn/playvideo.asp?id=57579
化学应用群论	台湾交通大学朱超然 (14 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=237&cgid=5
运筹学	吉林大学李时 (38 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4134105.html
	清华大学蓝伯雄 (40 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_6343998.html
	同济大学 (29 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4134105.html
作业研究 (一)	台湾交通大学王晋元 (30 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=48&cgid=5
作业研究 (二)	台湾交通大学王晋元 (27 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=49&cgid=5
离散数学	上海交大黄林鹏 (35 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_1199658.html
	北京交通大学胡俊 (20 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4246911.html
	中科院研究生院高随祥 (27 讲)	www.verycd.com/topics/2866849/
	吉林大学 (68 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_2026088.html
时间序列分析	中科院研究生院张建方 (28 讲)	www.verycd.com/topics/2845333/
数值分析	中科院研究生院肖良 (20 讲)	www.verycd.com/topics/2834723/
数值计算方法	中国农业大学陈研 (46 集)	video.chaoxing.com/playvideo-38887.html
李代数在物理中的应用	北京师范大学周彬	video.chaoxing.com/playvideo-40379.html
最优化算法	中科院研究生院刘振宏 (21 讲)	www.verycd.com/topics/2895074/
有限元方法	中科院研究生院张年梅 (25 讲)	www.verycd.com/topics/2844722/
数学模型及其应用	中科院研究生院黄钧 (17 讲)	www.verycd.com/topics/2853149/

表 4　数学专业大学数学视频课程

课　程	主　讲	网　址
数学分析	中国科技大学史济怀 (203 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4319629.html
	复旦大学陈纪修 (214 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_3832081.html
	北京师范大学郇中丹 (194 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_2700410.html
	北京师范大学王昆扬 (144 集)	video.chaoxing.com/playvideo-18227.html
高等代数	厦门大学杜妮等 (134 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_3704332.html
	首都师范大学石生明 (169 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_2919782.html
	北京师范大学张秀平 (75 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4601543.html
	北京航天航空大学李尚志 (242 集)	video.chaoxing.com/playvideo-11841.html
高等代数与解析几何	南开大学孟道骥 (107 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_5281512.html
线性代数	上海交通大学沈灏 (166 集)	video.chaoxing.com/playvideo-24883.html
	山东大学刘建亚 (14 讲)	video.jingpinke.com/details?uuid=8a833996-18ac928d-0118-ac928ecb-0164
	中国科技大学李尚志 (25 集)	www.youku.com/playlist_show/id_5021383.html
线性代数与解析几何	中国科技大学陈发来 (67 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_3984473.html
矩阵分析	台湾交通大学吴培元 (31 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=263&cgid=5
	中科院研究生院叶世伟 (30 讲)	www.verycd.com/topics/2834343/
初等数论	北京师范大学张秀平 (50 讲)	v.youku.com/v_show/id_XMjE1NjY2NjA4.html
	东北师范大学南基洙 (14 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_3251078.html
	西南大学曹洪平 (12 讲)	222.178.184.135/sort.asp?typeid=1811
常微分方程	东北师范大学潘家齐 (19 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_2906268.html
	北京师范大学袁荣 (61 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_3950648.html
	麻省理工学院 Arthur Mattuck(33 讲)	v.163.com/special/opencourse/equations.html
偏微分方程 (一)	台湾交通交通大学林琦焜 (26 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=1&cgid=5
偏微分方程 (二)	台湾交通交通大学林琦焜 (15 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=12&cgid=5
椭圆与抛物型方程	吉林大学尹景学 (28 集)	video.chaoxing.com/playvideo-30619.html
微分几何	同济大学贺群 (96 集)	www1.ssvideo.cn/playvideo.asp?id=42059
	北京师范大学王幼宁 (40 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_1530652.html
概率论	北京大学何书元 (110 集)	video.chaoxing.com/playvideo-25030.html
	西南大学陈映萍 (18 讲)	222.178.184.135/sort.asp?typeid=1068
概率论与数理统计	中国科技大学缪柏其 (33 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4137231.html
	大连理工大学施光燕 (12 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_2969173.html
	武汉大学 (37 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_3008364.html
复变函数论	台湾交通大学吴培元 (29 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=15&cgid=5
	北京师范大学袁荣 (61 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_2469526.html
点集拓扑学	河北大学王彦英 (28 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_3250377.html
近世 (抽象) 代数	南开大学顾沛 (74 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_5443458.html
	首都师范大学石生明 (63 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_3371639.html
实变函数	上海交通大学张祥 (64 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_5444337.html
	华中师范大学李工宝 (79 集)	video.chaoxing.com/playvideo-37823.html
	台湾交通大学吴培元 (31 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=188&cgid=5
实分析	哈维玛德学院 Francis Su(25 讲)	www.verycd.com/topics/2852870/
泛函分析	台湾交通大学吴培元 (34 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=233&cgid=5

课 程	主 讲	网 址
大学数学(含泛函分析)	南京大学苏维宜(134 集)	video.chaoxing.com/playvideo-20244.html
向量分析	台湾交通大学林琦焜(25 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=14&cgid=5
变分法导论	台湾交通大学林琦焜(24 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=171&cgid=5
傅里叶分析与应用	台湾交通大学林琦焜(30 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=13&cgid=5
小波与傅里叶分析	中科院研究生院王蕊(15 讲)	www.verycd.com/topics/2834339/
小波理论与时频分析方法	马里兰大学(28 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4573497.html
群表示论	北京大学丘维声(119 集)	video.chaoxing.com/playvideo-13536.html
数值分析	北京交通大学王兵团(128 集)	video.chaoxing.com/playvideo-39413.html
	中国科技大学(38 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_3981250.html
数值逼近	复旦大学吴宗敏(42 集)	video.chaoxing.com/playvideo-34697.html
微分方程数值解	大连理工大学吴微(22 集)	video.chaoxing.com/playvideo-30551.html
离散数学	北京师范大学崔光佐(65 集)	video.chaoxing.com/playvideo-54379.html
	上海交通大学曹珍富(60 集)	video.chaoxing.com/playvideo-57030.html
组合数学	北京师范大学张秀平(60 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_3648842.html
数理逻辑	中科院陆钟万(29 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_2901699.html
最优化理论和方法	上海交通大学任庆生(17 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_6461357.html
线性规划	台湾交通大学姚铭忠(9 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=245&cgid=5
整数规划	复旦大学孙小玲(35 集)	video.chaoxing.com/playvideo-30653.html
凸规划	斯坦福大学 Stephen Boyd(16 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_5434039.html
图论	北京师范大学张秀平(60 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4599269.html
财务数学导论(一)	台湾交通大学吴庆堂(37 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=187&cgid=5
财务数学导论(二)	台湾交通大学吴庆堂(51 讲)	ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=234&cgid=5
有限元分析	华中科技大学熊世树(33 集)	video2.chaoxing.com/playvideo.asp?id=22644
数学建模	陕西师范大学(58 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_5026807.html
	东北师范大学李佐锋(20 讲)	www.youku.com/playlist_show/id_4126030.html
模糊数学理论及应用	西安交通大学桂小琳	www.verycd.com/topics/2827893/
金融数学与建模	厦门大学谭忠(42 集)	video.chaoxing.com/playvideo-58373.html
数学教育	西南大学梁学友等(13 讲)	222.178.184.135/sort.asp?typeid=1673
数学教育学	西南大学刘静(20 讲)	222.178.184.135/sort.asp?typeid=1069

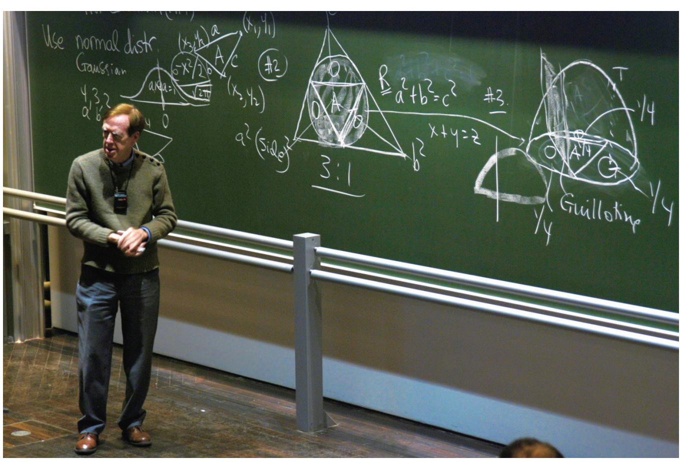


图 6 麻省理工学院 G. Strang 教授讲授的极受欢迎的《线性代数》课

5 个人制作的数学视频

除了公开课外，网上还有一些个人制作的数学视频课程。其中最著名的为美国萨尔曼•汗（Salman Khan）办的免费数学教学网站——汗学院（Khan Academy，网址见表 5）。汗是孟加拉裔美国人，在麻省理工学院完成数学学士学位和计算机科学及电子工程的硕士学位。2004 年，28 岁的汗成为沃尔对冲基金的分析员，为远程辅导数学跟不上课的侄女纳迪亚，他业余时间利用雅虎通 Doodle 记事本的绘图功能和电话来解释数学概念，并编了一个生成习题的小软件，让纳迪亚在网上做练习。不久纳迪亚进步神速，后来其它孩子也加入其中。2006 年，汗开始在家中制作每段约 10 余分钟的视频教学模块，然后上传到 YouTube 网站。他用 80 美元带电子笔的 Wacom 手写数

字图板、免费绘图软件 Smooth Draw 3 和 20 美元的屏幕录制软件 Screen Video Recorder，制作了从小学到大学的 2300 多段数学教学视频和 200 多个数学练习。与他的个人网上辅导相比，孩子们更喜欢这些视频。很多成年人也开始观看他的视频，并在留言中感谢他拯救了自己的数学学业。凭一己之力，使用简陋的器材和普通软件，萨尔曼•汗颠覆了美国传统的教育模式。加州洛斯拉图斯区的卡温顿小学率先在 5 年级引入汗学院课程。27 名学生甩掉了课本，用笔记本电脑上汗学院，学生在课堂上可自由讨论，教师只是通过 iPad 的信息板来查看学生的学习进展。不久他们的数学成绩就取得了明显的进步。

图 7 汗学院的创始人萨尔曼•汗

汗的工作得到众多科技领袖的推崇。比尔和梅琳达•盖茨基金会和谷歌公司分别为汗提供了 150 万美元和 200 万美元的资助。还有很多个人为汗学院捐款。如今汗的家庭作坊已变成了拥有多名雇员的非营利性网络教育公司。汗学院已成为世界上最受欢迎的教育网站之一。其观众达 5400 多万，月访问量约 200 万次，而麻省理工学院开放课程的月均访问量也不过 100 万人次。未来汗学院将要把主要课程翻译为其它语言，并开设历史、金融、物理、化学、生物、天文、经济和计算机科学等课程。目前国内还不能直接访问汗学院网站上的视频，但可以下载汗学院视频（网址见表 5）离线学习。

除汗学院外，网上还有其他数学爱好者制作的数学教学视频（表 5）。台湾的 Shareyoucan 网站，含有个人录制的高中数学、微积分、工程数学、统计学等大量数学教学录像。国内名为 Strongart 的网友，在视频网站上传了自己录制的交换代数讲座。

表 5 个人制作的数学视频

制 作	内 容	网 址
汗学院	主页	www.khanacademy.org
	Khan Academy on a Stick 下载	mujica.org/khan/khansite.zip(16G)
	Khan Academy for the ipod/iphone/ipad	itunes.apple.com/us/app/khan-academy-a-classroom-in/id361975619?mt=8
	BT 下载 (种子文件)	khanacademy.googlecode.com/files/khanacademy.org%20-%20COMPLETE%20-%20 2010-12-10.torrent
	微积分预备课	www.youku.com/playlist_show/id_6141639.html
	微积分	www.youku.com/playlist_show/id_5378651.html
Shareyoucan	高中数学	www.shareyoucan.com/BasicScience/math/Highschool/highschool.htm
	微积分	www.shareyoucan.com/BasicScience/math/EngineeringMath/EngineeringMath.htm
	工程数学	www.shareyoucan.com/BasicScience/math/Calculus/Calculus.htm
	统计学	www.shareyoucan.com/BasicScience/math/Statistics/Statistics.htm
Strongart	交换代数	www.youku.com/playlist_show/id_5219862_ascending_1_mode_pic_page_1.html

6 数学讲座与记录片

除教学视频课程外，互联网上还有大量数学学术讲座和传记片，本文只列出了部分资源（表 6、表 7）。这些视频资料有助于拓展数学知识以及对数学家、数学史的了解，提高数学的鉴赏力和审美观。

表 6 数学讲座

题 目	组织单位或报告人	网 址
微积分	南开大学陈省身	www.youku.com/playlist_show/id_4464396.html
拓扑学初步	复旦大学苏步青	v.youku.com/v_show/id_XMzAxODMzNDA0.html
数学科学的几种新发展	清华大学林家翘	www.56.com/u23/v_NjI1NzMyMDQ.html
计算机时代的中国数学	中国科学院吴文俊	www.56.com/u29/v_NTExMzYyMDI.html
世纪大讲坛数学讲座	中国科学院杨乐	v.youku.com/v_show/id_XMjk1NDc1MTI=.html
回顾欧拉，学习欧拉	复旦大学李大潜	v.youku.com/v_show/id_XMjMxNTUyNDk2.html
几何——魅力及其应用 几何的历史与应用	哈佛大学丘成桐	v.youku.com/v_show/id_XODU3ODE1Njg=.html ocw.nctu.edu.tw/riki_detail.php?pgid=268&cgid=12
数学学术讲座 (11 讲)	加州大学陶哲轩	www.youku.com/playlist_show/id_5267259.html
国际数学家大会报告	国际数学联盟	www.mathunion.org/activities/icm/videos/
千禧年会议报告及克雷研究会议报告	克雷数学研究所	www.claymath.org/video/
中国科学院数学讲座	中国科学院数学所	www.math.ac.cn/index_E/post/Institute_Report/I_Lecture_History.htm
数论专家讲座	晨兴数学中心	www.mcm.ac.cn/download.aspx
微积分五讲 (10 集) 线性代数五讲 (13 集)	中国科技大学龚昇	www.youku.com/playlist_show/id_3466629.html www.youku.com/playlist_show/id_3979657.html
数学大观，北京航天航空大学李尚志 (58 集) 数学文化，南开大学顾沛等 (54 集) 数学教学论，北京师范大学曹一鸣 (3 集) 研究数学之理，上海交大沈灏 (8 集) 数学的地位和作用，上海交大沈灏 (3 集) 计算几何简介，大连理工大学王仁宏 (3 集) 庞加莱猜想，中国科学院段海豹 (2 集) 数学与创新，北京航空航天大学李心灿 (5 集) 逼近论，西安交通大学徐宗本 (14 集) 数学机械化的观点，南开大学李军 (4 集) 线性空间的同构，厦门大学林亚南 (4 集) 数学的同伦方法，大连理工大学于波 (2 集) 等子值傅里叶乘子，清华大学步尚全 (2 集) 辛几何算法，中国科学院尚在久 (2 集) 级数及超同余式猜想，南京大学孙智伟 (6 集) 代数与几何，清华大学张贤科 (4 集)	超星学术视频	video.chaoxing.com/playvideo-11846.html video.chaoxing.com/videoinfon-981.html video.chaoxing.com/videoinfon-1360.html video.chaoxing.com/playvideo-28601.html video.chaoxing.com/playvideo-7681.html video.chaoxing.com/playvideo-31311.html video.chaoxing.com/playvideo-30549.html video.chaoxing.com/playvideo-52503.html video.chaoxing.com/videoinfon-4366.html video.chaoxing.com/videoinfon-1857.html video.chaoxing.com/playvideo-26190.html video.chaoxing.com/playvideo-31341.html video.chaoxing.com/playvideo-29751.html video.chaoxing.com/playvideo-31297.html video.chaoxing.com/playvideo-30295.html video.chaoxing.com/playvideo-31158.html
Vector Bundles on Riemann Surfaces Geometry and String Theory Geometry and Quantum MechanicsPoints and Particles	Michael Atiyah	v.youku.com/v_show/id_XMjAzMzQ5MDA=.html v.youku.com/v_show/id_XMjAzMzM5MDg=.html v.youku.com/v_show/id_XMjAzMzQzOTI=.html
Nash and Stackelberg Differential Games	Alain Bensoussan	v.youku.com/v_show/id_XMTc4NDk4Mzg0.html
Shell Theory	Philippe Ciarlet	v.youku.com/v_show/id_XMTc4NDk5NTg4.html
让我们用视频重新创造教育	萨尔曼 • 汗	v.163.com/movie/2011/7/C/6/M77ESEJF8_M77ESRDC6.html
庞加莱猜想和佩雷尔曼	北京大学田刚	v.youku.com/v_show/id_XMjI2NzIxOTg0.html
素数狂想两千年 漫谈数学文化	山东大学刘建亚	www.global-sci.org/mc/media/sushu2000.wmv v.youku.com/v_show/id_XMjk2MzU1MTgw.html
数学思想方法和应用 (24 讲)	北京大学张顺燕	www.youku.com/playlist_show/id_4598676.html
维度 : 数学漫步 (10 集)	Dimensions 网站	www.youku.com/playlist_show/id_3581001.html
数字之夜——趣味数学系列 (3 集) 数学的故事 (4 集)	英国广播公司	v.youku.com/v_show/id_XNDY5NTA5MTI=.html www.verycd.com/topics/2878349/
大放异彩的数学 (13 集)	俄勒冈州广播公司	www.youku.com/playlist_show/id_3913550.html
几何漫谈	Satyan L. Devadoss	www.youku.com/playlist_show/id_5417151.html
无处不在的代数学 (6 讲)	Marcel Jackson	v.163.com/special/opencourse/latrobe.html

表 7 人物传记及访谈

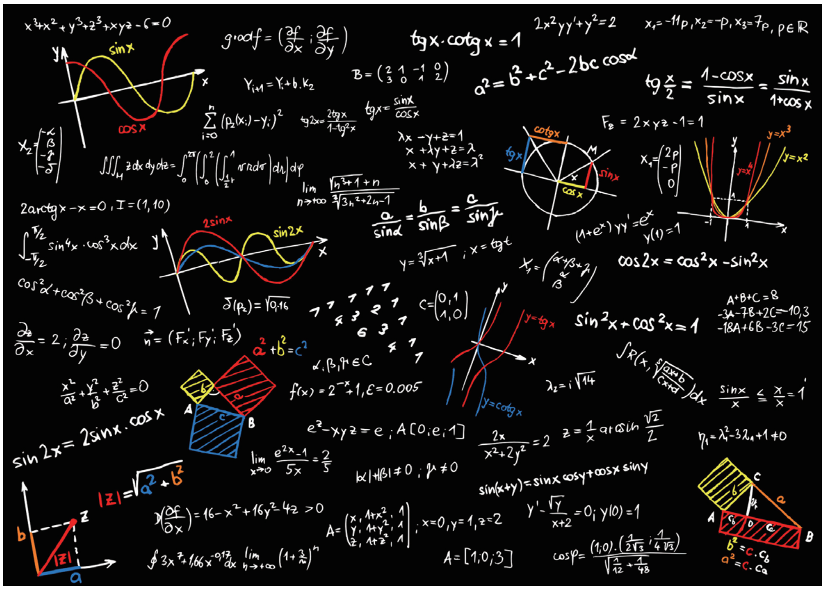
名 称	制 作	网 址
笛卡儿 阿兰 • 图灵	英国广播公司	www.verycd.com/topics/5278/ www.verycd.com/topics/139751/
费马大定理	美国公共广播社	www.verycd.com/topics/84084/
华罗庚 (8 集) 国际著名微分数学几何之父——陈省身 大家——吴文俊 数学家的魅力——谷超豪 哥德巴赫猜想的追梦人——刘建亚	中央电视台	kejiao.cntv.cn/history/tansuofaxian/classpage/video/20110910/100784.shtml xiyou.cntv.cn/v-57c601ac-c3de-11e0-b474-a4badb4689bc.html www.tudou.com/programs/view/y6XX2nYj-NA/ www.56.com/u55/v_MTM5MDU4MDQ.html www.global-sci.org/mc/media/sushu2000b.wmv
大师——华罗庚	纪实频道	v.youku.com/v_show/id_XMjI0NTU0ODA0.html
数学之美 陈省身	天津电视台	v.youku.com/v_show/id_XMjIwMzg1MTY0.html
陈景润 (14 集)	中央统战部等	www.youku.com/playlist_show/id_1762074.html

图 8 南开大学全国教学名师顾沛教授讲授《数学文化》

7 网络学习与其它教学方式的比较

网络教育作为一种新的教育模式，依托遍布全球的互联网，在信息传播速度和覆盖范围方面有着其他任何教育方式不可比拟的优势。与其他教学方式相比，其具有投资少、师资水平高、课程自选、时间自定、场地要求不高等特点。

从知识传播的角度，书本和论文属于二手传播，因为数学文献往往只写结果，隐去了数学发现中的灵感与曲折历程以及蕴藏于其中的深邃思想，再加上这些书籍一般都写得很简练，满篇尽是数学符号和定理证明，这给数学的学习及知识传播带来巨大障碍。视频课程大部分都是教学现场



的实录，可再现课堂场景，更接近于面对面的一手传播。视频学习同时利用了视觉和听觉，可一睹名师的神韵和风采，传达授课语境及思想内涵，而这些信息是书本无法表达的。从认知效果来看，名师教学往往能把艰深枯燥的内容讲的深入浅出，通俗易懂，通过观看教师的讲解和推演，可轻松地完成艰深课程的学习。在遇到学习难点时，可随时暂停，并可无限制的重复播放，与读书本相比，这种学习方法更加自然和人性化。

开放课程和汗学院采用的是两种不同的教学模式。开放课程用的是课堂现场录像这种传统的方式，具有课堂环境的临场感。但其只能单向传播，无交互功能，学习以自主学习为主，受主观因素影响较大。由于缺乏正规的教学管理和考核机制，学习效果与其他正规教育方式相比还有很大差距。汗学院与其他视频课程不同的创新之处是，有一定的交互能力，可网上做习题并采用了数据库和网络交互技术分析学生的学习进展。目前汗的视频只有黑板、板书、照片和配音，画面比较简单，汗本人并未出现在视频中，情感交流稍显不足。如能将这两种教学模式相结合，再辅以立体高清、动画演示等技术，教学效果会更佳。

8 网络数学教育的未来

互联网上的免费数学教育对传统教育是一场革命，它为全球民众提供了一种新的免费数学自学途径，使数学教学走出校园进入寻常百姓家。通过互联网，任何人都可在任何时间、任何地点学习数学。全球的学生都处于同一起跑线，人人平等享有免费教育资源。这对于提高国民的数学素养，实现全民免费终身教育都有重要意义。

目前的网络开放教育主要适用于校外自学和校内的辅助教学。随着网上交互功能的提高并实现网络教学正规管理和学历教育，网络免费教育将会成为与其他教育体制并列的新型教育模式。未来高速互联网技术（光纤到户和无线 4G 等）的发展和网络普及率的提高，三维高清视频等先进多媒体技术将用于网络视频教学中，使图像更生动、形象，交互性更强，教学效果会更好。数学教学资源也将更丰富，满足不同层次数学学习者的需求。网上学习数学将成为时尚的数学文化。

作者介绍：

杨经晓，中国电子设备系统工程公司信息研究所高级工程师，主要从事结构力学与电磁工程的数值计算及信息技术研究工作。曾获多项军队科技进步奖。

我们需要怎样的数学教育

matrix67

Matrix67: My Blog

50% Informatics, 50% Mathematics, and 50% Imagination

顾森，网名 matrix67，北京大学中文系应用语言学专业本科大四学生，数学爱好者，2005 年开办博客 matrix67.com，至今有上千篇文章，已有上万人订阅。曾任果壳网死理性派编辑，担任三年初中奥数培训教师，现任人人网产品部算法组技术人员。

摘自 http://www.matrix67.com/blog/archives/4294#more-4294

注：这篇文章里有很多个人观点，带有极强的主观色彩。其中一些思想不见得是正确的，有一些话也是我没有资格说的。我只是想和大家分享一下自己的一些想法。大家记得保留自己的见解。也请大家转载时保留这段话。

我不是一个数学家。我甚至连数学专业的人都不是。我是一个纯粹打酱油的数学爱好者，只是比一般的爱好者更加执着，更加疯狂罢了。初中、高中一路保送，大学不在数学专业，这让我可以不以考试为目的地学习自己感兴趣的数学知识，让我对数学有如此浓厚的兴趣。从 05 年建立这个 Blog 以来，每看到一个惊人的结论或者美妙的证明，我再忙都会花时间把它记录下来，生怕自己忘掉。不过，我深知，这些令人拍案叫绝的雕虫小技其实根本谈不上数学之美，数学真正博大精深的思想我恐怕还不曾有半点体会。

我多次跟人说起，我的人生理想就是，希望有一天能学完数学中的各个分支，然后站在一个至高点，俯瞰整个数学领域，真正体会到数学之美。但是，想要实现这一点是很困难的。最大的困难就是缺少一个学习数学的途径。看课本？这就是我今天想说的——课本极其不靠谱。

这个我深有体会。最近两年，我一直在做初中数学培训，有了一些自己的看法。数学教育大致分成三个阶段，看山是山看水是水，看山不是山看水不是水，看山是山看水是水。

最早数学教育就是，教你几个定理，告诉你它们是怎么证的，再让你证明一些新的定理。

Matrix67

后来的要求就变了：光学数学不够，还要用数学。数学教育已经上升了一个层次：大家要把数学用到生活中去，解释生活中的现象。一时间，课本也好，中考题也好，全是与生活实际紧密联系的数学应用题，仿佛放眼望去身边真的处处都是数学一样。商场卖货，书店卖书，农民耕地，工人铺砖，再一次涌现在了课本、教辅书和考试题里。其实，数学可以解释生活，只是我们并不会这样去做。生活的变量太多，再强大的数学模型也不可能考虑到一切。对于平常人来说，真正能用到数学的地方，也就只有算算帐了。

总有一天，数学教育会拔高到第三层：返朴归真，数学真正牛 B 的还是它本身。你会发现，那些伟大的数学思想，那些全新的数学理论，最初研究的动机并不是要急于解释我们身边的某某诡异现象，而是它本身的美妙。线性代数的出现，很大程度上要归功于神奇的克莱姆（Cramer）悖论；群论的诞生，也是伽罗华（Galois）研究多项式的解的结构时的产物；欧拉（Euler）创立图论，源于那个纯属无聊的哥尼斯堡（Königsberg）七桥问题；非欧几何的出现，则完全是由于这个问题本身的魅力。微积分呢？它确实有非常广泛的实用价值，物理学的各种定义都依赖于微积分；但很可惜，它不是一种具有颠覆性的数学思想。

初一课本讲负数时，反复说负数的实际意义，比如海拔、得分、温度、收支等等，把负数变成一种真实的存在。其实，这不是人们使用负数的主要动机。负数的价值在于，它可以把减去一个数变成加上一个负数，很多加加减减复杂到甚至需要分类讨论的东西都能够用一个式子统一在一起了。比如说小学的盈亏问题：如果每人分 3 个苹果还多 8 个，如果每人分 5 个苹果则还多 2 个，问有多少人多少苹果？解法是，两种分法多出来的苹果相差 6 个，这是每个人多分了两个苹果引起的，因此一共 3 个人，从而可以算出有 17 个苹果。但是，如果把问题改成“每人分 3 个就多 8 个，每人分 5 个就少 2 个”该怎么办？上面的公式就变了，8 不能减 2，要加 2 。因此，小学讲盈亏问题会分“盈亏”、“盈盈”、“亏亏”三种情况讨论。其实，如果把“少 2 个”理解成“多 –2 个”，问题是一模一样的，之前的公式同样适用。负数这一新思想立即把三种情况统一在了一起，它们的本质变得一模一样了。

这是我给初一学生讲负数时必讲的例子。这才是负数的意义。这才是课本里应该反复举例强调的。

某次看到论坛里有人问，群论有什么意思啊？某人回复，群论很有意思啊，只是课本把它写得没意思了，比方说，讲群论怎么能不讲魔方呢？我不赞同这个回复。数学吸引人的地方，不在于它在生活中的应用，而在于它本身的美。为什么不讲拉格朗日（Lagrange）定理？为什么不讲西罗（Sylow）定理？对于我来说，最能吸引我学习一个数学课题的，莫过于一系列非平凡的结论以及它的精彩证明了。

科幻小说《伤心者》的末尾列举了很多长期以来未得到实际应用的数学理论，不过却没有说到一个更为极端的例子。数学中的皇冠——数论——2000 年来一直没有任何实际应用，是最纯粹的数学。直到计算机，尤其是现代密码学的出现，才让数论第一次走出数学，走进了人们的生活中。是什么在支持数论的研究呢？只能是数学本身了。

在我给初中孩子出几何题时，我都尝试着给出一般性的问题，求证三角形中两边的平均长度大于第三边上的中线长，求证三角形三条高的倒数和等于内切圆半径的倒数，等等。即使是纯代数问题和解析几何问题，我也总能编出题目描述简单并且极具挑战性的问题。两数的和与积相等共有多少个整数解？把直线 $y = x$ 沿 $y = 2x$ 翻折后得到的直线方程是什么？在感受结论之美的同时，他们也会因自己独立解决了一个真正的数学问题而激动。

然而，这还不算教育的主要问题。某次与一个数学专业的同学聊到黎曼（Riemann）假设时，对方说她从没听说过黎曼假设。我大吃一惊，数学专业的人怎么可能不知道黎曼假设呢？随即明白，这也是拜数学教育所赐。翻开数学课本，总是成套的理论体系，先定义再证明，说得头头是道。可是，这些东西都是怎么来的呢？在得出这些东西的过程中，数学家们走了哪些弯路呢？课本上只字不提。课本里从来都只讲什么是对的，却从来不讲什么是错的。

Matrix67

数学考试只会让你证明一个结论，从不会让你推翻一个结论。

2010 年江苏高考数学题因为“太难”备受争议。其中最后一道大题如下：已知 △ ABC 的三边长都是有理数，(1) 求证 cos(A) 是有理数；(2) 求证对任意正整数 n，cos(nA) 是有理数。其实这道题是一个非常漂亮的好题，描述简单，问题普遍，结论有趣，证明巧妙，高考题就该这么出。不过我觉得，如果再补上这么一个小问，这道题就真的完美了：证明或推翻，sin(A) 一定是有理数。当然，问题本身并不难，等边三角形就是一个最简单的反例。关键在于，推翻一个结论，寻找一个反例，也是数学研究的一个基本能力，而这是中学数学教育中很少重视的。

于是，在教初中数学时，我布置的每道作业题都无一例外地以“证明或推翻”打头。偶尔，有些题目真的是需要学生们去推翻它。比方说，证明或推翻，周长和面积都相等的两个三角形全等。不同的人找到的反例不一样，有的简单有的复杂，有的深刻有的盲目。再用一整节课的时间逐一讲解并点评大家构造的反例，给孩子们带来的收获远比直接讲题要大得多。

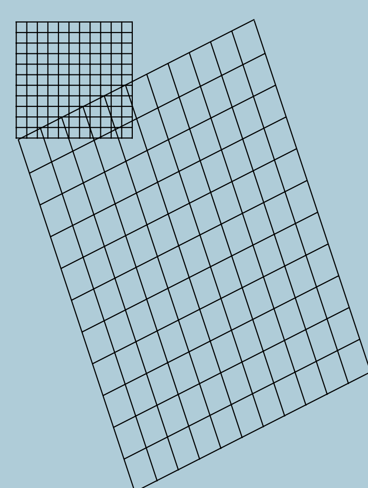
但是，我还没有讲到数学教育中最主要的问题。前段时间去图灵的作译者交流会，期间和刘江老师简单地聊了几句。刘江老师提到一个网站叫做 Better Explained 。他说，其实大家没能理解数学之妙，是因为教的时候没教好，数学本来可以讲得更直观，更通俗的。

我非常同意刘江老师的说法。举个例子吧。如果有学生问，质数是什么？老师会说，质数就是除了 1 和自身以外，没有其它约数的数。不对，这不是学生想要的答案。学生真正想知道的是，质数究竟是什么？其实，质数就是不可再分的数，是组成一切自然数的基本元素。 12 是由两个 2 和一个 3 组成的，正如 H_2O 是由两个 H 原子和一个 O 原子组成的一样。只是和化学世界不同，算术世界的元素有无穷多个。算术世界内的一切对象、定理和方法，都是由这些基本元素组成的，这才是质数为什么那么重要的原因。

高中学复数时，相信很多人会纳闷儿：虚数是什么？为什么要承认虚数？虚数怎么就表示旋转了？其实，人们建立复数理论，并不是因为人们有时需要处理根号里是负数的情况，而是因为下面这个不可抗拒的理由：如果承认虚数，那么 n 次多项式就会有恰好 n 个根，数系一下子就如同水晶球一般的完美了。但复数并不能形象地反映在数轴上，这不仅是因为实数在数轴上已经完备了，还有另外一个原因：没有什么几何操作连做两次就能实现取相反数。比如，“乘以 3”就代表数轴上的点离原点的距离扩大到原来的三倍，“3 的平方”，也就是“乘以 3 再乘以 3”，就是把上述操作连做两次，即扩大到 9 倍。同样地，“乘以 –1”表示把点翻折到数轴另一侧，“–1 的平方”就会把这个点又翻回来。但是，怎么在数轴上表示“乘以 i ”的操作？换句话说，什么操作连做两次能够把 1 变成 –1 ？一个颇具革命性的创意答案便是，把这个点绕着原点旋转 90 度。转 90 度转两次，自然就跑到数轴的另一侧了。没错，这就把数轴扩展到了整个平面，正好解决了复数没地方表示的问题。于是，复数的乘法可以解释为缩放加旋转，复数本身自然也就有了 $z = r(\cos\theta + \sin\theta i)$ 的表示方式。顺着这个道理推下去，一切都顺理成章了。复数不但有了几何解释，有时还能更便捷地处理几何问题。

一直对线性代数很感兴趣，于是大学选了线性代数这门课，结果收获几乎为零。原因很简单，本来期待着来一次大彻大悟，结果学了一个学期，我还是不知道矩阵究竟是什么，矩阵乘法为什么要这么定义，矩阵可逆又怎么了，行列式究竟表示什么。

直到今天看到这个网页（http://mathoverflow.net/



$$(x\ \ y)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = (2x+y\ \ \ x-3y)$$

Matrix67

questions/7584/mis-definitions-in-math)，才看见有人一语道破线性代数的真谛（这也是我终于决定写成此文的直接原因）。我终于找到了我那一个学期企图寻找的东西。就好像把 x 变成 $2x$ 一样，我们经常需要把 (x, y) 变成 $(2x+y, x-3y)$ 之类的东西，这就叫做线性变换。于是才想到定义矩阵乘法，用于表示一切线性变换。几何上看，把平面上的每个点 (x, y) 都变到 $(2x+y, x-3y)$ 的位置上去，效果就相当于对这个平面进行了一个“线性的拉扯”。

矩阵的乘法，其实就是多个线性变换叠加的效果，它显然满足结合律，但不满足交换律。主对角线全是 1 的矩阵所对应的线性变换其实就是不变的意思，因此它叫做单位矩阵。矩阵 A 乘以矩阵 B 得单位矩阵，就是做完线性变换 A 后再做一次线性变换 B 就又变回去了的意思，难怪我们说矩阵 B 是矩阵 A 的逆矩阵。课本上对行列式的定义千奇百怪，又是什么递归，又是什么逆序对，还编写口诀帮助大家记忆。其实，行列式的真正定义就一句话：每个单位正方形在线性变换之后的面积。因此，单位矩阵的行列式当然就为 1，某行全为 0 的行列式显然为 0（因为某一维度会被无视掉，线性变换会把整个平面压扁），$|A \cdot B|$ 显然等于 $|A| \cdot |B|$ 。行列式为 0，对应的矩阵当然不可逆，因为这样的线性变换已经把平面压成一条线了，什么都不能把它变回去了。当然，更高阶的矩阵就对应了更高维的空间。一瞬间，所有东西都解释清楚了。

难以置信的是，如此令人兴奋的东西，我们所用的课本上竟然一点都没有说到！那些开篇就讲行列式定义的课本，为什么不先把线性变换下的面积当作行列式的定义，再推导出行列式的计算方法，再来补充说明“其实从逻辑上说，我们应该先用这个计算公式来定义行列式，然后才说行列式可以用来表示面积”？为了严密性而牺牲了可读性，太不值得了。写到这里，我真想立即拾起线性代数课本，用全新的眼光重看所有的定义和定理，然后重新写一份真正的线性代数教材来。

高数课本同样荒唐。主流的高数课本都是先讲导数，再讲不定积分，再讲定积分，完全把顺序弄颠倒了。好多人学完微积分，虽然已经用得得心应手，但仍然没懂这是怎么回事。究其原因，还是数学教学的问题。

我理想中的微积分课本则应该是先讲定积分，再讲导数，再讲不定积分。先讲定积分，不过千万不能用现在的定积分符号，避免学生误认为定积分是由不定积分发展而来的。讲自古就有的积分思想，讲分割求和取极限的方法，自创一套定积分的符号。然后另起炉灶，开始讲微分，讲无穷小，讲变化量。最后才讲到，随着 x 一点一点的增加，曲线下方面积的变化量就是那一条条竖线的高度——不就是这个曲线本身的函数值吗？因此，反过来，为了求出一个函数对应的曲线下方的面积，只需要找到一个新函数，使得它的微分正好就是原来那个函数。啪，微积分诞生了。

光讲形式化的推导没有用。这才是真正把微积分讲懂的方式。严格定义和严格证明应该放到直观理解之后。只可惜，我还没看到哪本课本是这样写的。

说了这么多，其实总结起来只有一句话：我们学习数学的过程，应该和人类认识数学的过程一样。我们应该按照数学发展历史的顺序学习数学。我们应该从古人计数开始学起，学到算术和几何，学到坐标系和微积分，了解每个数学分支创立的动机，以及这个分支曲折的发展历程。我们应该体会数学发展的每个瓶颈，体会每个全新理论的伟大之处，体会每一次数学危机让数学家们手忙脚乱的感觉，体会先有直观思维再给出形式化描述的艰难。

可惜，我没有找到任何用这种方式学习数学的途径。

不过也好。既然没有捷径，那就让我自己把那堆形式化的定义和证明通看一遍，然后自己去体会其中的道理吧。这样看来，我们的教育也没错：先用考试逼着大家把该学的东西都学了，尽管自己也不知道自己学的是啥；等将来的某一天达到一定高度时，回头看看过去学的东西，突然恍然大悟，明白了当初学的究竟是什么。这无疑是一件更有乐趣的事情。我希望有一天能像今天这样，能悟出高等代数究竟在讲什么，能悟出范畴论到底有什么用，能悟出黎曼假设为何如此牛 B，能悟出希尔伯特（Hilbert）空间是什么东西，然后把它们都写下来。

这恐怕得花我大半辈子的时间吧。

数学家的文学故事

李尚志

在很多人的心目中，数学与文学水火不相容，文学家不懂数学，数学家也不可能有文学家的浪漫情调。殊不知，很多数学大家也是文采飞扬，能诗善赋的。例如，陈省身写过“物理几何是一家，共同携手到天涯”这样的诗句来说明物理与几何的紧密联系。华罗庚有一次参加科学家代表团出访，出了一句上联“三强韩赵魏”让别人对下联。“三强”一语双关，一方面是春秋战国时期由晋国分成的韩赵魏三个诸侯国，另一方面又是代表团中的科学家钱三强的名字。下联不但句子的格式要与上联对偶，前两个字也同样应当一语双关。这个要求实在是太难达到。不过华罗庚早就自己想好了下联：九章勾股弦。《九章算术》是中国古代著名数学著作，其中讲到了涉及勾股弦的著名的勾股定理，“九章”还是代表团中的科学家赵九章的名字。

我的导师曾肯成在数学领域内是华罗庚的学生，而且与华罗庚一样不输文采，是数学界有名的才子。我在《名师培养了我》一文中写了一段“我的导师曾肯成”讲述他的一些往事。意犹未尽，特意另外写一篇专门讲述他与文学有关的几个故事。

放过蛟龙

1978 年 9 月，在川陕边界大巴山区经过了八年的磨难之后，我终于考回了母校——中国科技大学读研究生。1965 年我考入中国科大读本科时是在北京玉泉路，1970

李尚志和导师曾肯成在博士答辩会上（1982.5.15）

年本科毕业离开科大时是在安徽铜陵，1978年重回科大则是在安徽合肥。十年动乱，科大颠沛流离，我也颠沛流离，如今总算又走到一起了。走在从未见过的陌生校园里，碰见八年以前的老师或同学，恍如隔世。记得在校门口碰见杨纪柯老师，他对我说了一句："好久没见过你了，你到哪里去了？"这句话看似平常，在我心中引起的却是无限的感慨。他说的"好久"可不是几天几月一年两年，而是长达八年，足够打败日本鬼子的八年。八年没看见我，并不奇怪，本来我就已经离开科大到那深山老林中去了，应当是一去不复返了，他永远没看见我都是理所当然的。而今他能够看见我，这才是奇迹。

从深山老林考回名牌学府，当然是我的幸福和骄傲。但从报上看来的一则消息却让我骄傲不起来。考上北京大学的一位研究生，两门数学课程，满分是200分，他就考了198分，几乎是满分。这位令我佩服不已的研究生叫唐守文，他的导师是北京大学段学复教授。后来我知道这位唐守文早就是名人。在念中学时就是上世纪六十年代初中国最早的中学生数学竞赛的状元，华罗庚请他到家吃过饭的。后来，我的导师曾肯成到北京为女儿治病，就安排我们与段学复的四位研究生一起听课和搞讨论班。我就与段学复的几位研究生都很熟了，包括我很佩服的唐守文。再后来，在北京大学段学复与丁石孙、中国科学院万哲先、华东师大曹锡华、复旦大学许永华、南京大学周伯壎等老一辈代数学家的支持下，同时也在中国科大和中国科学院的支持下，我有幸成为我国自己授予的首批博士之一。鉴于唐守文也做了很好的工作，曾肯成与万哲先极力支持他获得博士学位。然而，北京大学当时一定要研究生先获得硕士学位，再攻读博士学位。于是唐守文只能先举行硕士答辩。在答辩会上，曾肯成和万哲先仍然坚持认为唐守文达到了博士学位水平。曾肯成告诉我，在答辩委员会决议上还写了一句"有的委员认为达到博士水平。"曾肯成为此写了下面的一首诗：

建议授予唐守文同志博士学位

七言八韵

岁月蹉跎百事荒，重闻旧曲著文章。
昔时曾折蟾宫桂，今日复穿百步杨。
谁道数奇屈李广，莫随迟暮老冯唐。
禹门纵使高千尺，放过蛟龙也不妨。

蟾宫是指月亮。"曾折蟾宫桂"，到月亮上去折桂花树枝，是指唐守文获得数学竞赛冠军的光荣历史。尽管由于文化大革命而"岁月蹉跎百事荒"，然而唐守文并没有因此而放弃奋斗，"重闻旧曲著文章"，"今日复穿百步杨"，都是说他在研究生阶段作出了新的更好的成绩。李广和冯唐是人才不受重用而被埋没的两个例子，王勃《滕王阁序》中"冯唐易老，李广难封"也是举这两个例子。曾肯成举这两个例子是希望这样的故事不要在唐守文身上重演。最后两句最精彩。其中所说的"禹门"就是黄河的龙门（其实是指的壶口瀑布），有传说"鲤鱼跳龙门"，鲤鱼如果从龙门跳上去，就可以成为龙了。曾肯成承认"禹门高千尺"是对的，授予博士学位坚持高标准是对的，但人家已经不是鲤鱼而是蛟龙了，已经达到了博士学位的高标准，为什么还不放他过去，授予他博士学位呢？

曾肯成的这首诗虽然写好了，却没有地方发表。他将这首诗投稿到《北京晚报》的《阿凡提》专栏去，但阿凡提也不敢发表。于是这首诗就只能在中国科学院和中国科大的当时的研究生中流传，也肯定传到其他高校一些研究生那里。曾肯成这首诗，其实不只是写给唐守文的，而是体现了他对我们整个这一批研究生的全力支持，也生动体现了他对年轻人的一片深情。当时有一种舆论认为我们这批研究生因为文化大革命而没有受过完整的大学本科教育，没有打好基础。而曾肯成则非常看重我们这一批研究生经过艰苦环境锻炼养成的良好素质。曾肯成的这首诗在研究生中广泛流行，成为给所有的研

究生撑腰打气的诗，很受欢迎。曾肯成为此颇为得意的说："我是在为你们张目。"

段学复教授希望唐守文继续攻读博士学位。但唐守文为了解决夫人调动北京的问题而到了北京工业大学办的北京计算机学院，后来到了国外搞计算机。

曾肯成教授接待外宾

清风两袖

我博士答辩的前一天，与曾肯成老师在校园里一边散步一边聊天。曾老师给我下了一道命令：今天不许谈数学。不谈数学谈什么呢？古今中外，诗词歌赋，什么都谈，就是不能谈数学。有时我不知不觉讲到数学了，曾老师马上警告："你犯规了！"我马上改正。

突然，曾老师嘴里冒出一句话："你有时候不严肃。"我听了莫名其妙，想不起我什么时候在老师面前有不严肃的表现。曾老师解释说："有一次批判我帽子里的那副'反动对联'，你在作记录，却还在笑，一点都不严肃。"我想起来了，那是在文化大革命中发生的事情。很多人都要在戴的帽子里垫一张纸，使帽子里面一层不容易弄脏。垫的纸脏了，另外换一张干净纸就行了。曾肯成也在自己的帽子里垫了一张纸，还在纸上写了自己的姓名住址，并且写道：如果这顶帽子丢失，请拾者送到某某地址。除此之外，还在纸上写了一副对联：

破帽一顶，清风两袖。

不巧的是，有一天帽子真的丢了，真的被人拾到了。拾者却没有送还曾肯成，而是交给当时掌管阶级斗争的领导。帽子里的对联马上成为阶级斗争的新动向：曾肯成是右派，"破帽一顶"不就是影射的自己头上的"右派帽子"吗？这是对党的不满。于是召开批判会批判这副"反动对联"。想起这件往事，我向曾老师说："我记不得当时是否笑了，但记得清楚的是：当时觉得你那副对联对仗工整，内心非常赞赏，也许脸上就不知不觉地露出了笑容吧。"

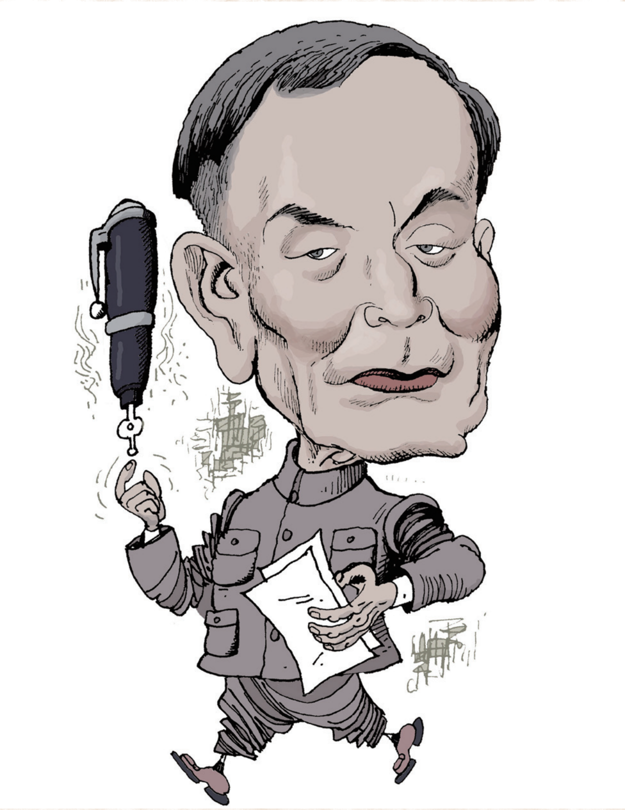
我没有问过曾肯成是怎样当上右派的。我大概知道的是：他当时正在莫斯科大学留学，有人给他寄的国内的报纸上有右派言论，被人打了小报告揭发他散布右派言论。于是他接到命令立即回国。他回忆说：莫斯科火车站的同一个月台上停了两个相反方向的火车，一列往北京，另一列往华沙。他明知回国要当右派，挨批判。如果登上去华沙的火车，也许能逃脱挨整的噩运，但也就从此走上了背离祖国的道路。他还是登上了回北京的火车。

文化大革命刚结束不久，邓小平拨乱反正，文化大革命中挨整的很多人平了反。当时很广泛的共识和流传很广的消息是也要为错划的右派平反，不过还没有实施。这时候曾肯成需要填写一份履历表，上面有一栏是"受过何种奖励与处分"。右派当然是他"受过的处分"，应当怎样填写？他写了一首诗在上面：

曾经神矢中光臀，仍是当年赤子心。往事无端难顿悟，几番落笔又哦吟。

裤子还没有穿好就被反右斗争的"神箭"射中了，这就是"神矢中光臀"，这句表面幽默实际上辛酸的诗描述的就是他当时在没有任何思想准备的情况下被戴上了右派帽子。虽然受到了不公正的待遇，"仍是当年赤子心"。当他写到这里的时候，是否想到莫斯科火车站上的那两列火车呢？他写下的一定是对自己当年选择回北京的无怨无悔。

感谢党中央的拨乱反正和改革开放路线，曾肯成头上戴的右派帽子终于被彻底摘掉了。他终于可以发挥自己的聪明才智报效祖国。他在中国科大研究生院（后来改为中国科学院研究生院）创建了信息安全国家重点实验室，成绩斐然。他提出的一些学术观点之先进让国际同行大吃一惊。趁他到美国学术访问的机会，美国有关方面找上门来，希望与他合作搞信息安全。他拒绝了，回到了祖国。尽管他的女儿女婿后来都去了美国，但他再也没有到美国



曾肯成漫画

去过。他的观点是：搞数学理论研究可以与美国人合作，搞信息安全只能为中华人民共和国服务。

Kuoxingga

曾肯成的英语和俄语都非常好。据说他的俄语好得可以与俄国人吵架。我1965年刚到中国科大念本科不久，还不认识曾肯成，就听说了这么一个故事：

苏联有一个学中国历史的研究生写了一篇学位论文，内容是关于郑成功收复台湾的。既然是研究中国历史的论文，就需要送给中国历史的权威来审查，写出评审意见。于是就送到中国请郭沫若审查。为了让郭沫若审查，先要将论文由俄文翻译成中文。但是，在翻译中遇到了一个问题：

论文中有一段话说：荷兰侵略军听说郑成功的部队来了，闻风而逃，同时大叫大喊“Kuoxingga”(此处用汉语拼音表示这个单词的读音)。翻译人员不知道“Kuoxingga”是什么意思。查遍了所有的俄文辞典，也不懂这个俄文单词的意思。

翻译人员想到了请教曾肯成。曾肯成一看，就指出：Kuoxingga根本不是俄文单词，而是中国话！只不过不是普通话而是福建话。Kuoxing就是“国姓”，郑成功被逃亡中的明朝小朝廷赐姓朱，称为“国姓爷”。福建话中“爷”的发音是“Ga”，因此“Kuoxingga”就是“国姓爷”，是郑成功的光荣头衔。本来是用中国话喊的，在俄文的论文中按发音用俄语字母拼出来，中国的翻译反而就不认识了。这也难怪，要翻译好这句话，只懂俄语不行，得了解方言和历史，也只有曾肯成这样博古通今才想得出来。

后来我当了曾肯成的研究生，曾经向他求证这个故事是否是真的，他没有直接回答，反而得意洋洋地向我大讲起福建方言来。

层峦耸翠

我读研究生的时候，曾肯成建议我做的第一个论文选题是研究有限非交换单群的子群格刻画。他自己对射影特殊线性群和射影辛群完成了刻画。在他的方法的启发下，我对射影特殊酉群作了刻画。并且由此发展出一套方法用来研究典型群的子群结构问题获得了成功。另一方面，我尝试对包括线性群、辛群、酉群在内的李型单群进行统一处理，发现可以利用Tits新提出的Building理论。Tits写了一本专著论述Building理论。我买不到这本专著，在周围也借不到，只能到北京图书馆去将这本书借出来，在图书馆里阅读。连续读了三天，作了笔记，有了基本的了解，就开始用它来解决问题。我向曾老师汇报了读书的心得和用它来解决问题的方案。李型单群的抛物子群按包含关系组成一个Building，各抛物子群层层叠叠堆起来，好象一座美丽的塔。曾肯成马上用王勃的名篇《滕王阁序》中的句子来描述它：

层峦耸翠，上出重霄。飞阁流丹，下临无地。

按我的理解和想象，“层峦耸翠，上出重霄。”是一层层翠绿的山峰由下往上重叠起来，冲破了天到九霄之外。“飞阁流丹，下临无地。”则是红色的楼阁像通红的岩浆一层层往下流淌，飞泻到无底深渊。这都好像是Building的一层一层重叠的结构。曾老师将数学的结构用如此美丽的诗句来描述，既惟妙惟肖又生动形象。

滕王阁是在江西南昌，一千多年来经过了多次毁坏和重建。文化大革命中，1966年12月底，我与两位同学一起从上海步行串联到井冈山，途经南昌，停留了两天。记得是1967年元旦那天从南昌出发连续走了两个县城到樟树，行程60公里。那时原来的滕王阁已毁坏多年，还没有重建，所以我在南昌看不到滕王阁。 39年过去，弹指一挥间，2006年我应邀访问南昌大学，第二次来到南昌，参观了新建的滕王阁。新建的滕王阁比历史上任何一次都更高，“飞阁流丹，下临无地”的大气派令人景仰。然而，

令我不解的是：滕王阁坐落在赣江边的平地上，往四周望去也都没有小山丘，更不用说“层峦耸翠”了。是不是王勃写文章的唐朝时候有“层峦”，以后由于一千多年沧海桑田的自然变化变成了平地？或者是人工的移山填海将层峦全部铲平变成了平地？而且，在滕王阁看见的《滕王阁序》的另外一个版本不是“层峦耸翠”而是“层台耸翠”，层台就不是山峦而是人工建立的楼阁。滕王阁的建筑大多数地方并不是红色而是绿色，说是层台耸翠也符合事实。到底是怎么回事，暂时让它存疑吧，也许哪一位了解南昌的历史和地理的朋友可以指教我。

本文作者（左）读研究生时和导师曾肯成（中）合影

梅花润笔

我在 1978 年到 1982 年读研期间，大部分时候住在合肥。而导师曾肯成住在北京。我们在合肥自己念书和搞研究，必要的时候到北京去与曾老师讨论。有一次，正要离开北京回合肥，曾老师说：“史济怀欠我一盆梅花，你催他尽快给我。”我觉得很奇怪，经过曾老师解释才知道是怎么回事。史济怀当时担任中国科大副校长，外事是他主管的工作之一。有一位日本友人来科大访问，写了一首中文诗赠给科大。史济怀觉得应当回赠这位日本友人一首诗。曾肯成是数学界有名的才子，写诗是拿手好戏，于是史济怀就请曾肯成代写一首诗回赠日本友人。曾肯成欣然命笔，科大和日本友人皆大欢喜。不过曾肯成觉得这首诗不能无偿奉献，向史济怀要一盆梅花作为酬劳。史济怀答应了，但一时还没有来得及准备好，所以曾肯成就让我帮他“讨债”。我当然不能向史济怀老师讨债，但还是向史老师问了梅花的事。史老师笑着说:“有这回事。知道了。”后来，我又到北京去见曾老师，问起梅花的事情。曾老师说：已经收到梅花了。

很多人看来，写诗和要梅花都是文人墨客的故事，与数学家的形象完全不相容。然而，曾肯成这个数学家却偏偏有这样的雅兴，除了数学和诗歌之外，他还喜欢侍弄花花草草。我刚到合肥的时候，他还带我参观了他在自家楼前种的一棵树，说这棵树是他种的“扎根树”，表示要永远扎根合肥。不到一个星期，由于他的女儿生病在安徽没能正确诊断，幸好马上到北京医治，才挽救过来。从此他也就呆在北京。有一次我去北京时，他还问起我去看了他的扎根树没有，扎根树长的怎样了。我笑道：你都离开合肥了，那棵树还叫扎根树吗？他说不是不愿意扎根，而是因为种种缘故不能够扎根。

桃李不言

1994 年，我们在南开大学参加第五届全国代数会议。会议期间，部分与会代表发起为代数学界的带头人段学复院士庆祝八十寿辰。由于段学复教授的身体不适合于从北京到天津去，参加祝寿会的代表就专程从天津坐车到北京来。

参加祝寿的代表都是段学复在各个时期的学生。曾肯成也是段学复的学生，我就算段学复的徒孙了，更何况段学复是我的博士答辩委员会主席，所以我算是双重的徒子徒孙。

参加祝寿的代表们共同筹划买了一个大大的景泰蓝花瓶送给段学复作为寿礼。同时委托曾肯成写几句祝贺词来代表大家向段学复表示心意。眼看举行祝寿仪式的时间

快要到了，曾肯成答应写的祝贺词还没有交卷。主持此事的万哲先急了，又不好意思自己去催曾肯成，就命令我去催曾肯成赶快完稿。我遵命去问曾老师，他却说不慌不慌，没有问题，一副胸有成竹的样子。我心里比较急，心想离祝寿只有几个小时了，即使他想好了祝贺词，要把这些话写出来也得花时间呀，怎么能不急呢？

曾肯成的祝寿词终于想出来了，只有八个字：

桃李不言，下自成蹊。

很多人以为“桃李”代表学生，以为将这两句话赠给段先生是赞扬他桃李满天下。曾肯成解释了这两句话的意思：桃李默默无声不说话，但喜欢桃李的人还是络绎不绝到桃树李树下来摘桃摘李，将桃李树下踩出了一条条路。将这两句话赠给段先生，是赞扬他从来不宣扬自己，但却受到大家共同的景仰。

段学复在祝寿会上回忆了自己几十年的历程。没有按照惯例历数自己的功劳和业绩，反而一次次回忆自己生过几场大病。除了身体的病痛，特别回忆起心灵的病痛——让他刻骨铭心的几件伤心事。最让他伤心的不是自己的坎坷而是别人的灾难，是他在反右斗争时被迫“挥泪斩马谡”，亲口将自己最得意的学生宣布为右派。他讲到这里忍不住再次挥泪，哽咽着无法继续说下去。

美梦难续

2004 年 5 月，黄金周刚到末尾，本来我已经买好机票先到广州参加张景中院士组织的教育数学学会的成立大会，再直飞哈尔滨参加对哈尔滨工业大学工科数学基地的检查。突然听到曾肯成老师不幸去世的噩耗，如五雷轰顶。立即将去广州、哈尔滨的机票全部退了，赶到北京，帮助曾肯成的女儿一起策划葬礼有关事宜。

曾肯成女儿接受我的建议，在父亲的追悼会场挂了对联“桃李不言，下自成蹊”。曾肯成送给段学复的这两句话，也恰是曾肯成自己一生的写照。他只知疯狂地干活，从来想不到要宣扬自己的成绩。他早期的理论研究的奇思妙想，都通通让别人去实现并发表文章，还不准署上他自己的名字。我读研究生时所知道并且仔细读过的他的文章，只有两篇发表在中国科大学报上的关于子群格的论文。按现在的考核标准，他一定提不上教授。可是他的人品水平和功绩众所周知，在文化大革命刚结束后的首次职称评审中他破格由讲师升任教授。他后来一头扎进信息安全领域，所作的工作绝对是开创性的，并且获得了国家科技进步奖一等奖、何梁何利奖。然而，这些奖项都不是他自己愿意申请的，而是他所创建的信息安全国家实验室的部下们硬逼他申请、帮他填表才获得的。

曾肯成去了，作为一个普通的退休教授去了。按照这个级别，只能由本单位的老干部处来主持办理治丧事宜。然而，应曾肯成女儿的邀请，全国人大副委员长丁石孙愿意担任治丧委员会主任。有关工作人员很奇怪：一个普普通通的退休教授怎么能“享受”这样“高级别的待遇”呢？他们打电话问曾肯成女儿：“曾肯成与丁石孙是什么关系？”曾肯成女儿回答说：“老同学。”曾肯成女儿向我讲起这件事。我说：“你应当回答：铁哥们。”

尽管丁石孙的腿脚不方便，但他还是亲自参加了曾肯成的追悼会。由于丁石孙是国家领导人，有严格的保安措施，我在追悼会上没有能够见到他。但是我见到了许许多多几十年没有见过的老师和校友，看见了一张张曾经熟识却又因岁月流逝而变得陌生的面孔。曾肯成经常说，他从来没有当过小组长以上的任何干部。（我有一次反驳他，说他所担任的国家实验室主任比小组长级别高很多了。但他说实验室主任不是官职。）因此，他也从来没有当过参加追悼会的长长的队伍中的任何一员的“上级领导”。当我看见这支长长的队伍迈着沉重的步伐缓缓地前进的时候，我仿佛觉得他们是走在一片桃树林中。桃花谢了，桃子摘了，只剩下枯枝。队伍缓缓地前进着，长得没有尽头。走进这支队伍的人们不是来欣赏花的芬芳，品尝果的美味，而是来感谢树的恩情，留下他们永远的赞美和崇敬。

我曾经写了两篇回忆录：《比梦更美好》、《名师培养了我》，并且为其中第二篇加了一个副标题《比梦更美好之二》。既然打出了《之二》的招牌，就是准备《之三》、《之四》、…，一直写下去组成一个系列。用《比梦更美好》作为这个系列的总标题，颇有些志得意满的味道，以为从此苦尽甘来，可以将美梦一直做下去了。早就想好了这一篇《数学家的文学故事》的内容，并且准备将它作为《比梦更美好之三》。只是由于诸事繁忙，已经胸有成竹的这篇文章竟一拖再拖未能提笔完稿。不幸曾肯成老师去世，这篇文章再也不能被冠以“比梦更美好”的名目。而我也从志得意满的虚幻美梦中苏醒过来，重新面对客观世界不可抗拒的悲欢离合。拖了一年又一年，为了科大的校庆五十周年，终于下决心抽了两天时间完成这篇文章。所谓抽时间，包括坐飞机到外地出差的来回途中在机场候机及在天上飞行的时间。虽然可以以这篇文章勉强告慰曾老师的在天之灵，但也自感惭愧：为什么不在曾老师去世之前抽出两天时间来完成呢？

系列回忆录还要继续写下去。只不过不能再叫做《比梦更美好》了，另外想个题目吧。

哭曾肯成

丁石孙

二〇〇四年五月的一天，我突然接到朋友的电话，告诉我曾肯成已去世。我和曾肯成在清华是同班同学，一直保持着较好的关系。我得到消息后，感到很悲伤。他生病已经近十年了，想到他十多年来的痛苦，这对他也是一种解脱。我与他是同龄人，按照现在的人的寿命，他还是较早地离开了人世。回想曾肯成的一生，我感到他一生极其坎坷。他一九四六年考进清华数学系，我一九四八年转学到清华数学系三年级，从那以后，我们就维系了近六十年的友谊。同学几年来，我感觉到他的智力超群。他不但有很快的理解能力，而且有很强的记忆力，我认为这两者同时都强的人并不太多。在同学期间，曾肯成并不是非常用功，他看了许多闲书，花在数学上的时间并不是太多，但在全班同学当中是学得最好的，至少比我要好。在我们毕业前一年，就是一九四九年，华罗庚先生从美国回来，在数学系任教，开的课是他当时正在进行工作的典型群方面的，课程的名称叫矩阵几何。当时我们的系主任段学复先生与华罗庚有较好的关系，从我们毕业班他向华罗庚先生推荐了几个人，让他挑选。因此曾肯成毕业后就到科学院，在华罗庚的指导下进行工作。我留在清华数学系当助教。不久我就听说他跟华先生相处的不是太好。也许是曾肯成自己的想法太多，很难严格在华罗庚先生的指导下进行工作。大概在五四年前后，曾肯成到了科学院院部工作，后来又调到科学出版社做编辑工作。我记得有一天他来找我，问我愿不愿意翻译一本俄文书。这本书是苏联新出的一部经典丛书中的一本，是鲁金的，书名叫《解析几何论及其应用》。当时我完全不懂这本书讲的是什么东西。但是，知道这是一本经典著作。曾肯成告诉我，鲁金就是用这本书培养了一批苏联的数学家。我就答应了下来，利用空余时间一边念一边翻，翻译完就出版了。而这个时候曾肯成又从科学出版社调出来学俄文，因为五六年我们国家要定十二年科学规划，苏联派了一个专家组帮助中国政府定这个规划。曾肯成因为俄文学得比较好，他就成了专家组组长的翻译。当时我们的工作都比较忙，所以他的工作细节我并不太清楚。他的工作完成以后，就是十二年科学规划制定完以后，他就被派到莫斯科大学留学。五七年反右派开始，曾肯成就被打成右派遣送回国。据说他的罪名主要有两条：一条是他在国内订了文汇报，留学生大都从他这里借文汇报看。第二条，他经常和苏联的学生在一起辩论，批评苏联的政治制度。在当时批评政治制度是很大的罪名，那就是反对苏联。在毛泽东提出文汇报的资产阶级方向必须批判之后，同学们从他这里借文汇报看就变成他在宣传资产阶级方向。其实，据我了解，曾肯成并不太懂政治。反右前一段时间，文汇报是受到毛泽东表扬的。后来有其他留苏的同学告诉我，曾肯成俄文学得太好了，因为一般的留学生俄文还没有达到那种水平与苏联学生来辩论政治问题。就在这种罪名下，他就中断了学习，回到国内，戴上了右派帽子。一九五八年，科学院的各个研究所，有相当一批右派被分配到新成立的科技大学教书，而曾肯成是其中的一个。到六二年，曾肯成终于结婚了。我记得那一天我和万哲先去参加了他的婚礼。他的爱人是个大夫，姓龚。“文革”当中，他就随科技大学迁到了合肥。他的孩子叫曾红，这个孩子小时候身体不好，很快就发现生了红斑狼疮，这是一种致命的病。这就给他们的生活带来很大的困难。到科技大学以后，他的生活情况还可以，因为他教书的才能逐渐被大学发现，所以他在科技大学受到较好的待遇。打倒“四人帮”以后，他向学校提出要求，到北京来给女儿治病。那时候在北京成立了计算机学院，曾肯成就一边到计算机学院来兼课，一边给他女儿治病。他到北京以后，跟我接触就多了起来了。“文化大

丁石孙

曾肯成教授与来宾和同事在郭沫若校长雕像前合影

学生答辩会场；第三排（右二）发言者是曾肯成，右一是丁石孙

革命”结束的前后，解放军发现数学对密码有用，在北大办了短期训练班以后，又相继在科技大学、四川大学举办了一年到两年的训练班，而主要内容是代数。所以曾肯成从这时候就接触了密码。那个时候我们的任务主要是培养学生破密码，而曾肯成就觉得更重要的问题是我们来建立密码。后来有很长时间他的研究就转移到密码，而且要造密码机。八十年代中期，曾肯成关于造密码机的想法受到国家有关部门的重视，就成立了信息安全实验室。这个实验室的建立是我们国家有关部门对曾肯成工作的肯定。这个实验室一面做研究，一面培养学生，而且培养了好几位有杰出贡献的人才。正是在他的工作取得一定成绩的时候，他却病倒了，最后以至于生活不能自理。我对于曾肯成的一生细节并不是很清楚，我刚才说的只不过是大体的轮廓。从这个轮廓可以看出，曾肯成确实是极有才能的一个数学家，但是由于各种原因，他没有得到很好的机会，发展他的才能。他有很好的记忆力，表现为中国的诗词他可以背诵很多，英文诗甚至俄文诗他也能背一些。曾肯成不但有很高的才能，而且为人正直，不说假话。对于一些不公平的事件，极其气愤，这就使他得罪了很多人，在政治上也受到了不少不公平的待遇。所以他的死，我不但感到失去了一个很好的朋友，更重要的是失去了一个很有才能、应该给国家做出很重要的贡献的天才。我愿借这个机会对他的一生做扼要的描述，希望大家能记住曾肯成这样一个人。他本来应该为国家做出更大的贡献，但是由于种种原因，他过早地离开了我们。在曾肯成去世以后，他的女儿小红从美国赶回来，给我打了个电话，要求我担任曾肯成治丧委员会的主任。我很清楚她的目的是要想让科学院比较重视，我就答应了。由于我当了治丧委员会的主任，科学院的副院长白春礼就当了副主任。我想这也算我为老朋友最后做的一件事。他像一颗流星，穿过宇宙，很快就消失在黑暗之中。我衷心地希望今后为了后人的发展，我们要抓住闪亮的星星，为社会为人类做出应有的贡献。（2006 年 5 月 23 日）

转发后记

薛啸宙

这篇文章的作者丁石孙是北京大学原校长，全国人大副委员长。我怎么会转发他的文章呢？这得感谢一位我至今不知其真名的网友彭酷巴雅，是他看过我两年多以前写的一篇回忆我大学数学老师曾肯成的短文，留下了一段话，他说：“我正在看一篇北大丁石孙校长写的《哭曾肯成》的忆师友的回忆文章。对曾肯成有很高的评价。他是曾的治丧委员会的主任，副主任是白春礼。”我随即求他将此文寄我。不久彭酷巴雅真的寄来此文，而且是专门扫描后的 PDF 格式。我细细读过以后，一字一句抄打出来，每打一个字，都是我回忆、怀念曾肯成老师的一点一滴。

故事还没有完。另一位网友也看到我那篇短文，并且在评论里看到我希望彭酷巴雅把丁校长的文章寄给我的一段话。原来她是中国教育报的记者，采访过 1983 年我国文革后首批博士，其中就有曾先生的弟子。她与博士们相谈之中，对曾先生的人生命运颇多感慨。最近她正准备写一篇关于首批博士的导师们的稿子，希望对现今的高校治学、师生关系等有所反思。正巧看到我在求索丁石孙校长的文章，便给我发来 E-mail，询问能不能转寄她一份。我当即转寄给了她。

丁石孙校长文中一句话重重击打着我的心，我录下这句话作为结尾：

希望大家能记住曾肯成这样一个人。他本来应该为国家做出更大的贡献，但是由于种种原因，他过早地离开了我们。

原文链接：http://blog.sina.com.cn/s/blog_701645990100ppdz.html

爱思唯尔的衰落——我在其中的角色

Elsevier — my part in its downfall

W.T. Gowers ／文　张智民／译

作者简介：蒂莫西•高尔斯是英国皇家学会院士，剑桥大学数学教授，因其将泛函分析与组合数学联系起来的贡献于1998年获菲尔兹奖。

William Timothy Gowers, Fellow of the Royal Society, is a Royal Society Research Professor at Cambridge University. In 1998 he received the Fields Medal for his research connecting the fields of functional analysis and combinatorics.

荷兰人办的出版公司爱思唯尔（Elsevier）出版了许多世界上最知名的数学期刊，包括《数学进展》、《法国科学院报告》、《离散数学》、《欧洲组合数学》、《数学史》、《代数》、《逼近论》、《组合数学理论－A卷》、《泛函分析》、《几何与物理》、《数学分析和应用》、《数论》、《拓扑学》和《拓扑学及其应用》。然而多年来，它的运作方式却招致业内人士的强烈批评。这些批评可以大致归纳为以下几点：

1. 它的价位奇高——远高于平均值而至今未受惩罚，这简直是个奇迹。

2. 它侥幸成功的秘诀之一是"捆绑式销售"。出版商事先包装好的"包"，用户或者全要，或者全不要，不给图书馆自己选择期刊的余地。这样一来，为了几个必须的期刊，图书馆就不得不花大价钱去购买包罗万象的"包"。这里面大部分期刊根本不是用户所需的（比如声名狼藉的《混沌、孤立子和分形》是一个被许多数学家认为荒唐的杂志，然而世界各地的图书馆却不得不订购）。受到经费的限制，

The Dutch publisher Elsevier publishes many of the world's best known mathematics journals, including *Advances in Mathematics, Comptes Rendus Mathematique, Discrete Mathematics, The European Journal of Combinatorics, Historia Mathematica, Journal of Algebra, Journal of Approximation Theory, Journal of Combinatorics Theory Series-A, Journal of Functional Analysis, Journal of Geometry and Physics, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Journal of Number Theory, Topology,* and *Topology and its Applications*. For many years, it has also been heavily criticized for its business practices. Let me briefly summarize these criticisms.

1. It charges very high prices — so far above the average that it seems quite extraordinary that they can get away with it.

2. One method that they have for getting away with it is a practice known as "bundling", where instead of giving libraries the choice of which journals they want to subscribe to, they offer them the choice between a large collection of journals (chosen by them) or nothing at all. So if some Elsevier journals in the "bundle" are indispensable to a library, that library is forced to subscribe at very high subscription rates to a large number of journals, across all the sciences, many of which they do not want. (The journal *Chaos, Solitons and Fractals* is a notorious example of a journal that is regarded as a joke by many mathematicians, but which libraries all round the world must nevertheless subscribe to.) Given that libraries have limited budgets, this often means that they cannot subscribe to journals that they would much rather subscribe to, so it is not just libraries that are harmed, but other publishers, which is of course part of the motivation for the scheme.

3. If libraries attempt to negotiate better deals, Elsevier is ruthless about cutting off access to all their journals.

用户经常无力订购那些所需的杂志。这样一来受害者不仅仅是图书馆，也包括其他出版商，这当然也是爱思唯尔整个阴谋的一部分。

3. 假如图书馆想讨价还价，爱思唯尔会毫不留情地取消其所有期刊的订购。

4. 爱思唯尔支持许多阻止互联网开放阅读的方案，比如“研究成果议案”。他们还为 SOPA（Stop Online Privacy Act，即停止网络盗版）以及 PIPA（Protect IP Act，保护知识产权法）的通过进行了大量的游说。

我可以列举更多，但这已足够了。

真的难以理解，数学家们（包括其他科学家们）抱怨了这许多年，人们竟然允许这种状况持续至今。为什么不能告诉爱思唯尔我们不想在他们那里发表任何东西？

部分答案是：我们可以说不。众所周知（并非唯一）的例子是《拓扑学》整个编委会的集体辞职以及《拓扑学杂志》的创立——网站 http://en.wikipedia.org/wiki/Topology_(journal) 可以找到此事件的简单陈述。然而这毕竟是个例。问题在于，为什么我们听任如此不公正的待遇到了登峰造极的地步？我们为什么不想想没有他们事情会简单的多。

一个可能的解释是：改变现状需要联合行动。仅有一个图书馆拒绝订购是不足以动摇爱思唯尔的根基的。如果

4. Elsevier supports many of the measures, such as the Research Works Act, that attempt to stop the move to open access. They also supported SOPA and PIPA and lobbied strongly for them.

I could carry on, but I'll leave it there.

It might seem inexplicable that this situation has been allowed to continue. After all, mathematicians (and other scientists) have been complaining about it for a long time. Why can't we just tell Elsevier that we no longer wish to publish with them?

Well, part of the answer is that we can. A famous (and not unique) example where we did so was the resignation of the entire editorial board of *Topology* and the founding of the *Journal of Topology* . But as the list above shows, such examples are very much the exception rather than the rule, so the basic question remains: why do we allow ourselves to be messed about to this extraordinary extent, when one would have thought that nothing would be easier than to do without them?

A possible explanation is that to do something about the situation requires coordinated action. Even if one library refuses to subscribe to Elsevier journals, plenty of others will feel that they can't refuse, and Elsevier won't mind too much. But if all libraries were prepared to club together and negotiate jointly, doing a kind of reverse bundling — accept this deal or none of us will subscribe to any of your journals — then Elsevier's profits (which are huge, by the way) would be genuinely threatened. However, it seems unlikely that any such massive coordination between libraries will ever take place.

What about coordination between academics? What is to stop all the other editorial boards of Elsevier journals following the example of the board of the *Journal of Topology*? I actually don't know the answer to that: I can only assume that not enough people on those editorial boards care to make it worth it to them to go through what is likely to be a somewhat unpleasant and time-consuming process.

If top-down approaches to the problem don't work, then what about bottom-up approaches? Why do any of us publish papers in Elsevier journals? Let me answer that question in my own case. I have a paper in the *European Journal of Combinatorics*, which I submitted about 20 years ago, before I knew anything about the objections to Elsevier. And what's more, I didn't know it was an Elsevier journal until a few days ago. (Part of my reason for listing the journals at the beginning of this post was to

所有图书馆结成联盟去和他们谈判，实行逆向捆绑式销售——接受我们的条件，否则没有一家图书馆会订购你的杂志——只有这样，爱思唯尔的巨额利润才会真正受到威胁。不幸的是，这样的大规模图书馆联盟很难实现。

那么学术界的联盟呢？如果全部爱思唯尔所属期刊的编委会都仿效《拓扑学杂志》编委会的做法会怎样呢？事实上我没法回答这个问题：我只能假设没有足够的编委们会认为值得去经历这个痛苦漫长的过程。

如果这种自上而下的方式行不通，那么自下而上呢？试问我们每个人为什么要在爱思唯尔的期刊上发表文章？让我以自己为例来回答这个问题。我有篇文章发表在《欧洲组合数学》上，大概 20 年前投的稿，远在我了解到公众反对爱思唯尔之前；更糟糕的是，我是几天前才发现那是爱思唯尔的期刊。(我在本文开始列那个清单的部分原因就是奉劝读过本文的同行们不再用同样的不知道的借口把文章投给爱思唯尔。更完整的爱思唯尔期刊名单可以在以下网站找到，http://www.elsevier.com/wps/find/P11.cws_home/mathjournals)。

了解到爱思唯尔的种种劣迹之后，我清醒地意识到并决定从今不再向爱思唯尔的期刊投稿。我开始厌恶和他们有任何形式的合作。我过去还没有走到直接拒绝那一步；但是现在如果被邀加入一个爱思唯尔期刊的编委会，仅仅属于爱思唯尔本身就足以使我打定主意，毫不犹豫地加以拒绝。(这种情形的确发生过。但我当时有些退缩，把刊物隶属于爱思唯尔作为我犹豫不决的另一原因而非主要原因，但至少我提到了这个原因。）我目前没有加入任何爱思唯尔期刊的编委会，过去也没有。

然而现在，我感到之前的无声抗议还远远不够。我想我们与爱思唯尔合作的另一个原因仅仅是出于避免尴尬。如果我受邀为一个爱思唯尔期刊审稿，而我的确是一个合适的人选，那么拒绝就意味着对向我发出邀请的编辑不敬，而此人很可能是我的熟人。拒绝成为审稿人也有逃避义务之嫌和对作者（很可能也是熟人）有失公平。

由于这些原因，作为个人拒绝与爱思唯尔合作的道德论据似乎并不那么有说服力。的确，如果我们将爱思唯尔的虐待作为生活中无法避免的不幸事件，从而心平气和地接受它，那么拒绝与其合作就没有理由了。然而，我认为互联网最终会让这种虐待消失。那么数学界的利益所在就是让这光明的一天早日到来，越快越好，它远胜

make the second excuse less valid for anyone who reads this. A more complete list can be found http://www.elsevier.com/wps/find/P11.cws_home/mathjournals.

Once I did hear about Elsevier's behaviour, I made a conscious decision not to publish in Elsevier journals and I started to feel bad about cooperating with them in any way. I didn't go as far as to refuse, but if, say, I was asked to join the editorial board of an Elsevier journal and wasn't quite sure I wanted to, then the fact that it was Elsevier was enough to make my mind up. (This actually happened. I was a little cowardly and gave it as an additional reason for reluctance rather than the main reason, but I did at least mention it.) I am not knowingly on the editorial board of any Elsevier journal, and haven't been in the past either.

Now, however, I have decided that my previous quiet approach was not enough. I think another reason that we cooperate with Elsevier is simply that it is embarrassing not to. If I'm asked to referee a paper for an Elsevier journal and I am clearly an appropriate choice of referee, then refusing to do it feels like a criticism of the editor who has asked me, who may well be somebody I know. It also feels like shirking my duty and slightly letting down the authors, who may well also be people I know.

It is because of that that the moral argument in favour of refusing to cooperate, as an individual, with Elsevier is not quite straightforward. Indeed, if we were just to accept Elsevier's abuses as an unfortunate fact of life that is not going to go away, then there would be a genuine argument that refusing to cooperate with them is the wrong thing to do. However, I think that the abuses are eventually going to go away — the internet will see to that — so I think that the doing-my-duty argument is outweighed by the argument that it is in the interests of the mathematical community to get to that happy day as soon as we can. I also don't see any argument at all against refusing to submit papers to Elsevier journals.

So I am not only going to refuse to have anything to do with Elsevier journals from now on, but I am saying so publicly. I am by no means the first person to do this, but the more of us there are, the more socially acceptable it becomes, and that is my main reason for writing this post.

It occurs to me that it might help if there were a website somewhere, where mathematicians who have decided not to contribute in any way to Elsevier journals could sign their names

于履行义务的理由。另一方面，对于拒绝向爱思唯尔期刊投稿，我也看不到有任何反对的理由。

所以，从今往后，我不但拒绝与爱思唯尔的期刊有任何关系，而且向公众公开我的立场。我绝不是这样做的第一人，然而越多的人加入我们的行列，我们的抗争就越会被社会认可，这也是我撰写本文的主要目的。

我产生了一个念头，应该建立这样一个网站，使得决定不以任何方式为爱思唯尔期刊服务的数学家可以公开地签名。看到许多同行的名字，很多人会受到鼓励而采取同样的行动，这是表明自己立场的一个绝好方式。也许这样的网站已经存在。如果真是这样，我愿立刻签名；如果还没有，建立一个应该不难，但这远在我的专业能力之外。有人愿意做吗？

回到伦理的话题。谴责爱思唯尔不道德于事无补，很简单，作为大公司，他们一定要把利益最大化。然而与目前我们所采取的行动相比，我们手中其实有更大的筹码：我们根本不需要他们的服务。这不是说这里面没有伦理问题，但它是数学家之间的职业道德问题，这点不存在于数学家与爱思唯尔之间。简言之，我们不应该在爱思唯尔期刊上发表文章，这样可以有效地阻止出版商轻易采取行动伤害学术机构。（我曾经听到不少名牌大学数学家被爱思唯尔期刊拒之门外的故事。另外，我更想知道发展中国家的数学家们能否负担得起爱思唯尔的期刊的高价位；如果答案是否定的，我们又多了一个不向他们屈服的道德理由。）

即使由于众多的数学家拒绝与爱思唯尔合作而使其旗下的期刊质量下降，也不见得会改变它的经营方式。他们仍然能够将那些剩下的垃圾数学杂志与重要的物理、化学以及生物学杂志捆绑销售。然而，这将是一个强有力的宣战——可能最终会推动其他学科效仿——至少，数学界可以率先摆脱困扰。

最后我要说的是，爱思唯尔不是唯一的表现糟糕的出版公司，但似乎是最恶劣的。

附言：提醒一下非英语读者，本文标题参考的是这一书名——《阿道夫•希特勒的灭亡：我在其中扮演的角色》。

electronically. I think that some people would be encouraged to take a stand if they could see that many others were already doing so, and that it would be a good way of making that stand public. Perhaps such a site already exists, in which case I'd like to hear about it and add my name. If it doesn't, it should be pretty easy to set up, but way beyond my competence I’m afraid. Is there anyone out there who feels like doing it?

Returning to the subject of morality, I don't think it is helpful to accuse Elsevier of immoral behaviour: they are a big business and they want to maximize their profits, as businesses do. I see the argument as a straightforward practical one. Yes, they are like that, as one would expect, but we have much greater bargaining power than we are wielding at the moment, for the very simple reason that we don't actually need their services. That is not to say that morality doesn't come into it, but the moral issues are between mathematicians and other mathematicians rather than between mathematicians and Elsevier. In brief, if you publish in Elsevier journals you are making it easier for Elsevier to take action that harms academic institutions, so you shouldn't. (I'm thinking of stories I've been told about mathematicians at major universities who have been cut off from Elsevier journals. Something I don't know, but would be interested to learn, is whether mathematicians in developing countries can afford to get access to Elsevier journals. If not, then that would be another powerful moral argument against submitting to them.)

Even if so many mathematicians refused to cooperate with Elsevier that the quality of their journals plummeted, that wouldn't necessarily force Elsevier to change its ways, since it could continue to bundle its by now rubbishy mathematics journals together with important journals in physics, chemistry and biology. However, it would be a powerful gesture — perhaps even powerful enough for other sciences to follow suit eventually — and at least mathematics would be free of the problem.

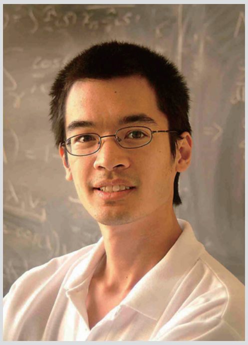
One final remark is that Elsevier is not the only publisher to behave in an objectionable way. However, it seems to be the worst.

PS For non-British readers, the titles of this post and the previous one are an oblique reference to the book titled "Adolf Hitler: My Part in his Downfall".

知识的代价

The cost of knowledge

陶哲轩／文　张智民／译



作者简介：陶哲轩是加州大学洛杉矶分校数学教授，英国皇家学会院士。因其对数论研究的贡献于2006年获菲尔兹奖。

Terence Tao is a Professor of mathematics at UCLA. He has won numerous honors and awards. In 2007 he was elected as a Fellow of the Royal Society. In 2006, he received the Fields Medal for his research in number theory.

几天前，受到蒂莫西•高尔斯（Tim Gowers）最近一篇博文的启发，一个叫作“知识的代价”的网站（http://thecostofknowledge.com/）诞生了，它提供了一个窗口，数学家们和其他学术界人士可以公开抗议学术出版公司爱思唯尔（ Elsevier ）的运作方式，特别是它极高的期刊定价，它的“捆绑式销售”政策——强迫图书馆为了少数高质量杂志而不得不同时订购大量没用的劣质杂志，以及它对近年来互联网开放阅读所采取的的反对立场——支持诸如“停止网络盗版议案”（SOPA）和“科研成果议案”（RWA）的游说活动清楚地表明了它的立场。（这些活动是有案可查的；比如回应高尔斯的呼吁博文的这个维基网站就搜集了几个这方面的链接。一些其他商业出版公司也有类似的举动，但一般没有爱思唯尔走得那么远，这也是为什么它成为众矢之的原因。）在前述的那个抗议网站，我们可以公开宣布不向爱思唯尔的期刊投稿，拒绝成为其刊物的审稿人或编委。

（过去曾有几个爱思唯尔所属期刊编委会由于定价分歧

A few days ago, inspired by this recent post of Tim Gowers, a web page entitled "the cost of knowledge" has been set up as a location for mathematicians and other academics to declare a protest against the academic publishing practices of Reed Elsevier, in particular with regard to their exceptionally high journal prices, their policy of "bundling" journals together sothat libraries are forced to purchase subscriptions to large numbers of low-quality journals in order to gain access to a handful of high-quality journals, and their opposition to the open access movement (as manifested, for instance, in their lobbying in support of legislation such as the Stop Online Piracy Act (SOPA) and the Research Works Act (RWA)). [These practices have been documented in a number of places; this wiki page, which was set up in response to Tim's post, collects several relevant links for this purpose. Some of the other ommercial publishers have exhibited similar behaviour, though usually not to the extent that Elsevier has, which is why this particular publisher is the focus of this protest.] At the protest site, one can publicly declare a refusal to either publish at an Elsevier journal, referee for an Elsevier journal, or join the board of an Elsevier journal.

(In the past, the editorial boards of several Elsevier journals have resigned over the pricing policies of the journal, most famously the board of *Topology* in 2006, but also the *Journal of Algorithms* in 2003, and a number of journals in other sciencesas well. Several libraries, such as those of Harvard and Cornell, have also managed to negotiate an unbundling of Elsevier journals, but most libraries are still unable to subscribe to such journals individually.)

For a more thorough discussion as to why such a protest is warranted, please see Tim's post on the matter (and the

而集体辞职的案例，最轰动的要算 2006《拓扑学》以及 2003 年《算法杂志》，还有一些其他学科的期刊。有几家图书馆，包括哈佛大学和康奈尔大学的图书馆成功地和爱思唯尔达成“解包”协议，但大多数图书馆仍然无法自己选择所订购的期刊。）

至于为什么这样的抗议是正当而合理的，更多更全面的讨论可以参考高尔斯的文章以及 100 多条回应。关于爱思唯尔的种种问题，不少数学家，尤其是那些数学系图书委员会的成员，或多或少了解一些，有些人已经私下里决定抵制爱思唯尔。然而重要的是把这件事公开化，使它为大众所知，而非仅仅限于小圈内。（有趣的是，这种私下小范围行为和公开行为的区别对于我所钟爱的逻辑智力游戏同样至关重要。但那是题外话了。）在网上也可以找到另一面的说法，比如爱思唯尔负责自然科学的高级副总裁大卫 • 克拉克（David Clark）对于高尔斯博文的回应。

就我自己而言，尽管过去有大约百分之九的文章发表在爱思唯尔期刊上（包括一两篇正在排版的），我决定从今天起，不再向爱思唯尔投稿，也拒绝成为其期刊的编委，尽管我将继续为这些杂志审一些稿件。就在撰写此文的时候，在抗议网站建立的短短 4 天之内已经有 500 多位数学家以及其他学科的科学家签了名。

我很幸运，自己已经没有在一批指定的期刊上发表文章的压力了。正因为如此，对这个抗议采取什么样的行动是每个人自己的选择，我不会做任何建议。然而，我认为将我们对这一事件的看法广为传播是值得的，至少使大家知道存在这样一个抗议活动（更多的呼吁和相关内容可在上面提到的网站找到）。

100+comments to that post). Many of the issues regarding Elsevier were already known to some extent to many mathematicians (particularly those who have served on departmental library committees), several of whom had already privately made the decision to boycott Elsevier; but nevertheless it is important to bring these issues out into the open, to make them commonly known as opposed to merely mutually known. (Amusingly, this distinction is also of crucial importance in my favorite logic puzzle, but that's another story.) One can also see Elsevier's side of the story in this response to Tim's post by David Clark (the Senior Vice President for Physical Sciences at Elsevier).

For my own part, though I have sent about 9% of my papers in the past to Elsevier journals (with one or two still in press), I have now elected not to submit any further papers to these journals, nor to serve on their editorial boards, though I will continue refereeing some papers from these journals. As of this time of writing, over five hundred mathematicians and other academics have also signed on to the protest in the four days that the site has been active.

Admittedly, I am fortunate enough to be at a stage of career in which I am not pressured to publish in a very specific set of journals, and as such, I am not making a recommendation as to what anyone else should do or not do regarding this protest. However, I do feel that it is worth spreading awareness, at least, of the fact that such protests exist (and some additional petitions on related issues can be found at the previously mentioned wiki page).

计算机正在改变数学

彭翕成　张景中

计算机能否推理？

人不是机器。这句俗语通常是用来说明人需要休息，而机器则可以不眠不休地干下去。

把繁琐沉重的活交给机器，人可以解放出来做更富于创造性的工作。体力劳动如此，计算机出现后脑力劳动亦如此。

计算机科学技术迅速发展，机器的智能化程度越来越高。但你要是告诉别人计算机能解数学题，且所给的解法和人给出的解法相似甚至更简洁优美，这就很难让人相信了。世界上研究机器推理的一流学者，曾经普遍认为这是不可能的。

因为推理是人独有的高级智慧。

人通过推理，可以由此及彼，由表及里，去粗取精，去伪存真。

那么人到底能不能把智慧赋予给计算机呢？

计算机是人的学生。它的本领是人教的；它还是笨学生，不教不会。但它又是好学生，会牢牢记住你教给它的方法，一丝不苟地按你设计的程序去做。如果你循循善诱，它就能青出于蓝。

另一方面，计算机的发展，特别是机器证明的出现，给数学和哲学带来的影响是巨大而深刻的。

就拿中学数学来说吧。初中数学大致分为代数和几何两部分。代数问题的求解通常是比较规范的，按照一定的步骤依葫芦画瓢即可，关键是计算不出错；而几何则不同，难度稍大的题目，往往无从下手，好似羚羊挂角，无迹可寻。辅助线从何而来，要么是妙手偶得之，要么是千锤百炼得来。正因为如此，当古代托勒密王向欧几里德请教学习几何的捷径时，欧几里德直率地说：几何无王者之路！

计算机的发明，是为计算而来。不管计算机将来如何发展，如何智能化，高速的计算能力始终是计算机的根本。

为计算而发明的计算机，能够证明几何定理么？中国数学家在上个世纪 80 年代提出的例证法算是一种，因为计算量很大，大多数情况只能借助计算机来完成。除此之外，还有别的什么方法吗？答案是肯定的。用机器证明的数学定理中，最为人津津乐道的当属四色定理。

四色定理的机器证明

四色定理最先是由一位叫古德里的英国大学生提出来的，而德• 摩尔根 1852 年 10 月 23 日致数学家哈密顿的信中提供了有关四色定理来源的最原始记载。他在信中简述


“四色定理”示意图（左）；最早试图证明四色定理的摩尔根（Augustus De Morgan，1806-1871）（右）

了自己证明四色定理的设想与感受。

四色问题的内容是：“任何一张地图只用四种颜色就能使具有共同边界的国家着上不同的颜色。”用数学语言表示，即“将平面任意地细分为不相重叠的区域，每一个区域总可以用 1、2、3、4 这四个数字之一来标记，而不会使相邻的两个区域有相同的数字。”

一百多年以来，虽然数学家们为证明这条定理绞尽脑汁，所引进的概念与方法刺激了拓扑学与图论的发展，但一直没有给出理论证明。

1976 年，美国数学家阿佩尔与哈肯借助电子计算机，用了 1200 多个小时，作了上百亿次判断，终于完成了四色定理的证明，轰动全世界。美国为此发行了一枚纪念邮票，上面写着“四种颜色就够了”。

当一些数学家为这个高难度的定理得到解决而庆祝时，更多的数学家则是对计算机给出的证明表示质疑。质疑的理由有二：

一是对于相当多的定理证明，特别是那些被称为“下金蛋”的数学问题，最重要的意义不在于论证最终的真假，而是在求证过程中不断地发现新方法。

二是计算机凭借高速计算能力作出的所谓证明，数学家无法人工检验，谁知道中间会不会出错呢？

新事物的产生和发展，往往不是一帆风顺的。

在计算机还没发明的时候，就有数学家提出机器证明（设计一种机器代替人推理）的设想，遭到了很多数学家的反对。数学大师庞加莱认为：“你可以将牲畜赶到机器的前端，机器将其宰杀后储存成罐头输出。难道你可以把定理的条件送到机器的前端，机器自动输出结论么？这实在是不可思议！”

而在四色定理机器证明之后，反对声仍然强烈。有评论认为：“机器证明破坏了数学的优美。一个好的数学证明应当像一首诗——而这纯粹是一本电话簿！”

普林斯顿数学教授约翰•康威在接受《纽约时报》采访时说：“我不喜欢它们（计算机证明），因为你感觉不知道究竟发生了什么。你不能从中获得任何新的见地。”

持这种观点的数学家不是个别的，他们认为：如果一个难题被一种新方法解决了，这是一件了不起的事情。但是如果解决的方案只是现存方法的反复使用，那只能证明解决者的聪明而已。这不利于数学的发展。

还有人指出：传统数学研究四色定理，虽未获得最终成功，但促进了某些数学分支的发展 (主要是图论、拓扑等)；而机器证明四色定理结论是对的，又能咋样呢？只得到没有灵魂的空壳而已。因为四色定理本身的意义并不大。现在数学界普遍承认五色定理了，但世界上绝大多数的地图颜色都超过 5 种。因为除了考虑颜色种类最少，现实生活中还有其他的考虑。

但是，机器证明四色定理毕竟丰富了我们的知识。以不能产生新方法为理由就拒绝承认，是说不过去的。用机器作为数学研究的辅助工具，这本身就是新的方法。

从历史上看，工具对数学的发展有重大的影响。筹算和珠算无疑推进了位置记数法和相应的计算系统的发展；圆

规和直尺的使用不但推动了几何作图的研究，对近世代数的产生也有深远影响。计算机能够计算，能够作图，也应当能够推理。事实上，在计算机出现之前，数学家已经论证了推理化为计算的可能。

计算机的能力远远超过筹算、珠算、圆规和直尺的总和。数学家有了这样强大的工具，数学的面貌自然会有深刻的变化。

计算机证明的定理可靠吗?

机器证明是否可靠，如何检验，这确实是一个问题。

不过 , 人工证明也要面对这个问题。

当代的数学有些已经很复杂。有些数学定理的证明超过百页 , 这使得审稿成为异常艰辛的工作。

以代数中著名的有限单群分类定理为例。确切来说，这不是一个定理而是一组定理。它的证明由五百篇论文组成，总页数超过一万页。世界上恐怕没有人能认真地把这个证明从头到尾读过，更别说验证其正确性了。这样冗长的证明使不少数学家怀疑其中会有错误。对此，在该定理的最后证明中起重要作用的 Aschbacher 评论道 :“一方面，当证明长度增加时，错误的概率也增加了。在有限群分类定理中出现错误的概率实际上是 1。但是另一方面，任何单个错误不能被容易地改正的概率也是 0。随着时间的推移，我们将会有机会推敲证明，对他的信任度必定会增加。”

前苏联数学家彼得洛夫斯基院士在常微分方程定性理论方面有一个著名的结果，多年后被中国的一位研究生用反例推翻了。

前苏联另一位专家关于钢管校直机械有一个著名公式，这公式甚至被写入了教科书，获得过国家大奖。中国的一位技术员在实践中发现按此公式设计的苏联设备废品率偏高，于是向一位数学教师请教，最后发现了这公式推导中有错，终于改进了机器的设计而获得好的效果。这位技术员因此获得国家发明一等奖。

人工证明都会出错且难以检验，又何必苛求计算机呢？何况，计算机科学已经证明，有些定理即使它的最短的证明也会很长很长。例如，可以超过十万页，也可以超过百万页。

尽管如此，大家还是希望计算机能够干得更出色，更可信。

计算机得出的结果，有些是容易被检验，容易被相信的。例如，把某一个很大的整数分解为两个大于 1 的整数的乘积，这是破解一类密码的关键任务。大型高速计算机工作几个月才分解了一个整数，人只要几分钟就能检验结果是否正确。

类似的，计算机算出来的方程的解是否正确，也不难检验。

但定理证明是另一回事。在例证法中，面对计算机用十万个例子证明了的一条几何定理，我们会有什么想法？与此类似，用代数方法经过成百上千项的多项式计算而证明的几何定理，我们会有什么想法？

我们可以相信这条被计算机宣布成立的定理。前提是计算机的硬件是可靠的，计算机的操作系统是可靠的，机器证明软件的程序是可靠的，程序依据的算法和理论是可靠的。

算法和理论的可靠性，通过学习和讨论，也不难被确认。

其他几种可靠性，可以经过大量实践验证。

譬如让另外一批人，用另外的算法编程，用另外的机器运行，假如推导出来的结论与之前得到的一致，那么其可靠性就得到了增强。因为每个定理都反映一个客观事实。这个事实不会因发现的人的不同而改变，同样也不会因为证明程序的不同而改变。

这样做，从哲学上看，是不是改变了数学真理的性质呢？

另一种方法，是计算机给出人工能够检验的证明。

1976 年，吴文俊院士发表了检验几何命题的有效的机械化方法。吴方法的成功激起了几何定理机器证明的研究热潮。到 1992 年，基于几何不变量的消点方法出现，实现了几何定理可读证明在计算机上的自动生成。这一工作被国际同行誉为计算机处理几何问题的里程碑。

伴随着计算机技术的进步，直到 1996 年出现了基于前推模式的“几何信息搜索系统”，成功地证明了上百个非平凡的几何命题，收到了良好的效果。

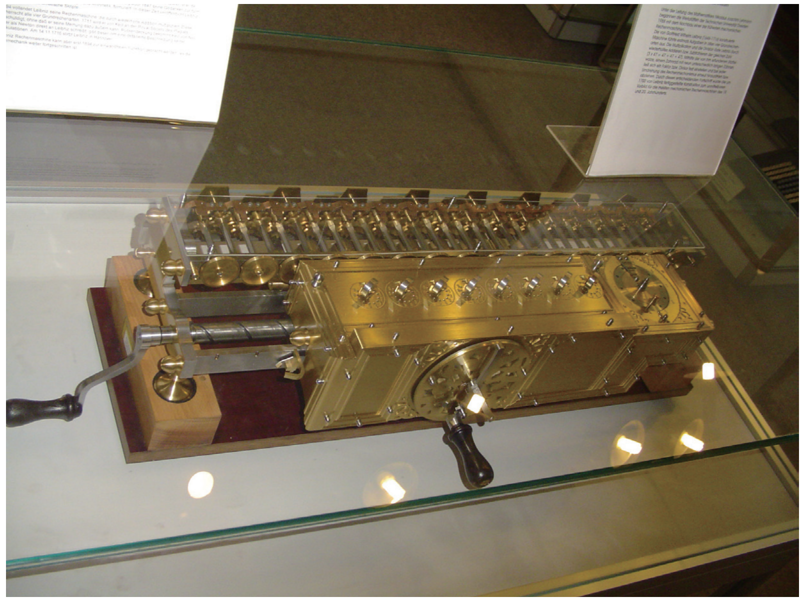
人们对机器证明的反对 , 多半集中于它的繁琐和不可检验。一位反对机器证明的数学家说 : 数学的光荣，便在于它现有的一切证明方法，都是脉络绵密，层次分明，就像天衣无缝，出不了差错的。而使用计算机则有可能出现人无法检验出来的差错，而这差错可能是致命的。

现在已经实现的几何定理可读机器求解，所生成的解答其推理过程的简洁优美可以与人工解答媲美。虽然解决的只是一小类数学问题，远没有达到解决四色定理、哥德巴赫猜想这类难题的水平，但至少说明了机器证明和人工证明之间并没有不可逾越的鸿沟。人类的创造力再一次得到展现。

国外还出现一些人机交互的计算机推理系统，如 Coq、Otter、Roo 等等。借助这些系统，能够用来进行不同的数学领域的推理，所生成的证明类似于数学家的工作。

对于人类面临的很多难题，既然单个群体无法解决，那我们齐心协力一起解决不是很好么？数学家提供理论基础，计算机科学家设计算法并编程实现，而物理学家和工程师们则要保证计算机本身的稳定性。

我们坚信，机器证明不但不会像有些数学家担心的那样“使数学走向衰败”，而且还将使数学家摆脱大量的繁琐的机械计算和推理，把节省下来的时间和精力用于更加富有创造性的工作中去。



微积分的共同发明者莱布尼茨（左）同时也是机器数学的实践者；他在三百多年前就研制了一台手动数字计算机（右）

数学和计算机共同发展

数学和计算机都在以前所未有的速度发展着：

计算机的出现，改变着数学家的工作方法，提高了数学家工作的效率。数学家把大量机械性重复性的劳动交给计算机，自己可以从事更抽象更富于创新精神的思考。计算机计算作图的结果，增强了数学家的预见能力，引导数学家发现有意义的问题和现象。

计算机的出现，促使新的数学分支的诞生。计算数学、计算几何、计算机代数、计算复杂性、计算可靠性、机器证明、计算机作图、动态几何等等与计算机血肉相连的分支应运而生。有些分支在学科分类上已经归于计算机科学，但其本质仍是数学。

计算机的出现正在开始改变着人们对数学的看法。出现了数学实验和实验数学。用计算机做实验，发现了大量有趣的数学现象，如分形、混沌、分岔等许多过去想到看不到或者想也想不到的东西。这些东西使数学家大伤脑筋又大开眼界。有人惊呼，数学越来越像实验科学了。

计算机科学就好比是数学科学的孩子。虽然这个孩子长大了，搬出去住了，但身上始终流着母亲的血液，仍然从母亲这里吸取着养料。同时，数学也并没有白养这个孩子。在计算机产生和发展的过程中，数学也同时得到发展。计算机成为数学研究的工具已是大势所趋，不可阻挡了。

计算机一直被认为是数学家最引以为豪的发明。既然现在最好的计算机可以在比赛中打败世界象棋冠军，那么，有理由相信未来的计算机也应该能够解出难倒了最伟大的数学家的数学难题。倘真的有那么一天，母亲绝不会因为孩子的超越而郁闷，而是会为孩子的成就由衷地高兴。

我们甚至可以设想到了那一天，每一个数学家都是计算机高手，而机器证明和人工证明也可以很好地转化。当数学家向杂志投稿时，审稿人会问：你的证明经过计算机验证了吗？那时候，莱布尼茨之梦[注]才算真正实现，数学从此有了王者之路！

注：莱布尼茨之梦——1673年，27岁的莱布尼茨向人们展示了一台能够执行四种算术基本运算的计算机模型。对这位年轻人来说，这只是迈出的一小步。自青年时期开始，具有宏大而惊人眼光的莱布尼茨脑中就产生了一个奇思妙想：创造一种“普遍文字”，能够把人类的思想还原为计算，并且制造出强大的机器能执行这些计算。这意味着人类可以通过“让它算一下”的方式一劳永逸地解决几乎所有问题。何等宏伟的梦想！

作者介绍：

张景中，中国科学院院士。多年从事几何算法和定理机器证明研究，并热心数学教育，所著《数学家的眼光》等科普作品曾获国家科技进步奖和全国科普创作奖。

开方乘 10 记考分

彭翕成

张景中教授做客学者讲坛

一次，笔者与张景中先生感叹："现在很多大学生平时用功不够，以致考试时分数普遍较低，不及格人数占很大的比例。这给任课老师带来麻烦，因为不少的大学都有成文或不成文的规定，不及格人数不能超过某个比例，否则该课程考试作废，任课老师除了重新出试卷考试之外，还得写检查反省。"

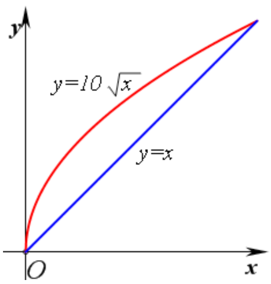
张先生表示现在大学教育确实让人担忧，他说："以前我读书（在北京大学）和教书（在中国科技大学）的时候，也有类似的事情。不过不是因为学生学得不行，而是由于那时候的老师不出送分题，每一个题目都有一定难度，所以如果平时不用功的话，考试及格是很困难的。遇到这样的情况，一些老师则会采取开方乘 10 的算分方法，减少不及格的人数。所谓开方乘 10，就是将考试分数开方之后再乘 10。不过，大学生们还是不希望老师用开方乘 10 这种计分法，因为这说明考试结果已经是惨不忍睹了。"

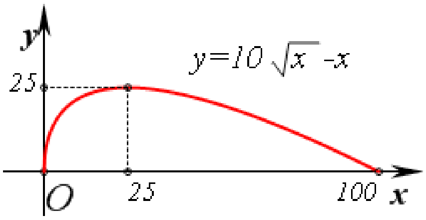
学生考试不及格，老师想办法加分，这种做法是对是错，笔者在此不想作什么评论。不过这种开方乘 10 的算分方法，比起那种每人加多少分更有数学味一些。

如果设原来考试得分为 x，那么开方乘 10 后则为 $10\sqrt{x}$ 。容易发现，原来考 0 分和考 100 的人分数保持不变，可谓是"不动点"；而原本要考 60 分才能及格，现在只要考 36 分就可以了。

假设一个人的考试分数是由从 0 到 100 随机取数的话，那么开方乘 10 这种记分方法就将及格的几率从原来的 40％提高到 64％。但这个假设的前提是不成立的，因为现在考试的命题对难度有规定，一般都是要求基础题、中等题、难题的比例为 6∶3∶1，也就是说大部分分数都是很容易得的，倘若还按照开方乘 10 的算法，那么及格的几率远比 64％高很多。一个人若连 36 分都得不到，那也确实是无可救药了。

下面我们进行定量分析。





如果求函数$10\sqrt{x}-x$的导数的零点，可得到x=25，也就是说原来得25分的人加分最多，可以加25分。但这个加25分的人却不是最幸运的人，因为加分后仍然没有及格。幸运的人应该是原来得分在36至59之间的，因为开方乘10使他们从原来的不及格变及格了，而最幸运的应该是得36分的人，尽管他只加了24分。

对0和100之间所有的x的值，我们可以验证$10\sqrt{x}-x$的二阶导数都恒小于0。也就是说开方乘10这种记分方法除了两个极端（0分和100分）之外，其余的人都加了分。那么这应该是皆大欢喜啊，但实际操作起来，还得考虑一个因素，就是考试分数都是整数，没有小数。那么原来得分开方乘10之后，还得进行一次四舍五入的操作。举例来说，甲如果考59分，开方乘10后为76.81，四舍五入后为77分；乙如果考60分，开方乘10后为77.45，四舍五入后也为77分；那么，一个原来及格了的人竟然和一个原本没有及格的人得一样多的分数。也许此时乙的心里会感到一些不平衡吧。

如果考试总分超过100分，比如说是120分，那么公式则改为$\sqrt{120x}$。原则就是端点不变，其余人或多或少都要加点分。

开方乘10是谁最先创造的呢？有人说是钱学森先生。

钱先生担任中国科技大学力学系主任后，给科大首届力学系的学生的开卷考试只出了两道题，第一道概念题，占30分；第二道题是真正的考验，题目是："从地球上发射一枚火箭，绕过太阳再返回到地球上来，请列出方程求解。"这道题可把全班学生都难住了。你若平时只会死读书不会活运用，根本做不出来。考试从上午八点半开始，直到中午还没有一个人交卷，中间还晕倒两个学生被抬出去。钱老宣布说："吃午饭吧，吃完接着考。"直到傍晚也做不出来，大家只好交卷。成绩出来，竟有95%的人不及格。于是钱先生便想出了开方乘10的妙招，结果80%的人都及格了，皆大欢喜。

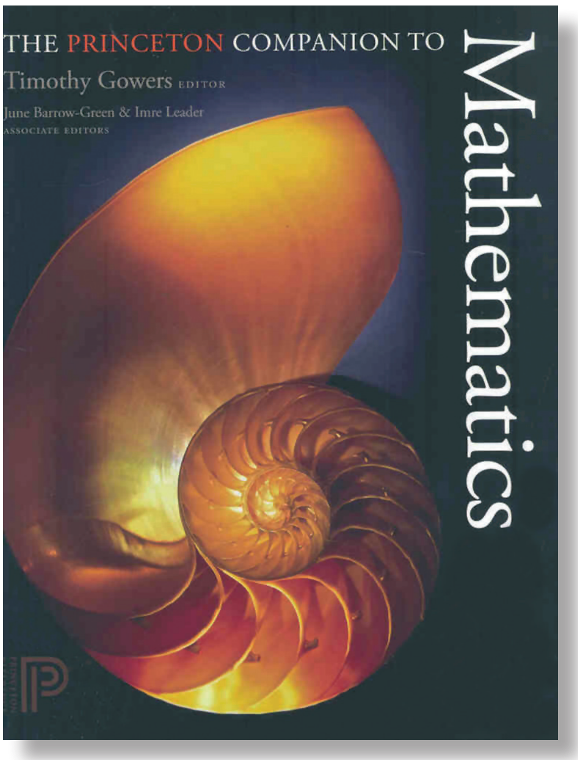
作者介绍：

彭翕成，现工作于武汉华中师范大学国家数字化学习工程技术研究中心。主要从事数学文化传播和数学教育技术的普及。发表论文百余篇，出版著作多部。博客地址：http://blog.sina.com.cn/pxc417

现代数学主要分支学科的通俗介绍

——读《普林斯顿数学指南》

陈跃



《普林斯顿数学指南》获得 2011 年美国数学协会欧拉图书奖

20 世纪是数学飞速发展的世纪，尤其是在 20 世纪的下半叶，数学知识出现了前所未有的大爆炸。如今的现代数学真正成为了人类知识领域中最博大精深的一个，其抽象与艰深的程度登峰造极，这对任何学习现代数学的人们来说都是巨大的挑战。

回想五十多年前，前苏联一批数学家为了普及近代数学知识，为当时的学生撰写了一套三卷的名著《数学——它的内容、方法和意义》[1]。这套书主要是讲在 18 与 19 世纪中形成的近代数学，它分章通俗介绍了以下 17 个分支学科，包括数学分析（即微积分）、平面与空间解析几何、代数方程理论、常微分方程、偏微分方程、曲线和曲面的微分几何、变分法、复变函数论、初等数论、概率论、函数逼近法、实变函数论、线性代数、非欧几何、拓扑学、泛函分析、抽象代数等。这套名著抓住这些分支学科的最基本的思想，深入浅出地通俗介绍这些学科的研究方法。这套书被译成中文后受到普遍欢迎，多次再版，可以说影响了国内整整一代数学家的成长。我们可以看到，这套书给出的这个近代数学分支学科的基本框架实际上就是以后几十年为大家所熟悉的大学数学专业的课程体系。它大致反映了数学这个学科从 18 世纪到 20 世纪初期的发展进程和主要成就。

时代发展到今日，虽然这套书对于数学专业本科生的教育还有一定的作用，但对于研究生阶段学习的现代数学来说，显然已经不够用了。令人高兴的是现在已经有了一个很好的替代读物。由美国普林斯顿大学出版社在 2008 年出版的《普林斯顿数学指南》[2]（The Princeton Companion to Mathematics，以下简称《指南》）是一本帮助现代数学初学者的综合普及类工具书。这本书的篇幅厚达一千多页。它不同于一般百科辞典的地方是：尽量用通俗浅显的语言和历史途径法[3]来深入浅出地讲解现代数学中一些最基本的思想和方法（而不是面面俱到地给出所有数学名词的解释），以及现代数学想要解决的主要问题，并且在讲解的时候适当地降低数学表述的准确度。这样就很好地满足了学生们释疑解惑的需要，同时也改变了人们“现代数学不大可能通俗介绍”的想法。

这本《指南》总共包括“（一）引言”、“（二）现代数学的起源”、“（三）数学概念”、“（四）现代数学的分支”、“（五）定理与问题”、“（六）数学家”、“（七）数学的影响”和“（八）看法与建议”等八个部分。其中第一部分和第八部分是用平易的语言向学生介绍现代数学大致包含的内容、研究数学所要达到的目标以及对于学习现代数学的建议，第二和第六部分简要介绍了数学发展的历史以及重要数学家的生平，第七部分则非常全面地介绍了数学对自然科学和社会科学的

各种应用和影响。整本《指南》最重要的部分当然是介绍现代数学各主要分支学科的第四部分，而第三和第五部分则是进一步解释第四部分所涉及的一些现代数学最基本概念和最重要定理的具体内涵。

《普林斯顿数学指南》主编 Timothy Gowers 是剑桥大学教授，1998 年菲尔兹奖获得者

《指南》的第四部分在介绍现代数学的各主要分支学科时，按照 20 世纪现代数学历史发展的主要线索，力求通俗地介绍现代数学各主要分支学科所要解决的问题和一些具有代表性的成果。为此《指南》尽量减少使用高深的专业术语，并且选取对解决研究生专业基础课教学难点有帮助的历史素材和至关重要的思想方法，努力还原被擦去的数学家“走过的痕迹”。不过，在《指南》第四部分极其有限的三百多页的篇幅内，只能对现代数学各主要学科中极少的基本内容来进行解说。

在现代数学众多的分支学科中，《指南》着重强调了数论、代数几何、拓扑学、表示论等基础分支学科的重要性，这是特别值得我们注意的。根据 20 世纪数学发展的主要潮流和在未来的发展前途，该书认为现在的学生应该着重学习的现代数学分支学科依次为：代数数论、解析数论、计算数论、代数几何、算术（代数）几何、代数拓扑、微分拓扑、参模空间、表示论、几何与组合群论、调和分析、偏微分方程、广义相对论、动力系统、算子代数、镜像对称、顶点算子代数、代数组合学、概率组合学、计算复杂性、数值分析、集合论、逻辑与模型论、随机过程、概率模型和概率模拟等 26 门分支学科。这与目前我们国内对现代数学分支学科的划分与强调有不小的差异。我们比较重视让学生学习偏微分方程、计算数学、泛函分析、微分几何等比较传统经典的学科。但是另一方面，对数论、代数几何以及拓扑学等主流的基础学科，我们缺乏必要的关注与投入。这其实也是导致我国基础数学研究水平还处于较低层次的一个主要原因。例如目前在国内上百所设置了数学专业的高校中，只有个别几个学校能够开设基础的代数几何课程，而我国迄今为止由国内学者写的代数几何基础的中文教材只有一本 [4]。

《指南》对于现代数学主要分支学科的这种强调的重要意义在于：它能帮助现代数学的初学者拓展学习的视野，从整体上了解日趋统一的现代数学的来龙去脉，为以后的学习与研究打下坚实的基础，并且能够从浩如烟海的数学文献中辨别出现代数学进一步发展的可能方向。

以下仅对《指南》第四部分中位于前面的一部分现代数学基础分支学科的内容作一些简要的分析与说明。

代数数论 代数数论是一门运用抽象代数的方法来研究代数数域和代数整数环的算术性质的分支学科。《指南》按照数论发展的历史途径，从古典的二次无理数逼近问题逐步引入二次代数整数环的概念，然后直接讨论其至关重要的唯一分解问题，这是因为在历史上试图证明费马大定理而导致人们关注这一重要问题。为了弄清楚影响唯一分解性质的障碍，《指南》用具体的计算例子介绍了高斯的重要发现：即可以用二元二次型来度量二次代数整数环是否具备唯一分解的性质，以及如果不具备的话在何种程度上具备。由此引入戴德金非常基本的理想概念，它可以将二元二次型所涉及的繁琐计算逐步转化为理想的运算，并且还能非常自然地形成理想类群和理想类数这两个更抽象的概念，以便于用来衡量是否具备唯一分解性质。《指南》详细介绍的另一个衡量唯一分解性质的工具是经典的椭圆模函数，它在某些代数整数上的取值也是代数整数，这就引出了克罗内克希望的将某些他感兴趣的代数数表示成某些解析函数的值的“青春之梦”，也就是将代数数论与经典代数几何统一起来的梦想。这个梦想实际上也就是后来现代代数几何产生的萌芽，并且随着群表示论的加入，最终导致产生了庞大的 Langlands（朗兰兹）猜想（或 Langlands 纲领）。

解析数论 与代数数论关注不定方程的精确解不同，解析数论着重于研究如何获得数论函数的好的近似，为

此必须要运用分析中函数逼近的方法。《指南》从详细介绍由高斯发现的估计素数个数上界的素数（分布）定理开始，先推导出欧拉运用整数的唯一分解性质而得到的经典的欧拉乘积公式，从中通过复变函数解析延拓的方法产生了著名的黎曼 ζ 函数。再用阶梯函数的技巧具体给出了素数（分布）定理与黎曼 ζ 函数的零点之间的奇妙联系，由此看出研究黎曼 ζ 函数的重要意义，并进一步引导出了有关黎曼 ζ 函数零点分布的黎曼猜想。接下来，《指南》介绍了与素数（分布）定理类似的估计模 q 与 a 同余的素数个数的问题，从中自然地引出了与黎曼 ζ 函数相似的重要的狄里克雷 L- 函数，这时也有相应的“广义黎曼猜想”。此外《指南》还讲了椭圆曲线的 L- 函数及其基本性质，并且指出：出现在算术（代数）几何中的各种 L- 函数的系数可以用来描述满足某种模 p 方程的点的个数，而后来的 Langlands 纲领则是寻求对于这些联系的更深入的理解。

代数几何 依 I.R.Shafarevich（沙伐列维奇）的观点[5]，代数几何在 20 世纪现代数学的发展历史中占据着一个比较中心的位置。这是因为在 20 世纪基础数学各主要分支学科的发展过程中，代数几何所起的推动作用最大。抽象代数、代数拓扑与微分拓扑、整体微分几何以及分析中许多重要的理论都是因代数几何的需要而提出的，同时代数几何也将分析、拓扑和几何中的许多基本概念抽象提升到了更高的层次，所以说代数几何是 20 世纪数学统一化的一个主要源动力。在大多数 20 世纪现代数学重大进步（例如获得菲尔兹奖和沃尔夫奖的工作）的背后，总能看到代数几何的影子。代数几何最早起源于在 17 和 18 世纪牛顿和 Bezout（贝朱）等人关于平面代数曲线的研究工作。到了 19 世纪上半叶射影几何登场后，才开始出现关于曲线和曲面的初步的代数几何理论。然后黎曼在研究阿贝尔积分理论的过程中提出了内蕴的黎曼面概念和代数函数的理论，打开了通向现代代数几何的大门。在这之后，分析学派、几何学派和代数学派分别用他们自己的语言进一步发展了这门不同寻常的学科。一直要等到 20 世纪的中叶，当整体微分几何、多复变函数、抽象代数，以及拓扑学得到充分的发展后，A. Grothendieck（格罗腾迪克）才能在这几个学派工作的基础上，用更精确的交换代数与同调代数工具、更先进的几何与拓扑思想将经典的代数簇理论推广成适用面更广的概形 (schemes) 理论，从而将代数几何打造成一个将几何、分析和代数统一起来的极其完美的理论体系，促进了 20 世纪下半叶基础数学的大发展。《指南》在介绍代数几何时，首先指出代数几何的主旨是将几何问题转化为代数问题来做，反过来也可以在解决代数问题的时候运用几何的想法。例如虽然多项式方程组很难求解，但是一旦为其赋予了一个对应的几何图景，就能够获得定性的理解，这样就为下一步取得定量的解答创造了有利条件。因此代数几何这门学科实际上就意味着几何与代数的完美统一。《指南》接着用直观具体的简单例子详细解释了代数簇的概念，包括曲线、曲面、三维代数簇等基本概念。《指南》在这里不仅粗略地指出什么是概形，甚至还罕见地解释了轨形 (orbifolds) 和代数堆 (stack) 等高度抽象概念的大致含义。《指南》还接着讲解了最基本的 Bezout 定理、零点定理、相交重数和维数的概念，以及奇点分解的初步理论，并且用一种比较简单的取商轨形的方法给出了椭圆曲线参模空间 (moduli spaces) 的初步概念，这个空间中的每一个点都对应了一条椭圆曲线。

算术（代数）几何 这门学科是代数几何与代数数论相结合而产生的交叉学科[6]。除了介绍一些重要的经典算术（代数）几何问题，《指南》在这里着重讲解了抽象的概形概念。为此，《指南》从最经典的初看上去与几何毫无关系的丢番图不定方程入手，用一种简单的比喻方法解释了如何将代数簇的几何研究转化为对相关坐标环的代数研究（例如不可约簇对应于整环）。代数研究的好处是可以将有关结果进一步推广到更一般的情形，目标是实现人们长久以来希望的将代数几何与代数数论统一起来的梦想。由于不是每个环都可以成为代数簇的坐标环，那么为什么不能发明一种广义的几何对象，使得每一个环都可以成为这种广义几何对象的“坐标环”呢？而这种新的几何对象就是著名的概形。在概形上，可以用精细的纯代数的方法来研究各种抽象的几何性质，这样就为解决一批重要的经典问题开辟了道路。

代数拓扑 拓扑学是现代数学中比较年轻的学科，代数拓扑的方法是运用抽象代数的工具，赋予每个拓扑空间一些同胚不变量，例如拓扑空间的“洞的个数”等。在现代数学中之所以要大量使用抽象的拓扑学方法的主要原因是由于研究高维抽象几何空间整体问题的需要。《指南》按照拓扑学发展的历史途径，先解释了在 19 世纪末，以“三体问题”为代表的一批经典的数学物理问题因为无法求出精确解，只能转而考虑定性的拓扑解。然后仔细地讲解了连通性、相交数、基本群与同伦、高维的同伦群、同调群、上同调群、上同调环、向量丛和示性类等拓扑学中最基本的概念。该书还用比较直观的方法讲述了同调群和上同调环的计算，特别是重点介绍了经典的球面同伦群的计算问题，以及用历史上著名的 Hopf（霍普夫）纤维丛来说明上同调环的用处。而为了对光滑流形进行分类，就需要研究它们

的切丛（例如是不是平凡的），这就引出了衡量向量丛是否平凡的示性类理论。在三种示性类中，最具重要性的当然是描述复向量丛是否平凡的陈（省身）示性类。此外《指南》还进一步介绍了在20世纪中叶由代数几何的研究中引发出来的更一般的同调理论——K-理论的基本思想及其用处。

微分拓扑《指南》在这里重点介绍了微分拓扑中非常重要的微分流形的分类问题。先讲比较简单的0维、1维和2维流形。而对于比较复杂的3维流形，《指南》仔细解释了Thurston（瑟斯顿）的工作，即用八种几何结构来对3维流形进行分类。接下来简单介绍了Freedman（弗里得曼）、Donaldson（唐纳森）和Witten（威顿）等人关于4维流形的著名工作，以及高于4维的流形的研究状况。不仅如此，《指南》还简要讲解了Hamilton（哈密尔顿）和Perelman（佩雷尔曼）如何利用偏微分方程和黎曼几何的工具成功解决庞加莱猜想问题的大致过程。值得我们注意的是《指南》实际上将整体微分几何和几何分析也纳入到了微分拓扑的范畴中，这说明用整体微分几何与偏微分方程的方法研究微分流形上的整体几何性质，其目标指向了微分拓扑，由此我们也可以将拓扑学看成是更抽象的现代意义上的几何学。

参模空间 参模空间的方法是一种用于许多几何与拓扑对象分类问题的强有力方法。它试图从整体的视角来研究某种数学对象，这种想法自然是来源于代数几何中用一个代数簇来刻画一整类几何对象的做法。传统的方法是先通过某些特定的几何结构的计算（例如度量）来获取拓扑不变量，然后再设法证明这种计算与所选取的几何结构无关。而参模空间的新方法则是同时对所有的这种类型的几何结构进行计算，如果能证明相关的收敛性，则所获得的结果自然就不依赖于特定的几何结构。这种思想方法不仅在当代理论物理学的弦论（string theory）中得到了许多应用，而且微分拓扑中的Donaldson理论和Seiberg-Witten（塞伯格-威顿）理论，以及应用于计数几何(Enumerative Geometry)和辛流形拓扑的Gromov-Witten（格罗莫夫-威顿）理论，还有费马大定理的证明和Langlands纲领等，也都要用到参模空间的方法，例如重要的模形式和自守形式就是参模空间上的函数。《指南》从讨论射影平面上通过原点的全体直线组成的最简单的参模空间开始，将其归结为一个线丛，这样就可以用示性类来找出有关的拓扑不变量。接下来《指南》用比较多的篇幅重点介绍了曲线的参模空间问题。为了更好地研究曲线的分类，需要研究与其密不可分的内蕴紧黎曼面的分类问题。但是如何将具有同一亏格的全体紧黎曼面组成一个包含丰富几何内涵的参模空间（例如成为一个复流形），是一个十分复杂的问题。对于亏格为1的椭圆曲线全体，通过运用现代几何中纤维丛的思想方法，将每个黎曼面与复上半平面上的点联系起来，再对一个相关的群作用取商，就得到了椭圆曲线的参模空间，从而实现了按照全纯同构等价对椭圆曲线进行分类的目标。此外《指南》还介绍了亏格为g曲线参模空间的更复杂的构造方法，及其与雅可比簇、阿贝尔簇的联系。

编者按：截至本文完稿时，The Princeton Companion to Mathematics一书的英文影印本尚未在国内正式出版，此书的中译本据悉目前正由武汉大学前校长、数学家齐民友教授翻译。

参考文献

1. [苏] A. 亚历山大洛夫，数学——它的内容、方法和意义（三卷），科学出版社，1988.
2. T. Gowers (ed.)， The Princeton Companion to Mathematics, Princeton University Press, 2008.
3. 李克正，代数几何初步，科学出版社，2004.
4. 陈跃，从历史角度讲现代数学，数学通报，2011，第5期.
5. I. R. Shafarevich , Basic Algebraic Geometry 1, Springer-Verlag, 1994.（世界图书出版公司1998年重印）
6. 陈跃，对话李克正教授：为什么学习代数几何，高等数学研究，2011，第4期.

作者介绍：

陈跃， 复旦大学数学本科，上海师范大学数学硕士，现任上海师大数学系副教授，主要研究代数几何的历史。

主编先生：

我是贵刊的一个读者。首先祝贺你们办了一个比较成功的期刊，并在短时间内拥有很多的读者。其次，我想对贵刊 2010 年第 4 期作者萨苏的一篇文章《科学院故事之钟家庆与蹬三轮的》谈谈自己的一些看法。

作为长期在科学院工作的研究工作者，我认为萨苏先生的这篇文章以及其以前写的关于数学的系列文章严重失实，任意杜撰、生硬编造之处很多。仅以描写钟家庆这篇为例，我随便就可以找到很多编造的痕迹。虽然下面只列三个失实之处，实际上此文的任意编造俯拾即是。

例一，全文谈及钟家庆教授时，给人家的印象似乎钟和萨父长期合作。可实际上他们两人同在中科院数学所仅一年半左右，其间并无合作。钟家庆于 1964 年随华老去了中国科大，并在那里渡过文革前期。文革后期钟家庆回到北京又先加入了其夫人工作的清华大学应用数学系工作。直到七十年代末钟教授才回到中科院数学所，萨父则已离开了数学所。所以萨的这篇文章中描述的文革期间盖小房子一事很难在时间和地点上自圆其说。文章一开头说钟和萨父搭档也是子虚乌有。

例二，再说个小细节：文章说数学所分桔子，钟教授带学生分桔子；又说天热钟光膀子。试想分桔子是秋天了吧，北京秋天热得要光膀子？捏造痕迹明显。

例三，文章后边的故事完全杜撰。萨文说有个女生从武汉来，想报考钟的研究生，钟因衣衫不整以至落荒而逃，后来又终生不见这个女考生。这故事完全是虚构的；这个故事里还讲女学生打开自己的包，萨父看到厚厚的一本简报，里面有钟教授参加会议、授奖颁奖的报道和照片，钟西装革履等等，这些全是杜撰。钟教授直到去世前仅获得陈省身奖等两个奖项（那时奖项极少）。他获得的陈省身奖还是他过世后由其儿子代领的。我们在科学院就没有见过他有西装革履的时候，而这个神秘的女士又是从哪里搞到这些获奖的报道和西装革履的相片？实际上，你们刊物在登这篇文章时可能也试图找一张钟先生的正装照，但我相信你们是找不到的；除非你们可以找到那个萨苏笔下的神秘女郎。

此外，钟家庆不是文中描述的“锋芒毕露”，而是相当谨慎；钟家庆不是“体格强健”，而是身体较弱；钟家庆不是“喜欢游泳”，而是从不游泳；钟家庆不是举止粗俗，而是较为儒雅，如此等等。

另一篇写陆汝钤院士的故事演绎得也极其夸张。比如陆先生的视力并非那么糟糕，文章却把他的视力描述得差得出奇，想来也是为了编故事；文章说陆先生在办公室外的擦鞋垫子上用力擦鞋底更是不着边际，我们数学所办公室门口从来就不摆什么擦鞋垫子。

萨苏的文章在数学界外边能吸引一些人的眼球，同时能增加一些点击率也是可以理解的。现在社会上不尊重事实没有底线的作品比比皆是。但你们的刊物是数学人办的，是个严肃的刊物，并且在数学圈子里面有口碑有影响，那就要严谨认真一些。否则你们把那些胡编乱造的文章漂白了，就会给很多严肃的读者们造成不必要的误解。

再次陈述一下，贵刊很多文章很不错，很有质量，有可读性。但希望贵刊能够甄别一些杜撰性的或演绎性的文章，不要使它们登上大雅之堂。这是我的一点建议；如你们觉得合理，希望能把此信刊登出来。

顺致敬礼。

舒学言

2012 年 2 月 18 日

《中国数学会通讯》是该刊编辑委员会编辑出版的内部刊物，季刊。主要刊登国内外数学界的重要信息，报导中国数学会与各省市自治区数学会、学科分会等的活动情况。主要栏目包括：学术活动信息，数学教育与普及，数学精品文章(数学的历史、进展、价值、趣事等)，人物专栏，学科介绍，书讯与书评等。

《中国数学会通讯》为季刊，彩色印刷，图文并茂，
全年的总订费为 50 元(含邮费)。

订阅办法：请将订费邮汇至北京中关村东路 55 号（邮政编码：100190），中国数学会办公室；
或行汇至中国数学会

开 户 行：北京工商行海淀西区支行
帐　　号：0200004509089161419
电　　邮：cms@math.ac.cn
电　　话：0086-10-62551022

2011 年第 4 期要目：

- 中国数学会第十一次全国代表大会暨 2011 学术年会在成都隆重召开
- 营造和谐氛围，促进中国数学事业的发展——中国数学会第十届理事会工作报告
- 中国数学会十届九次常务理事会会议纪要

中国数学会章程
中国数学会关于扩大第十一届理事、常务理事方案
中国数学会实行会员制方案
中国数学会第十一届理事会正副理事长、秘书长名单
中国数学会第十一届理事会常务理事名单
中国数学会第十一届理事会理事名单
中国数学会十一届一次理事会会议纪要
中国数学会十一届一次常务理事会会议纪要
2011《中国数学会通讯》编委会在河北石家庄召开
数学界的文化自信与文化自觉
英国，没有老虎的国家——剑桥游学记

《中国数学会通讯》编辑部供稿