前排从左至右：林亚南，刘建亚，张智民，付晓青；后排从左至右：张英伯，蔡天新，邓明立，顾沛，罗懋康，汤涛，励建书，游志平（刘青阳 摄）

主　办　香港 Global Science Press
沙田新城市中央广场第一座 1521 室

主　编　刘建亚（山东大学）
汤　涛（香港浸会大学）

《数学文化》旨在发表高质量的传播数学文化的文章；主要面向广大的数学爱好者

《数学文化》欢迎投稿，来稿请寄：
Math.Cult@gmail.com

本刊网站：http://www.global-sci.org/mc/
本刊淘宝网：http://mysanco.taobao.com/
本期出版时间：2012年9月

本刊鸣谢国家自然科学基金数学天元基金和科学出版社的支持

Contents | 目录


A
Jim Sturgess
Kate Bosworth
Laurence Fishburne
Kevin Spacey
21
FIVE STUDENTS WHO
CHANGED THE GAME FOREVER.

高斯：离群索居的王子

蔡天新

历史上间或出现神童，神童常常出现在数学、音乐、棋艺等方面。卡尔•弗雷德里希•高斯（C. F. Gauss, 1777-1855），一位数学神童，是各式各样的天才里最出色的一个。就像狮子号称万兽之王，高斯在数学家之林中称王，他有一个美号——数学王子。高斯不仅被公认为是 19 世纪最伟大的数学家，并且与阿基米德、牛顿并称为历史上三个最伟大的数学家。现在阿基米德和牛顿的名字早已进入了中学的教科书，他们的工作或多或少成为大众的常识，而高斯和他的数学仍遥不可及，甚至于在大学的基础课程中也很少出现。但高斯的肖像画却赫然印在 10 马克——流通最广泛的德国纸币 [1] 上，直到 2002 年马克被欧元取代。

德国马克上的高斯（C. F. Gauss, 1777-1855）

一、与自然数的“情谊”

1777 年 4 月 30 日，高斯出生在汉诺威公国（今下萨克森州）的不伦瑞克市郊外（现属市区）。其时德意志民族远未统一，除了汉诺威，尚有奥地利、普鲁士、巴伐利亚等邦国。在高斯的祖先里，没有一个人可以说明为什么会产生高斯这样伟大的天才。他的父亲是个普通的劳动者，做过石匠、纤夫、花农，母亲是他父亲的第二个妻子，做过女仆，没受过什么教育。她甚至忘了高斯的生日，只记得是星期三，耶稣升天节前 8 天，高斯后来自己把它算出。但母亲聪明善良，有幽默感，并且个性很强。她以 97 岁高寿仙逝，高斯是她的独养儿子。

据说高斯 2 岁时就发现父亲账簿上的一处错误。9 岁那年，他在公立小学念书，一次老师为了让学生们有事干，让他们把从 1 到 100 这些整数加起来，高斯几乎立刻就把写好结果的石板面朝下放在自己的课桌上。当所有的石板都被翻过时，这位老师惊讶地发现只有高斯得出了正确的答案：5050，但是没有演算过程。事实上，高斯已经在脑子里对这个算术级数求了和，他注意到了 $1+100=101$，$2+99=101$，$3+98=101$，等 50 对数，从而答案是 50×101 或 5050。高斯在晚年常幽默地宣称，在他会说话之前就会计算，还说他问了大人字母如何发音，就自己学着读起书来。

高斯的早熟引起了不伦瑞克公爵费迪南的注意，这

短街上的高斯故居（作者摄于哥廷根）

位公爵的名字也叫卡尔，是个热心肠且始终如一的赞助人。高斯14岁进卡洛琳学院（现不伦瑞克技术大学），18岁入哥廷根大学。当时的哥廷根大学仍默默无闻，事实上，它创办不到60年。由于高斯的到来，才使得这所日后享誉世界的大学变得重要起来。起初，高斯在做个语言学家抑或数学家之间犹豫不决，他决心献身数学是1796年3月30日的事了。当他差一个月满19岁时，他对正多边形的欧几里德作图理论（只用圆规和没有刻度的直尺）做出了惊人的贡献，发现了它与费尔马素数之间的秘密关系。特别地，他给出了作正十七边形的方法，这是一个有着二千多年历史的数学悬案。

那一年可谓是高斯奇迹年，就在他发现正十七边形作图理论9天以后，即4月8日，他发展了同余理论，首次证明了二次互反律，这样就彻底解决了二次同余方程的可解性判断问题。5月31日，高斯提出了后人称为素数定理的猜想，也即不超过 x 的素数个数为 $x/\log x$，这个猜想直到100年后才被证明；又过了50年，两个用初等方法证明它的人中的一个因此获得了菲尔兹奖。7月10日，高斯证明了费尔马提出的三角形数猜想。10月1日，他发表了有限域里一个多项式方程解数问题的研究，导致一个半世纪后德国数学家外尔提出了他的著名猜想。

高斯初出茅庐，就已经炉火纯青了，而且以后的50年间他一直保持这样的水准。不过，高斯取得博士学位是在同属下萨克森州的黑尔姆斯泰特大学，那里不仅离他的故乡更近，还有一位当时德国最好的数学家普法夫。值得一提的是，这所创办于1576年的古老大学在1810年并入了哥廷根大学，可是普法夫却去了哈雷大学。高斯所处的时代，正是德国浪漫主义盛行的时代。高斯受时尚的影响，在其私函和讲述中，充满了美丽的词藻。高斯说过：“数学是科学的皇后，而数论是数学的女王。”那个时代的人们也开始称高斯为“数学王子”。事实上，综观高斯整个一生的工作，似乎也带有浪漫主义的色彩。

数论是最古老的数学分支之一，主要研究自然数的性质和相互关系。从古希腊的毕达哥拉斯时代起人们就沉湎于发现数的神秘关系，优美、简洁、智慧是这门科学的特点。俄国画家瓦西里•康定斯基甚至认为：“数是各类艺术最终的抽象表现。”就像其他数学神童一样，高斯首先迷恋上的也是自然数。高斯在1808年谈到：“任何一个花过一点功夫研习数论的人，必然会感受到一种特别的激情与狂热。”被称为现代数学最后一个“百事通”的希尔伯特是19世纪后期重新崛起的哥廷根数学学派的领军人物，其传记作者在谈到大师放下代数不变量理论转向数论研究时指出：

> 数学中没有一个领域能够像数论那样，以它的美——一种不可抗拒的力量，吸引着数学家中的精华。

另一方面，我也注意到一些不曾研究过数论的伟大数学家，如帕斯卡尔、笛卡尔、牛顿和莱布尼兹，他们都把后半生的精力奉献给了哲学或宗教，惟独费尔马、欧拉、拉格朗日、勒让德、高斯、狄里克雷这几位对数论有着杰出贡献的数学家，却终其一生都不需要任何哲学和宗教。或许，这是因为他们心中已经有了最纯粹、最本质的艺术——数论。值得一提的是，对一些优美的数学定理或公式，高斯经常一而再、再而三地给出新的证明。例如被他称为“皇冠上的宝石”的二次互反律，高斯一共给出了6种证明方法。即便在今天，这个定律仍与中国剩余定理一样，出现在每一本基础数论教程中。

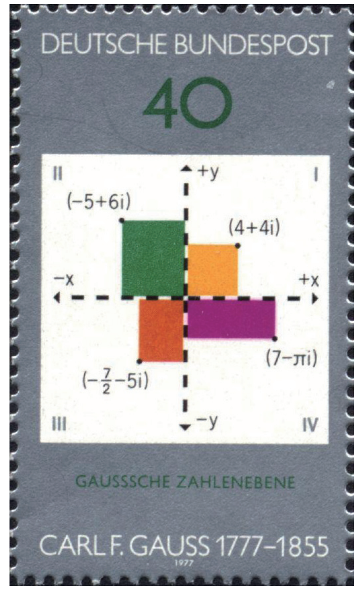
这里我想引用印度数学天才拉曼纽扬的故事说明数论学者与自然数的“情谊”，这位来自印度最南端泰米尔纳德邦的办事员具有快速且深刻地看出数的复杂关系的惊人才华。著名的英国数论学家G·H·哈代在1913年“发现”了他，并于次年邀他来剑桥大学。哈代有一次去探望病中的拉曼纽扬时告诉他，自己刚才乘坐的出租汽车车号是1729。拉曼纽扬立即回答：“这是一个很有意思

的数，1729 是可以用两种方式表示成两个自然数立方和的最小的数。”（既等于 1 的三次方加上 12 的三次方，又等于 9 的三次方加上 10 的三次方。）哈代又问，那么对于四次方来说，这个最小数是多少呢？拉曼扭扬想了想，回答说：“这个数很大，答案是 635318657。”（既等于 59 的四次方加上 158 的四次方，又等于 133 的四次方加上 134 的四次方。）

二、现代数论的新纪元

1801 年，年仅 24 岁的高斯出版了《算术研究》，从而开创了现代数论研究的新纪元。书中出现了有关正多边形的作图，方便的同余记号、二次型理论、类数问题以及优美的二次互反律的首次证明，他还把复数引入数论，即后人所称的高斯整数环。除了第 7 章（最后一章）给出代数基本定理的首次严格证明（他的博士论文结果）以外，其余各章讲的都是数论。在这部著作出版以前，数论只有若干零散的定理和猜想，高斯把前人的结果和自己的原创性工作结合起来，使其成为有机的整体和一门严格的数学分支。

值得一提的是，这部伟大的著作在他 21 岁时即已完稿，高斯曾把他寄到法国科学院，却遭到拒绝，但他自己将它出版了（费迪南公爵支付了印刷费）。与高斯的前期论文一样，它是用拉丁文写成的，这是当时科学界的世界语，然而由于受 19 世纪初盛行的国家主义的影响，高斯后来改用德文写作。在那个世纪的末端，集合论的创始人康托尔这样评价：

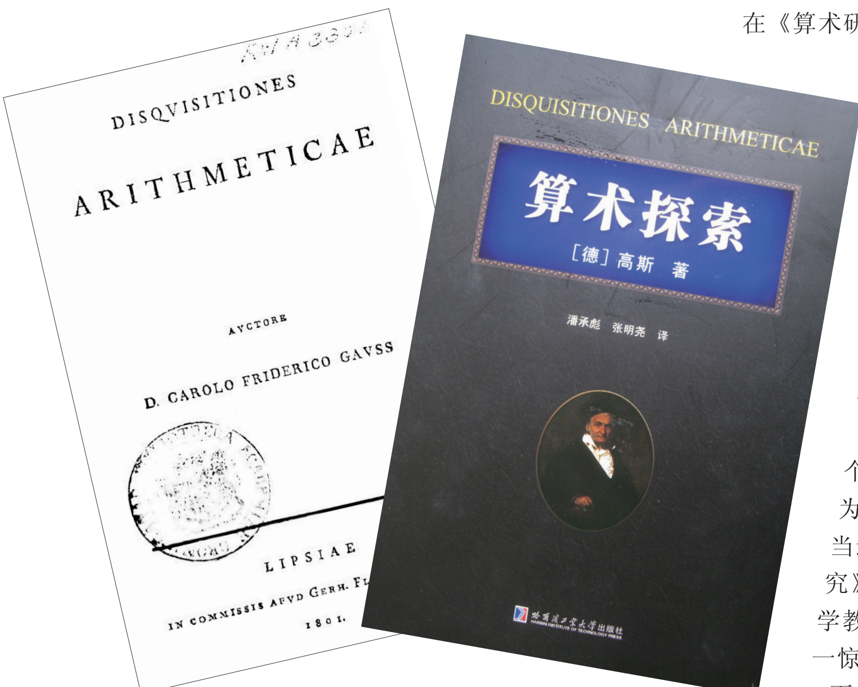


邮票上的高斯整数

《算术研究》是数论的宪章。高斯总是迟迟不肯发表他的著作，这给科学带来的好处是，他付印的著作在今天仍然像第一次出版时一样正确和重要，他的出版物就是法典。比人类其它法典更高明，因为不论何时何地从未发觉出其中有任何一处毛病，这就可以理解高斯暮年谈到他青年时代第一部巨著时说的话：“《算术研究》是历史的财富。”他当时的得意心情是颇有道理的。

在《算术研究》出版的第二年，高斯就当选为圣彼得堡科学院外籍院士，同时俄罗斯方面也向他提供了教授职位，但被他婉言谢绝了，那座城市是 18 世纪大数学家欧拉钟爱的第二故乡。直到四年以后，为了不使德意志失去这位最伟大的天才，包括洪堡在内的多位学者和政要联名推荐，高斯被破格聘任为哥廷根大学数学教授兼天文台台长，全家一起搬入新落成的天文台，他担任这个职位直到去世。

关于《算术研究》，流传着这样一个故事。1849 年 7 月 16 日，哥廷根大学为高斯获得博士学位 50 周年举行庆祝会。当进行到某一程序，高斯准备用《算术研究》的一张原稿点烟，当时在场的柏林大学教授狄里克雷像见到犯了渎圣罪一样吃了一惊，他立刻冒失地上前从高斯手中抢下这一页纸，并一生珍藏它；他的遗著编辑者在他死后从其文稿中间找到了这张原稿。



左图：《算术研究》首版扉页；右图：中文版封面，潘承彪、张明尧译

匈牙利邮票上的鲍耶（János Bolyai, 1775-1856）

狄里克雷比高斯小 27 岁，他上大学那会儿，整个德意志民族只有高斯一个有名望的数学家，却不怎么喜欢教学。狄里克雷只好远赴巴黎留学，师从法国数学家傅里叶和泊松，但他始终携带着高斯的《算术研究》，可以说是第一个真正读懂这本书的人。留学巴黎期间，狄里克雷证明了费尔马大定理在指数为 5 和 14 时成立。这个结果当年曾轰动一时，因为 3 和 4 的情形分别是由欧拉和费尔马本人解决的。狄利克雷后来娶了同胞作曲家门德尔松的妹妹为妻，在高斯去世以后，他被哥廷根聘请继任了高斯的职位。

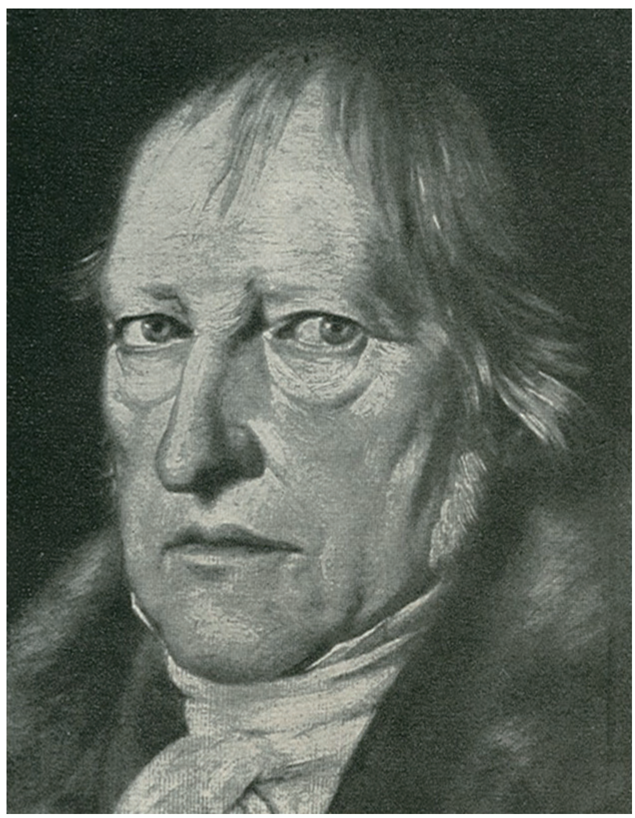
与艺术家一样，高斯希望他留下的都是十全十美的艺术珍品，任何丝毫的改变都将破坏其内部的均衡。他常说："当一幢建筑物完成时，应该把脚手架拆除干净。"高斯对于严密性的要求也非常苛刻，使得一个定理从直觉的形式到完整的证明，中间有一段漫长的过程。此外，高斯十分讲究逻辑结构，他希望在每一个领域中，都能树立起一致而普遍的理论，从而将不同的定理联系起来。鉴于上述原因，高斯很不乐意公开发表他的东西。他的著名警句是：宁肯少些，但要成熟。为此，高斯付出了高昂的代价，包括把非欧几何学和最小二乘法的发明权与罗巴切夫斯基、鲍耶和勒让德共同分享，就如同费尔马把解析几何和微积分的发明权让给了笛卡尔和牛顿、莱布尼兹。

说到鲍耶，他是匈牙利历史上最伟大的数学家，其父亲老鲍耶也攻数学，是高斯在哥廷根念书时最要好的朋友。1797 年，他曾陪同高斯徒步到不伦瑞克探望高斯双亲。等到高斯走出房间，他的母亲迫不及待地询问老鲍耶，自己儿子的前途如何。当听到回答"他是全欧洲最伟大的数学家时"，老人家已经老泪纵横，那年高斯才 20 岁。老鲍耶毕业后回到匈牙利娶妻生子，但在随后的半个世纪里仍与高斯保持书信往来。当他把儿子发明非欧几何学的消息和结果告诉老同学，并没有得到足够的鼓励和任何帮助。小鲍耶后来郁郁寡欢，默默无闻地度过一生，晚年专心于文学创作。

从做出有关正多边形发现的那天起，高斯便开始了著名的数学日记，他以密码式的文字记载下许多伟大的数学发现，共持续了 18 年。有意思的是，高斯的这本日记直到 1898 年才被找到，它包括 146 条很短的注记，其中有数值计算结果，也有简单的数学定理。例如，关于正多边形作图问题，高斯在日记中含蓄地写到：

> 圆的分割定律，如何以几何方法将圆十七等分。

值得一提的是，这项结果在两个月后出版的《新知文献》杂志上就发表出来了，而当时的汉诺威科学并不发达。



哲学家黑格尔（George W. F. Hegel, 1770-1831）

哥廷根天文台（作者摄）

又如 1796 年 7 月 10 日的记载：

$$num = \triangle + \triangle + \triangle ,$$

意指“每个自然数均可表为不超过三个三角形数之和”。此处三角形数是指按点排列可以构成正三角形状的数，例如 1、3、6、10、15……这是 17 世纪法国数学家费尔马猜想的一个特例，后者说的是，当 n 大于 2 时，每个自然数均可表成不超过 n 个 n 角形数之和。就像莫扎特一样，高斯年轻时候风起云涌的奇思妙想使他来不及做完一件事，另一件又出现了。

三、多才多艺的天才

高斯不仅是数学家，还是那个时代最伟大的物理学家和天文学家之一。在《算术研究》问世的同一年，即 1801 年的元旦，意大利天文学家皮亚齐在西西里岛观察到在白羊座（Aries) 附近有光度八等的星移动，这颗现在被称作谷神星（Ceres）的小行星质量只有月球的 50 分之一。它在天空出现了 41 天，扫过八度角之后，就在太阳的光芒下没了踪影。当时天文学家无法确定这颗新星是彗星还是行星，这个问题很快成了学术界关注的焦点，甚至成了哲学问题。

比高斯年长 7 岁的哲学家黑格尔那时正任教于离哥廷根不远的耶拿大学，还只是个无薪讲师。他写文章嘲讽天文学家说，不必那么热衷去找寻第 8 颗行星，他认为用他的逻辑方法可以证明太阳系的行星，不多不少正好是 7 颗。几个月过去了，这场争论仍未见分晓。年轻的高斯也对此产生了兴趣，他想既然天文学家通过观察找不到谷神星，那么可否利用数学方法找到它呢？高斯相信，天文学是离不开数学的，开普勒正是凭借着自己的数学才能，发现了行星运动三大定律；

高斯与韦伯（Wilhelm Eduard Weber, 1804-1891）塑像

牛顿也是凭着渊博的数学知识，发现了万有引力定律。

果然，高斯在欧拉工作的基础上，找到一种简易的计算行星轨道的方法。他根据皮亚齐的观测资料，只用一个小时便算出了谷神星的轨道形状，并预测了它的下一次出现。不管黑格尔有多么不高兴，那年的最后一个夜晚和次年的第一个夜晚，两位天文爱好者在德国的两座城市把望远镜对准天空。果然，这颗最早被发现且迄今仍是最大的小行星准时出现在高斯指定的位置上，这应该是他后来得以出任哥廷根天文台台长的重要原因。自那以后，小行星、大行星（海王星和冥王星）接二连三地被人发现了。

在物理学方面高斯最引人注目的成就是在1833年和物理学家韦伯发明了有线电报。韦伯只比狄利克雷年长一岁，他在洪堡召开的一次会议上做了一个报告，台下的高斯听了十分欣赏，随后不久便将其引荐延聘到哥廷根。两人各自擅长理论和实践，加上韦伯性格温和谦让，可谓是一对黄金搭档，开始了愉快而卓有成效的合作。次年高斯曾在给鲍耶的信中情意绵绵地提到，“我的生活因为他的出现而变得更加精彩，他的性格非常亲切而又富有天赋”。

可是，四年以后，哥廷根发生了反对废除自由宪法的“七君子事件”，韦伯与6位文科教授（包括高斯的女婿和童话作家格林兄弟）失去了教职。在这场政治较量中，高斯作为哥廷根最有威望的教授并没有挺身而出，而是选择了明哲保身。韦伯被迫去了莱比锡任教（格林兄弟到了卡塞尔），直到12年后才重返哥廷根，接替高斯担任天文台台长，但没有再担任教职。

高斯和韦伯的电报术利用了丹麦人奥斯特的电磁转向与电流方向垂直原理（1820）和苏格兰人法拉利的电磁感应原理（1831）。这项发明使得高斯的声望首次超出学术圈进入公众，但他们的商业意识不太强，一直使用那台电报机，直到1845年被一次闪电打坏为止。其时，在英国和美国，电报产业早已如火如荼地开展起来了。有趣的是，作为一名科学家，高斯是韦伯的恩师；而作为磁场感应的单位，一高斯只有一万分之一韦伯。

作为天文台台长，望远镜是高斯不可或缺的工具，除了用来观察天空以外，他还用自制的望远镜推动了光学研究。1843年，高斯的光学巨著《光折射研究》出版，书中首次提出了光的焦距、焦面和焦点等概念。他利用几何学的方法，证明了不论透镜有多厚，光的折射均可以用薄透镜或单折射面的简单公式来研究推导。在此以前，欧拉、拉格朗日和莫比乌斯都只考虑薄透镜的折射，而实际面临的应用问题并非如此。

在流体静力学方面，高斯写过一篇重要论文《关于力学的一个新的普遍原理》（1829），提出了后人所称的高斯最少约束原理，即任何一组相互影响并受外界影响的质点，在任何时刻其运动的方式必尽可能地接近自由运动，也就是最少约束运动。此处的约束是以每个质点离开自由运动轨迹的距离的平方乘上质量后，对所有质点求和来决定的。高斯曾感叹说：“自然对于一个物理运动方式的修正，与数学家对他的观察数据修正一样，都是采用最小二乘法进行的。”

除此以外，高斯在测地学、水工学、电动学等方面也有杰出的贡献。即使是数学领域，我们谈到的也只是他年轻时在数论领域里所做的部分工作，在其漫长的一生中，他几乎在数学的每个领域都有开创性的工作。例如，前文提及的最小二乘法便是一种数学优化技巧，用以通过一组平面上的坐标值来确定一条直线的方程。这是高斯当年用以找寻谷神星的数学工具，后来他把它写进著作《天体运动论》（1809）。最小二乘法如今在测绘学中有着广泛的应用，可是因为法国数学家勒让德独立发现并发表在先（1806），曾有过不太愉快的优先权之争。1829年，高斯还给出了最小二乘法的优化效果强于其他方法的证明。

又如，在高斯发表了《曲面论上的一般研究》之后

大约一个世纪，爱因斯坦评论说："高斯对于近代物理学的发展，尤其是对于相对论的数学基础所做的贡献（指曲面论），其重要性是超越一切，无与伦比的。"而他对椭圆函数的先驱性发现和非欧几何学方面的划时代工作，都没有在生前发表。说到椭圆函数，它是一种双周期的亚纯函数，最初是从求椭圆弧长时导出来的，直到今天仍是数学的研究热点。正是由于高斯在《算术研究》里暗示了这片未开采的处女地，引导后来阿贝尔和雅可比开展了一场著名的数学竞赛。

至于非欧几何学，堪称现代数学史上最伟大的发现。高斯是最早怀疑欧氏几何是自然界和人类思想所固有的人之一（拥护的人中有牛顿和康德）。欧几里德是建立系统性几何学的第一人，他的著作中的部分思想被称为公理，它们是通过逻辑构建整个系统的出发点。在这些公理中，平行公理显得尤为突出。依照这条公理，通过给定直线外的任意一个点只能作一条直线与该直线平行。许多人试图从其他公理推出这一公理，但没有一个证明都是正确的，高斯是最早意识到可能存在平行公理不适用的几何学的人之一，后来他自己证实了这一点，且新的几何学内部是相容的。

1830 年前后，当俄国的罗巴切夫斯基和鲍耶先后发表他们的非欧几何学时，高斯才宣称早在 30 年前他就得出了同样的结果。事实上，在 1799 年 9 月的一则日记里，高斯这样记载："在几何基础的问题上，我们得到了很好的结果。"同年底他在给老鲍耶的信中写道，面积任意大三角形的存在性与欧式平行公理是等价的。而在非欧几何学里，所有三角形的面积都不能超过一个界限。1824 年，高斯在给一位业余数学家的信中写道："由三角形内角和小于 180 度的假设中可以导出一种奇异的几何，这种几何与欧氏几何大不相同，但其本质却是相合的。"

高斯最赏识的弟子黎曼（Bernhard Riemann, 1826-1866）

四、离群索居的王子

在高斯的时代，几乎没有什么人能够分享他的想法或向他提供新的观念。每当他发现新的理论时，找不到人可以讨论。这种孤独的感觉，经年累月积存下来，就造成他高高在上、冷若冰霜的心境了。这种智慧上的孤独，在历史上只有很少几个伟人感受过。高斯从不参加公开争论，他对辩论一向深恶痛绝，认为那很容易演变成愚蠢的喊叫，这或许是他从小对粗暴专制的父亲一种心理上的反抗。高斯成名后很少离开过哥廷根，可能只在 1828 年去过柏林（普鲁士王国首都）参加过一次学术会议。

高斯甚至厌恶教学，也不热衷于培养和发现年轻人，自然就谈不上创立什么学派，这主要是由于高斯天赋之优异，因而心灵上离群索居。可这不等于说高斯没有出类拔萃的学生，黎曼堪称史上最伟大的数学家之一（在读哥廷根期间有两年到柏林师从雅可比和狄里克雷），戴特金和艾森斯坦也对数学做出了杰出贡献。但是由于高斯的登峰造极，在这三个人中，也只有黎曼（在狄里克雷死后继承了高斯的数学教授职位）被认为和高斯比较亲近。虽说黎曼生前只发表 10 篇论文，却是复变函数论、解析数论、几何学、常微分方程、实分析、数学物理和物理学等领域的开拓者。他奉行老师高斯的座右铭，宁肯少些，但要成熟。黎曼猜想已成为数学史上的不朽谜语，被公认为是最伟大的数学猜想。韦伯记得晚年的高斯谈起黎曼的工作时十分激动，给予了罕见的高度赞扬。对年长黎曼三岁的艾森斯坦，高斯也曾寄予厚望，如果不是他 29 岁英年早逝，很可能成为黎曼强有力的竞争者。

比高斯晚一辈的大数学家雅可比和阿贝尔都抱怨高斯漠视了他们的成就。雅可比是个很有思想的人，他有一句流传至今的名言："科学的惟一目的是为人类的精神

被高斯忽视的挪威数学家阿贝尔（N. H. Abel, 1802-1829）

费迪南公爵纪念碑（作者摄于不伦瑞克）

增光。”同时雅可比也是位了不起的教育家，为了鼓励学生早些独立做研究工作，他作了一个著名的比喻：“如果你主张，在与一个女子结婚之前先要认识世界上所有未婚女子的话，你父亲就一辈子不会结婚，那样的话也不会有你了。”

雅可比比狄里克雷大一个多月，两人都是柏林最顶尖的数学家，也都在数论领域做出过重要贡献。雅可比给出了费尔马四角形数（平方数）猜想的一个漂亮证明，用的是自守形式的方法；而狄里克雷任职柏林期间证明了算术级数上存在无穷多个素数，把两千多年前欧几里德的结果做了推广。但雅可比一直没能和高斯攀上亲密的友情，在 1849 年哥廷根那次庆祝会上，远道而来的雅可比坐在高斯身旁的荣誉席上。当他想找话题谈数学时，高斯不予理睬，这可能是时机不对，当时高斯几杯甜酒下肚，有点不能自制；但即使换个场合，结果恐怕也是一样。

在给他兄弟论及那场宴会的一封信中，雅可比写到，“你要知道，在这 20 年里，他（高斯）从未提及我和狄里克雷……”一年以后，雅可比因患天花去世，年仅 47 岁。不过，狄里克雷做上布雷斯劳大学教授（隶属普鲁士，今波兰弗罗茨瓦夫大学）可是高斯（还有洪堡）写的推荐信。需要提及的是，狄里克雷虽然数学天赋优异，但因为拉丁文不及格，未能获得巴黎大学的博士学位。回国以后，他向波恩大学申请，同样没有成功，倒是给了他荣誉博士学位。

阿贝尔的命运很惨，他与后来的同胞易卜生、格里格、蒙克和阿蒙森一样，是在自己领域里惟一取得世界性成就的挪威人。他是一个伟大的天才，却过着贫穷的生活，毫无同时代人的了解。阿贝尔 20 岁时，解决了数学史上的一个大问题，即证明了用根式解一般五次方程的不可能性，他将短短六页“不可解”的证明寄给欧洲一些著名的数学家，高斯自然也收到了一份。阿贝尔在引言中满怀信心，以为数学家们会亲切地接受这篇论文。

不久，乡村牧师的儿子阿贝尔开始了他一生惟一的一次远足，当时他想以这篇文章作敲门砖。阿贝尔此行最大的愿望就是拜访高斯，但高斯高不可攀，只是将论文瞄了几行，便把它丢在一旁，仍然专心于自己的研究工作。阿贝尔只得在从巴黎去往柏林的旅途中，以渐增的痛苦绕过哥廷根。26 岁那年，阿贝尔死于肺病和营养不良，他去世后的第三天，一封迟来的信件才送到，在这


左：高斯之墓（作者摄于哥廷根）；右：高斯纪念塔基座上的正十七角星（作者摄于不伦瑞克）

封信里，柏林大学向他提供了一个教职。

高斯虽然孤傲，但令人惊奇的是，他春风得意地度过了中产阶级的一生，而没有遭受到冷酷现实的打击；这种打击常无情地加诸于每个脱离现实环境生活的人。或许高斯讲求实效和追求完美的性格，有助于让他抓住生活中的简单现实。高斯 22 岁获博士学位，25 岁当选圣彼德堡科学院外籍院士，30 岁任哥廷根大学数学教授兼天文台台长。虽说高斯不喜欢浮华荣耀，但在他成名后的 50 年间，这些东西就像雨点似的落在他身上，几乎整个欧洲都卷入了这场授奖的风潮，他一生共获得 75 种形形色色的荣誉，包括 1818 年英王乔治三世[2]赐封的“参议员”，1845 年又被赐封为“首席参议员”。

高斯的两次婚姻也都非常幸福，第一个妻子死于难产后，不到 10 个月，高斯又娶了第二个妻子。心理学和生理学上有一个常见的现象，婚姻生活过得幸福的人，常在丧偶之后很快再婚，一生赤贫的音乐家约翰·塞巴斯蒂安·巴赫也是这样。高斯始终没有忘记费迪南公爵的恩情，他一直对他的赞助人在 1806 年惨死在拿破仑手下这件事耿耿于怀，因而拒不接受法国大革命的信条和由此引发的民主思潮的影响，他的学生都称他为保守派。从这点来看，高斯可以说是贵族专制社会体系中最后的也是最伟大的文化结晶。

高斯很喜欢文学，他把歌德的作品遍览无遗，却不怎么推崇。由于与生俱来的语言特长，使高斯阅读外文得心应手。他精通英语、法语、俄语、丹麦语，对意大利语、西班牙语和瑞典语也略知一二，他的私人日记是用拉丁文写的。高斯 50 岁时，又开始学习俄语，部分原因是为

了阅读年轻的诗人普希金的原作。不过，高斯的语言天赋在数学家中并不算最突出的，使爱尔兰人在数学领域享有盛誉的神童哈密尔顿，他在 13 岁的时候就能够流利地讲 13 种外语。高斯爱看蒙田、卢梭等人的作品，却不怎么喜欢莎士比亚的悲剧，但他选择了《李尔王》中的两行诗作为自己的座右铭，

> 大自然啊，我的女神，
> 我愿为你献身，终身不渝。

高斯最钦佩的英语作家是苏格兰人司各特，几乎阅读了他所有的作品。有一次，高斯在司各特爵士有关自然景观的描述中找到了一个错误（满月是从西北方向升起来的），因而狂喜不已。他不仅在自己那本书上把它纠正过来，还跑到哥廷根书店把其它未售出的书都改了。

和所有伟大的数学家一样，抽象符号对高斯来说并非虚幻而不真实的。有一次他谈到："灵魂的满足是一种更高的境界，物质的满足是多余的。至于我把数学应用到几块泥巴组成的星球，或应用到纯粹数学的问题上，这一点并不重要。但后者常常带给我更大的满足。"高斯的身体一直不错，而他的第二任妻子早他 24 年便已离世，在他晚年受到病魔袭击之前，他一直没有在宗教或精神上花时间。心脏病不断摧毁他的意志，1848 年，高斯写信给他最亲密的朋友说：

> 我经历的生活，虽然像一条彩带飞舞过整个世界，但也有其痛苦的一面。这种感受到了年迈的时候更是不能自持，我乐于承认，如果换一个人来过我的生活的话，也许会快乐得多 。另一方面，这更使我体会到生命的空虚，每一个接近生命尽头的人，都一定会有这种感觉……

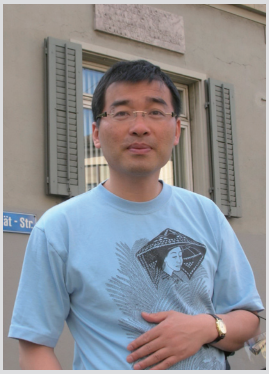
高斯还说过："有些问题，如果能解答的话，我认为比解答数学问题更有超然的价值，比如有关人类和神的关系，我们的归宿，我们的将来等等。这些问题的解答，远超出我们能力之所及，也非科学的范围内能够做到。"1855 年 2 月 23 日清晨，高斯在睡梦中平静地与世长辞，享年 77 岁。他曾经要求在他的墓碑上刻一个正十七边形，但事与愿违，因为雕刻工坚持认为正十七边形刻出来后几乎与圆一模一样。作为一种弥补，在其故乡不伦瑞克的高斯纪念碑的基座上刻下了一颗有十七个尖角的星。

高斯曾被形容为："能从九霄云外的高度按照某种观点掌握星空和深奥数学的天才。"他将自己的数种天赋——有创造力的直觉、卓越的计算能力、严密的逻辑推理、十全十美的实验——和谐地组合在一起，这种能力的组合使得高斯出类拔萃，在人类历史上找不到几个对手。习惯上只有阿基米德和牛顿与他相提并论（最多加上欧拉），他们都非常多才多艺。当然，爱因斯坦也属于同一水准，但他有所限制，因为他所依赖的数学工具不是自己创造的；另外，爱因斯坦也不是实验家，他的理论需要别的科学家检验。

2012 年 5 月
完稿于杭州

[1] 原德国马克纸币共 8 种，从 5 马克到 1000 马克。10 马克纸币的反面是统计学里的正态（高斯）分布曲线。除了他和一位诺贝尔生理学医学奖得主以外，另外 6 位分别是诗人、作家(2 人)、音乐家、画家和建筑师，包括童话作家格林兄弟和钢琴家克拉克 • 舒曼。

[2]乔治三世，1760-1820 年间在位 。那时哥廷根隶属三个国家：大英帝国、爱尔兰和汉诺威公国，哥廷根大学便是由英王乔治二世（1727-1760 在位）于 1737 年所建。

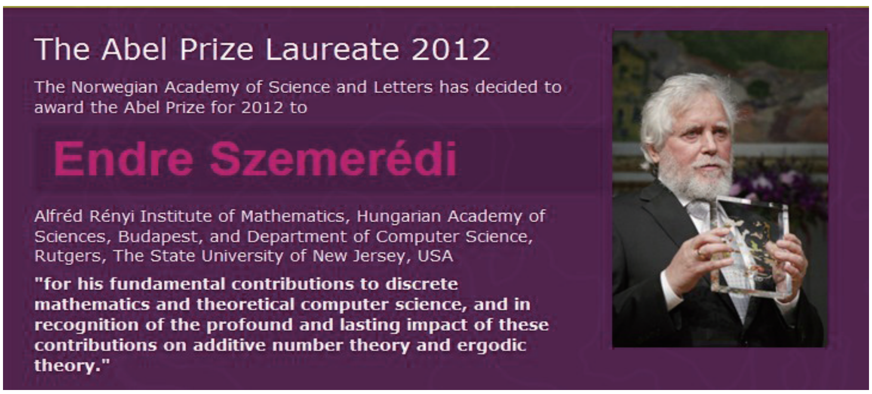


作者简介：蔡天新，山东大学博士，浙江大学数学系教授。也是位诗人、随笔和游记作家，作品被译成 20 多种语言，有 10 种外版书籍问世。2012 年秋天，商务印书馆和高等教育出版社新出他的《数学与人类文明》、《数字与玫瑰》修订版和《数论，从同余的观点出发》。

安德烈·塞迈雷迪

——2012 年度阿贝尔奖得主

史永堂



阿贝尔奖

2012 年 3 月 21 日，挪威科学与文学院宣布，将 2012 年度的阿贝尔奖授予匈牙利数学家安德烈·塞迈雷迪（Endre Szemerédi）。

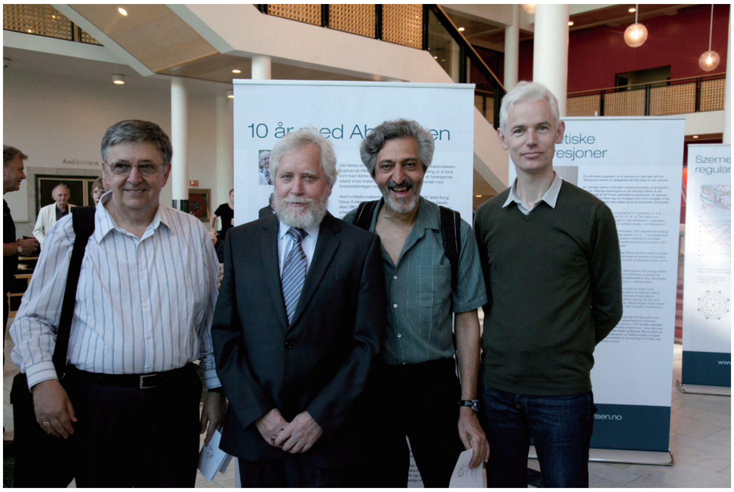
挪威科学与文学院在颁奖词中说，决定将 2012 年阿贝尔奖授予匈牙利科学院数学研究所的数学家安德烈·塞迈雷迪，“以嘉奖其在离散数学和理论计算机科学方面的杰出贡献，以及对堆垒数论和遍历理论产生的深远影响。”

颁奖词说，塞迈雷迪为离散数学引进了独创性的计算技巧，解决了许多根本问题，使该领域实现了革命性变化。他还揭示了组合学与堆垒数论、遍历理论、理论计算机科学和关联几何学等诸多领域的深层联系，使组合学成为数学界的重要课题。

塞迈雷迪 1940 年 8 月 21 日出生于匈牙利布达佩斯，现任匈牙利科学院院士和美国科学院院士、匈牙利科学院 Rényi 数学研究所研究员，美国 Rutgers 大学计算机系教授。塞迈雷迪亦曾在斯坦福大学（1974）、加拿大麦吉尔大学（1980）、南卡罗来纳大学（1981-1983）和芝加哥大学担任众多客座职位。他于 1987-1988 年获得加州理工学院谢尔曼·费尔柴尔德杰出学者称号。他还是蒙特利尔大学数学研究所 Aisenstadt Chair 的获得者。2008 年，塞迈雷迪成为伯克利数学科学研究所艾森巴德教授。

2012 年 5 月 22 在挪威奥斯陆举行阿贝尔颁奖仪式，挪威国王为塞迈雷迪颁奖。

对于他的获奖，塞迈雷迪称是对匈牙利离散数学研究领域的奖励，他还谦虚地表示，有许多其他数学家更应该获得阿贝尔奖，但他无权修改评奖委员会的决定。颁奖当日，四位顶尖数学家 Endre Szemerédi, László Lovász（沃尔夫奖得主，下图左一），Timothy Gowers（菲尔兹奖得主，下图右一），Avi Wigderson（下图右二）给大家带来了精彩的阿贝尔报告。



10:10 Professor Endre Szemerédi:"In Every Chaos There is an Order"

11:00 Coffee/tea

11:30 Professor László Lovász:"The many facets of the Regulanty Lemma"

12:30 Lunch (requires registration)

13:30 Professor Timothy Gowers:"The afterlife of Szemerédi's theorem"

14:15 Coffee/tea

14:30 Science Lecture:Avi Wigderson: "Randomness and Pseudorandomness"

阿贝尔是 19 世纪挪威的一位天才数学家，他在 5 次方程和椭圆函数研究方面取得了远超当时世界水平的成就。在 2002 年阿贝尔诞辰 200 周年之际，挪威政府设立了以他的名字命名的国际性数学大奖——阿贝尔奖。阿贝尔奖由挪威科学与文学院颁发，旨在表彰在数学领域做出具有非凡的深度和影响力的科学贡献。扩大数学的影响，吸引年轻人从事数学研究也是设立阿贝尔奖的主要目的。自 2003 年起每年颁发一次，奖金为 600 万挪威克朗（约合 100 万美元），阿贝尔奖有“数学界诺贝尔奖”之称。

曲折的数学路

塞迈雷迪是公认的具有非凡研究能力的数学家，他对当今的数学产生了无比深远的影响。但是，塞迈雷迪作为数学家的生涯很晚才开始。

塞迈雷迪的父亲希望他将来能成为一名医生，所以开始时他去一所医学院学习，但是很快他就意识到这并不适合他。因为自己不确定应该学什么，所以他学了很多自己不感兴趣的课程。在第一学期结束之前他毅然地选择了离开，而后在匈牙利的一个工厂里找到了一份工作。两年后，受到自己高中同学（后成为物理学家）的鼓励，他去了布达佩斯的罗兰大学，事实上他对他的学习并不是很感兴趣，直到入学

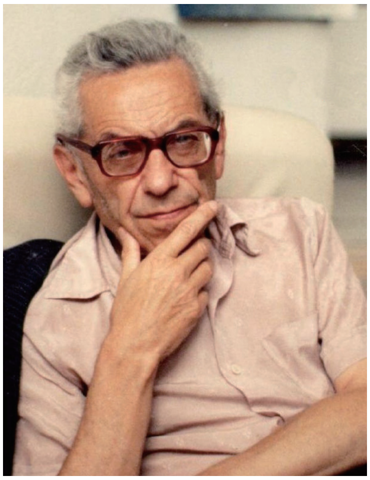
数学家图兰（Paul Turán , 1910-1976），匈牙利科学院院士，主要研究数论与图论，是埃尔德什(Paul Erdös, 1913-1996)的好朋友，与埃尔德什合作发表 28 篇论文。在数论方面他的大部分工作是研究黎曼假设，并于 1934 年给出了哈代和拉马努金（1917 年）关于数论函数的一个新的简单的证明，被认为是概率数论研究的起始点之一；在图论方面，埃尔德什认为他开创了研究图论中极值问题这一领域，也就是现在的极值图论，著名的图兰定理是极值图论的一个重要而基本结果。1952 年与 Vera T. Sós（1930-, 著名的数论学家、组合数学家、匈牙利科学院院士）结为夫妻。

的第二年，一个重要的人物出现了——图兰（Paul Turán）。这一年图兰讲了一年的数论课程，他精彩而全面的讲解深深地吸引了塞迈雷迪。

不久以后，他又遇到了数学大师埃尔德什（Paul Erdös , 图左）和 Andras Hajnal（1931-, 图右，匈牙利科学院院士）。 Hajnal 主要研究集合论与组合数学，与埃尔德什合作发表论文 56 篇。

塞迈雷迪自此开始了对数学，尤其是离散数学的研究，并于 1965 年获得罗兰大学科学硕士学位。

1967 年开始，塞迈雷迪在莫斯科国立大学继续进修，并于 1970 年在盖尔范德（Israel M. Gelfand , 1913-2009）的指导下获得博士学位。事实上，塞迈雷迪对盖尔范德的研究方向并不感兴趣，他还是希望能够继续学习图兰的理论，但是由于教育体制的原因他不能更换导师。幸好盖尔范德允许他做自己想做的方向，所以最后塞迈雷迪提交了关于离散数学方面的论文。

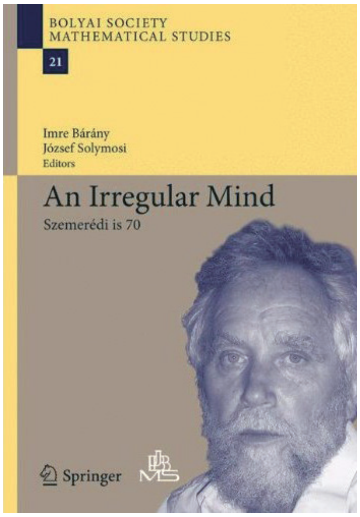


盖尔范德（Israel M. Gelfand），苏联数学家。1913 年 9 月 2 日生于红奥克内，1930 年中学未毕业时迁居莫斯科，以后自修数学。19 岁时，进入莫斯科大学攻读研究生课程，于 1935 年获副博士学位，1940 年获物理学数学科学博士学位。1943 年起任莫斯科大学教授，后兼任该大学生物数学研究所所长，1953 年当选为苏联科学院陆军通讯院士，1978 年获得沃尔夫奖。2009 年 10 月 5 日逝世。盖尔范德建立了赋范环论，即交换巴拿赫代数论。他运用代数方法，引进极大理想子环空间，给出元素在其上的表示（盖尔范德表示）的概念，将线性算子谱论等学科研究引向深入。他与 M.A. 奈玛克合作，于 1943 年开创了 C * 代数的研究。此外，他在酉表示理论及广义函数论方面都有建树。

获奖与荣誉

2010 年，正值塞迈雷迪 70 岁生日，匈牙利科学院数学所和 János Bolyai 数学学会在布达佩斯召开大会，庆祝他取得的杰出成就。在会议前出版的“An Irregular Mind ”一书中，曾有这样的描述，“塞迈雷迪具有不同寻常的脑袋，他的大脑构造与大部分数学家截然不同。我们都对他独特的思考方法和超乎寻常的远见敬佩不已。”

凭借其在数学和计算机科学方面的杰出贡献，塞迈雷迪已获得众多奖项与荣誉。2008 年，凭借开创性的研究贡献，他被美国数学学会授予斯狄尔终身成就奖（Steel 奖）。同年，塞迈雷迪获瑞典皇家科学院授予罗尔夫朔克数学奖。其他奖项包括：Grünwald 奖（1967），Grünwald 奖（1968），Rényi 奖（1973），美国工业与应用数学协会（SIAM）的波利亚应用数学成就奖（1975），匈牙利科学院大奖（1979）。



数学家的另一面

塞迈雷迪如是说："尽管我在 Rutgers 大学计算机系工作，但是我不会使用电脑。要说的是，我所有的电子邮件都是我妻子帮我回复的，我只是读邮件。所以有时我也称电脑为计算器。"他认为，网络比较容易理解，它就是一个图；但是在电脑方面，特别是程序语言以及如何去搜索信息方面，自己就比较笨。

有意思的是，他也不会使用相机，他从来没有去学习如何拍照；他自己不会开 DVD，每次都是他的妻子帮他打开他要看的电影，再由他的孙子们帮他退出。在运动方面，他喜欢散步，每周都会去打网球，最近他又开始打乒乓球了。

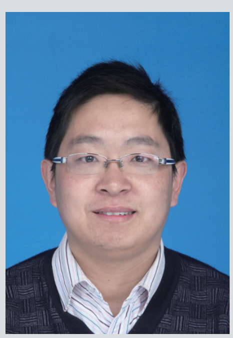
辉煌的工作

正如阿贝尔奖的颁奖词所说，塞迈雷迪证明了众多具有深远影响的重要定理，他的许多成果已启迪了未来的研究，并为众多新的数学研究方面奠定了基础。塞迈雷迪已发表 200 多篇科学论文，其中 29 篇与埃尔德什合作发表。他最重要的成果之一是 Szemerédi 定理，该定理表明，对于任何具有正密度的整数集合，存在任意长的等差级数（算术级数）。让我们一起来看一下 Szemerédi 定理的起源和发展。

1927 年，荷兰数学家范德瓦尔登（Van der Waerden, 1903-1996）证明了下面的结论：对任意给定的正整数 k 和 t，总存在一个正整数 N，满足如下条件：我们将集合 $\{1, 2, \cdots, N\}$ 划分为 k 个子集，无论我们怎么划分，这 k 个子集中必定有一个子集包含 t 长的等差级数。这就是著名的范德瓦尔登定理，满足条件的最小的 N 称为范德瓦尔登数 $W(k,t)$。1936 年埃尔德什和图兰提出了如下的猜想，作为对范德瓦尔登定理的推广：对任何具有正密度的整数集合，存在任意长的等差级数。这可以看作是勒贝格密度定理（勒贝格可测集的几乎每一个点的密度都是 1）的一个离散近似。这个猜想很快成为 Ramsey 理论的一个重要的公开问题，被称为 Erdös-Turán 猜想。1953 年，英国数学家 Klaus Roth（1925-）用调和分析的方法证明了对长为 3 的等差级数是成立的，但是这个方法似乎不能推广到长为 4 的情况。1969 年塞迈雷迪用非常复杂的组合方法证明了长为 4 的情况。最终，塞迈雷迪在他 1975 年的那篇划时代的论文中彻底解决了 Erdös-Turán 猜想。这个问题的解决是组合数学的一大杰作，它包含了很多新的想法和工具，这些想法和工具可以用来解决很多的问题，而不仅仅是某一个难题。

这些新的工具中，有一个现在已经成为现代组合数学和图论研究的基础，即著名的 Szemerédi 正则引理。它指出：任意充分大的稠密图都可以用几乎等部的子图（非常类似于正则二部图）的并集来近似，其中子图的数目是一个有界的数字。这是一个非常惊人的结果。随后，著名数学家 Gowers 以及陶哲轩等都给出了正则引理的其他形式。除了组合数学，正则引理也在数论和计算机科学，特别是复杂性理论等领域有着广泛的应用。

那么通俗意义上来讲，塞迈雷迪的正则引理到底说的是什么呢？又应该怎样去理解呢？下文中我们将看到菲尔兹奖得主 Gowers 对正则引理的讲解以及对塞迈雷迪工作的评价，该文是 Gowers 写给阿贝尔奖评奖委员会的推荐信。



作者简介：史永堂，博士，南开大学组合数学中心副教授，主要研究方向为图论与组合最优化。

安德烈·塞迈雷迪的工作

W. T. Gowers/ 文　史永堂 / 译

1. 引言

安德烈•塞迈雷迪是数学中组合数学领域的杰出人物，特别是在极值组合论这一子领域做出了重要的贡献。稍后我将解释这些术语的意思，但是这里我们首先来介绍一下关于他非凡数学成就的一些枯燥的事实。他的最著名的成就是，在 1975 年给出了众所周知的埃尔德什（Paul Erdös）和 Turán 提出的一个具有几十年历史的猜想的证明，现在被称为是 Szemerédi 定理。这个定理不仅是二十世纪数学的重要贡献之一，而且也是当前大量研究的核心所在。他给出的 Szemerédi 正则引理，是源于 Szemerédi 定理证明的一个结果，但是也已经逐渐成为极值组合论的一个重要工具。除此之外，他已经发表了 200 余篇论文，其中很多论文都描述了重要的进展。我将会选择其中一两个问题来讲解，但是我们应该知道的是，它们仅仅是对很多领域的数学思想有深远影响的巨大成就中的一个小的例子。

那么，什么是组合数学呢？一个可能的定义是组合数学是来研究离散结构的。那么什么是离散结构呢？“离散”这个词是跟“连续”对应的：一个结构是连续的，如果你可以从一个部分平滑地移动到另一部分；如果你不得不跳跃，就是离散的。例如，如果你在建立流体流动的模型，那么你研究的数学结构将是连续的，因为你将考虑类似于不同点的速度和压力的一些东西，并且这些是平滑地变化的。相反地，如果你在建立计算机内部东西的模型，那么你将会对 0-1 序列感兴趣，这是离散结构的一个例子，因为要从一个这样的序列得到另一个序列，你将不得不从 0 跳到 1 至少一次，反之亦然。

另一个离散结构，也许是组合数学中的一个最重要的结构，是图。它包含一些点，以及连接某些点的线。点称为顶点，线称为边。

你可能会认为图是连续的，因为你可以沿着它的边连续地移动。然而，连续的仅仅是图片，而不是图本身。对一个图，我们所关心的是，顶点中的哪些对是由边连接的，这可以被看作为一个简单的列表。例如，如果一个图由一个正方形的顶点和边构成，我们可以称它的顶点为 a, b, c, d，边记为 ab, bc, cd, da。

2. Szemerédi 定理

并不是离散结构的所有研究都被划为组合数学。大部分题目的另一个特征是这些问题都可以以容易理解的方式叙述，至少要比许多其他领域的问题要容易得多。同样，证明经常是初等的，不是像歇洛克•福尔摩斯那样用到整个世界，而是仅仅用到某种数学。当一个数学家描述某个证明是初等的时候，这意味着证明不会用到深层次的概念，或者不依赖于之前建立的某些复杂的结果。但是我们不应该认为这意味着证明是简单的：人们可以以极其复杂的方式将一些初等的元素放在一起，而且有些“初等的”证明在数学中是困难的。相反地，一些很高级的证明，当你花足够的时间去理解它们所依赖的定理时，实际上可能是非常简单的。（当然，也确实存在一些简单的初等证明以及困难的高级证明。）

Szemerédi 定理是对我刚才所讲内容的一个完美的解释。它有一个吸引人的叙述，并且塞迈雷迪给出的证明既是初等的又是极其困难的。让我以解释定理的内容开始讲起。

为了讲解定理的内容，我需要等差级数（或称为算术级数）的概念。一个等差级数是指一个数的序列，每一项都增加相同的大小（称为公差）。所以序列 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39 是一个等差级数，它的公差为 6，而序列 4, 7, 11, 14, 17, 21 不是等差级数，因为相邻两项的差是不相同的（有些是 3，有些是 4）。

一种理解 Szemerédi 定理的方法是去想象下面的单玩家的比赛。告诉你一个比较小的数字，比如是 5，和一个大的数字，比如是 10000。你的任务是在 1 和 10000 之间尽可能地选择尽量多的整数，你要遵守的规则是你所选的整数中不

阿贝尔委员会关于塞迈雷迪获奖的海报

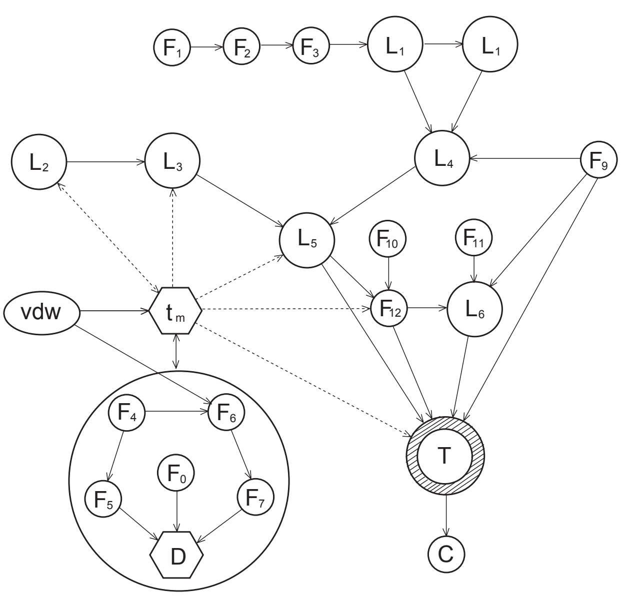
应该包含 5- 项的等差级数。举例来说，如果你碰巧选择了数字 101, 1103, 2105, 3107 和 4109（以及一些其他的数字），那么你将输掉比赛，因为这五个数字构成了一个五项的等差级数，他们的公差是 1002。

显然地，最终你是注定要输掉这个比赛的，因为我们可以给出一个既初等又极其简单的证明，如果你要保持足够长的选择，最终你将选择 1 到 10000 中的所有数字，这将包含许多 5- 项的等差级数。但是 Szemerédi 定理告诉我们一些更有趣的事情：即使你使用最好的回避等差级数的策略，在你远远还没接近选择所有数字之前，你就已经输掉比赛了。

为了更准确地叙述这个结果，我将需要一点代数的知识，我的意思是希望用两个字母来表示我们开始时的那两个数字。用 k 表示我们希望避免的级数的长度，n 表示我们希望从中选择的初始数字的个数。（在我们上面的讨论中，k 是 5，n 是 10000。）现在用 $S(k, n)$ 表示在避免 k- 项等差级数出现的前提下，所能选择数字的最大数目。塞迈雷迪证明了：当 n 很大时，$S(k, n)$ 是 n 的一个非常小的百分数。那么有多小呢？要多小有多小，只要假设 n 是足够大的。

例如，如果你尝试去回避长为 23 的级数，Szemerédi 定理告诉我们存在某个 n（可能非常巨大，但是它是存在的）满足下面的条件：如果我们用 n 个数字来玩比赛，在我们输掉比赛之前，我们不会选择多于 n/1000 个数字，即总数的 0.1%。而且，这个结果对任何其它的级数长度和任何其它的正的百分数都是成立的。

那么怎么去证明呢？这里我不打算去告诉你，我将再次说明从技巧意义上来说那是初等的，并且我将从塞迈雷迪的原始文章中复制一个图表来尝试使你相信这也是困难的。



3. 为什么我们要关心等差级数的寻找呢?

我在现实生活中并没有看到如下情形的重要性：一个小的整数集合包含一个长为 10 的等差级数。即使出现这种情形，Szemerédi 定理告诉你你所需要的 n 将会远远大于宇宙中原子的数目，或者是这个数字的指数。这将使定理远离任何实际应用的领域。那么，数学家们到底发现了 Szemerédi 定理的哪些方面是如此的迷人呢？

对这个问题，有很多回答。最显而易见的是，Szemerédi 定理叙述的简单与其证明（以及所有随后发现的证明）的困难之间的对比。通常情况下，一个简单的、自然的数学陈述要么有一个简单的证明，要么有一个简单的反例。然而，有些时候人们惊奇地看到：一个形式无误的问题的解决要远比人们的期望困难得多。这些问题中的大部分被证明太难了，以至于没有人相信在与当前完全不同的新思想出现之前它们将能够被解决（$e+\pi$ 是否是无理数的问题就是一个例子）。但是有些问题不是这样的：问题的提出很简单并且难于回答，但是它们跟某些问题有足够的联系，使得人们感觉尝试解决它们并不是完全没有希望的事情。Erdös-Turán 猜想就可以归于这一类。

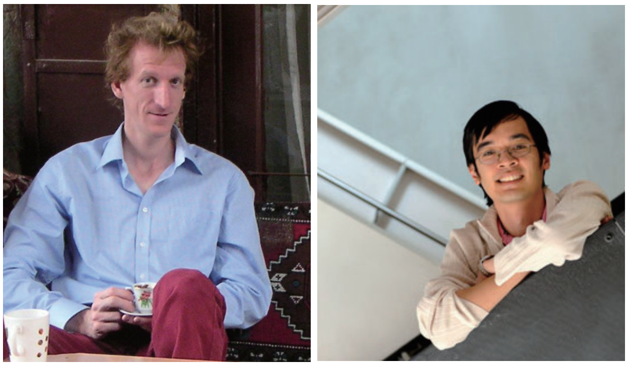
第二个回答是，Szemerédi 定理有很多数学的应用，尽管它没有什么实际的应用。其中非常著名的是 Ben Green 和陶哲轩的一个定理：你可以发现仅包含素数的任意长的等差级数。这个结果并不是直接源于 Szemerédi 定理，但是 Green 和陶哲轩发现了一个极其巧妙的方法将他们的问题转化为一个可以用 Szemerédi 定理来解决的形式。

然而，如果你坚持要求实际应用的话，那么一切并没有丢失，只要你能够接受非直接的应用而不是直接的应用。数学的一个重要的但不值得充分赞赏的方面是，你要证明的结果往往没有你证明它所用的方法更有意思。这一趋势在组合数学中尤为明显，组合数学中的一些公开问题往往越来越受关注，不是因为我们渴望知道它们的答案，而是因为它们包含了许多更一般的困难，这些困难让我们感觉到我们又真正地回到了数学。当一个这样的问题得到解决时，它的解常常包含新的数学工具的发展，这些新的工具能够在许多其他情况下得到使用。

Szemerédi 定理就是这种现象的一个奇妙的解释，正如我们将要看到的。

4. Szemerédi 正则引理

到目前为止我还没有讲什么是极值组合论，那么现在让我开始讲。这里有一个极值图论的问题：如果一个图有 n 个顶点，那么在保证任意三个点都不构成三角形的情况下，它可以有多少条边呢？一般来说，极值组合论中的问题是在



Ben Green(左) 和陶哲轩著名的数论工作用到了 Szemerédi 定理

限制某些其他情况发生的前提下，问某个量可以达到多大。Szemerédi 定理本身就是另外一个这样的例子，它描述了一个这样的问题：在限制长为 k 的等差级数出现的情况下，你可以从 1 到 n 中选择多少个数字。

这些问题自然地分为两部分。一部分是去寻找能够避免你希望避免的结构的例子，以这样的方式使得你感兴趣的量能够尽可能的大。另一部分是去证明如果问题中的量达到某个数值，那么你将不能避免你希望避免的结构。埃尔德什的一个深刻的观察，在很多情况下是解决第一部分问题的一个出奇得好的方法，即去随机地选择你的结构。例如，如果你的结构是 n 个顶点的图，如果每对顶点 x 和 y 是否有边相连仅仅是靠投掷硬币来决定（如果你希望你的随机图包含很少的边，那么你可以使用一枚扁的硬币），那么对某些问题，你将得到非常好的解答。尽管看起来你可能对随机定义的结构不能说什么，但是如果你正在寻找完全确定的事情，那么这差不多是正确的。然而，如果我们仅仅要求接近确定的事情，那么我们就有很多可以说的了，这正是我们要讲的。如果我们可以说一个随机选取的结构几乎确定地具有我们希望的性质，那么我们就可以给出一个弱得多的结论：至少存在一个结构具有我们希望的性质，这样就足够了。

埃尔德什的观察诞生了随机图论，现在已经成为组合数学的一个主要的子领域。作为一个结果，组合数学家们不认为随机图是讨厌的、混乱的东西，而认为从许多方面来说都是容易理解的东西。为了更清楚地表达，我不再说随机图论是一个容易的领域：如果你问关于一个随机图的足够详细的问题，那么回答它们需要非常精密的、困难的概率估计。但是随机图在以下方面具有重要意义，随机图（几乎总）是可预言的并且效果良好。

由于这一背景，Szemerédi 正则引理应该得到大家理解。在介绍正则引理之前，我们假设图被认为是没有结构的东西。最后，当你介绍一个图时，对每对顶点 x 和 y 你需要决定是否用一条边连接它们，并且你的决定没有任何限制。然而塞迈雷迪意识到，一旦你丢掉你对随机性的恐惧，你就可以对完全任意的图给出一个有用的结构描述。

在这里我不能给出这个结果的一个精确的叙述，但是大致的思想是这样的。给定任意一个图，存在一种如下的方式将它的所有顶点划分为一些集合，这些集合的数目比较小：如果你取出连接其中任意两个集合的边，那么它们看起来像是被随机选择的（事实上，尽管这个大致的思想是过于简单的，但是对这些目的它将起作用）。简言之，每个图都是由数目很少的随机图构成的。

这告诉我们，可以使用很小数目的数据来给我们的图一个好的刻画：将顶点划分成引理告诉我们的一些集合，我们只需要粗略地说每对集合之间有多少条边，并且我们知道这些边是以一种看起来随机的方式分配的。这并不能确切地告诉我们这个图是什么样子的，但是更多情形下两个随机图的差别是不重要的，因为它们都是随机的，所以它们都具有你希望一个随机图所具有的性质。

Szemerédi 正则引理很快成为，并且现在仍然是极值图论的一个核心的工具，它的间接的影响，如随后的许多变形和推广，仍然非常广泛。

我许诺过要讨论正则引理的一些间接的实际应用。所以让我以一个具有明显实际重要性的人工智能问题开始，然后回到正则引理。没有人可以否认：如果有人可以设计一个能够从经验中学习的计算机程序，那么这个程序将有无数的实际应用。试图去做这件事的人工智能的一个分支称为机器学习。一个被称为 PAC 学习的著名的抽象模型是由 Leslie Valiant 提出的，是研究机器学习的一种好的结构。[字母 PAC 代表“probably approximately correct”(概率近似正确)]。这引出了一个被归入一般性能测试的纯数学的问题。粗略地讲，你有一个结构，你希望去证明它要么有某个性质，要么它可能非常类似于一个不具有这个性质的结构。例如，给你一个图，让你去证明它包含一个三角形，或者它跟一个不包含三角形的图只有略微的不同。从机器学习的角度来看，我们感兴趣的是这些通常可以被格外快地处理：程序会执行很小数目的一些简单的测试，然后形成一个可靠的假设（也就是，一个概率近似正确的假设）。允许我们去证明这件事的工具是什么呢？那就是 Szemerédi 正则引理。

5. 排序

塞迈雷迪也因成为 Miklos Ajtai, Janos Komlos 和 Endre Szemerédi（简称 AKS）三人之一而著名。我将论述他们工作的两个最著名的部分，但是我必须强调这只是一个小样本。当我说“最著名”的时候，我的意思是类似于高速公路上的光线：它们非常的昂贵，但是它们也非常的多。

计算机科学中的一个古老的话题是排序算法。给你一

个对象的集合，并且它们中的任意两个都是可以比较的，你的任务是用尽可能少的比较来对它们进行排序。为了研究这个问题，你可以想象这是岩石的一个集合，你要按照它们的重量进行排序，做这件事你所需要的是一副天平，它能够告诉你任意给定的两块岩石哪块更重。你每使用一次天平需要支付一美元，并且你希望花费尽可能少的钱。

一个漂亮的论证说明如果你有 n 个对象，你需要进行的比较的数目至少是 $n!$ 的（以 2 为底的）对数（感叹号表示阶乘，所以 $n!$ 表示 $1\times2\times\cdots\times n$）。这个论证足够简单以至于我可以在这里给出。$n$ 个对象的所有可能的排序数目是 $n!$ 。每次你询问的时候，只有两个可能的答案，所以对目前而言你所收到的答案构成的排序的数目，你不能希望将它减少超过 2 的因子。（这有点像给出 20 个问题：每个问题将世界的剩余东西一分为二，如果你不够幸运的话，你得到的答案将是比较大的那一半，所以一般来说，你不会比将可能性的集合减少 50% 做得更好。）因此，k 步之后，你不能将可能序列的集合减少多于 2^k 的因子。于是在最坏的情况下，步骤的数目必然为满足的 2^k 至少为 $n!$ 的某个 k，否则的话，一定存在多于一个由你的信息所构成的序列。这等价地说 k 一定至少为 $n!$ 的对数。

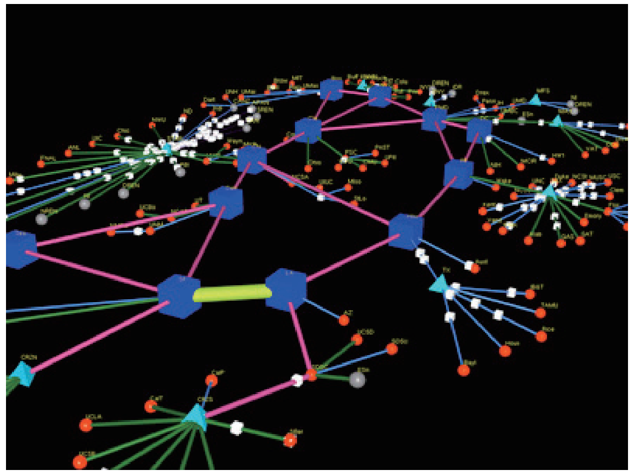
$n!$ 的对数大概是 $n\log(n)$（即 n 的对数的 n 倍）。有趣的是，目前已知的排序算法是通过近似比较的数目而得到的。也就是说，为给出之前的答案，即要求许多接近理论最小值的比较，存在已知的方法用来决定对哪两个对象进行比较。例如，冯•诺依曼在 1945 年发明了一种实现这个问题的方法，称为归并排序（Merge Sort）。

在 1945 年底，塞迈雷迪仅仅五岁，因此，排序算法这一课题早在塞迈雷迪研究数学之前就已经完全出现了。

让我们回到我们希望按照重量排序的岩石问题，并且将这一游戏做轻微的变化。这一次你将拥有尽可能多的天平，这样你就可以同时进行多次比较。所以你要做的是组织一系列的称重，每次称重中你可以对尽可能多对的岩石称重。一个明显的限制是同一块岩石不能放在不同的天平上，所以在每次称重中每块岩石至多被比较一次。你现在的目标是使用最少的称重次数对岩石进行排序。

因为我们已经知道大概需要 $n\log(n)$ 次比较，并且每次称重你最多可以做 $n/2$ 次比较，所以显然称重的总数将会大约为 $2\log(n)$。在很长一段时间里，人们能否成功地得到这一理论最小数值是一个公开问题，这就是 AKS 解决的问题。他们提出了一个极其聪明的排序方法，使得称重次数确实达到 $\log(n)$。用计算机科学的语言来说，AKS 发现的是用于排序的一种快速并行算法。

这里我不能完全的描述他们的方法，但是可以给出这一方法的某些想法。假设你以 1000 块岩石开始，并且将它



图论既困难又有实际应用

们分成两组，每组 500 块。（在这一步，你绝对没有任何比较两块岩石重量的思路。）你要做的事情是将一组中的岩石跟另一组中的岩石进行配对，同时做 500 次比较，然后将较轻的那些岩石放到标记为 L 的一组，较重的那些放到标记为 H 的一组。如果 L 中的所有岩石都比 H 中的所有岩石要轻，那么我们将非常高兴，但是目前为止，我们绝对没有任何理由来相信这是正确的。无论如何，我们将重复这一步骤。当然，为了得到更多的信息，我们现在希望以一种不同的方式对岩石进行配对。

根据埃尔德什的方法，我们可能认为将 L 中的岩石和 H 中的岩石随机地配对并重复这一步骤是一个好的方法，的确如此。也就是说，每一次如果 L 中的一块岩石比我们从 H 中捡出的岩石要重的话，我们就将它们交换一下，如果轻的话，我们保持不动。

如果我们保持将 L 中的岩石和 H 中的岩石随机地配对，那么存在一个一般的趋势，最终 L 中的岩石较轻一点，H 中的岩石较重一点。而且随着程序的继续，这个趋势越来越显著：如果 L 中的大部分岩石已经是较轻的了，那么它们将不太可能会被移到 H 中，H 中的岩石也不太可能会被移动到 L 中。AKS 证明在常数次比较之后（即一个不随 n 的增大而增大的数字），L 中的绝大多数岩石都比 H 中的绝大多数岩石要轻。

如果 L 中的所有岩石都比 H 中的所有岩石都轻，那么我只需在每一组中重复这一程序，并且大约 $\log(n)$ 步之后我们就可以结束了。然而，我们所知道的是这对几乎所有数目的岩石是正确的，所以尽管 AKS 确实达到了这一结论，但是他们要完全证明这个问题还需要付出很大努力。

关于这个算法的最后一点：我上面所描述的算法是一个随机算法，因为所有的对都是随机对。然而，存在一类非常有用的被称为扩展图的图，它可作为随机图的替代来使

用。这里，你可以用扩展图的边来决定如何去给岩石配对，而不是靠投掷硬币的办法，并且这时算法仍然是起作用的。这就是去随机化（derandomization）的一个例子，这是理论计算机科学的一个基本思想，它意味着算法可以以一种完全确定的方式运行。

6. Ramsey 数 R(3, k)

你所期望的图中的一个三角形是：三个顶点彼此相连。一个独立集是一个顶点的集合，他们彼此没有边相连。这里给出一个简单的论述来证明，一个具有 k^2 个顶点的图一定包含一个三角形或者包含一个大小为 k 的独立集。等价地说，如果一个图既不包含三角形，也不包含大小为 k 的独立集，那么它的顶点个数一定小于 k^2，这实际上是我要证明的。

论述如下。令 v 是图中的任意一个顶点。与 v 关联的任何两个顶点都不会有边相连，因为那样的话我们就有一个三角形。因此，与 v 关联的所有顶点构成一个独立集。于是 v 不能跟多于 $k-1$ 个其他顶点关联（因为我们假设这个图不包含大小为 k 的独立集）。

现在我们设想来尝试寻找一个大的独立集。我们做这件事的一种方法是去寻找一个顶点的序列 $v_1, v_2, \cdots$, 确保我们选择的每个新的顶点跟之前选过的任何顶点都不关联。我们能做到这点吗？假设目前为止我们已经选择了顶点 $v_1, v_2, \cdots v_j$，其中每一个都关联于至多 $k-1$ 顶点，所以它们之间至多关联 $(k-1)\,j$ 个顶点。因此，当选择一个新顶点时，我们必须回避至多 $j+(k-1)\,j=kj$ 个顶点。所以只要顶点的数目超过 kj，我们就可以扩展这个序列。如果我们想得到从 j 到 k，那么我们需要的顶点数目要超过 $k(k-1)$。因为 $k^2>k(k-1)$，所以如果我们有 k^2 个顶点，我们将能继续我们的序列直到至少 v_k，于是这给了我们一个大小为 k 的独立集。

我们真的需要那么多个顶点来保证一个三角形或者一个大小为 k 的独立集吗？我们可以给出一个比 k^2 稍微强一点的结果：$k(k-1)+1$ 个顶点就足够了。但是存在 $k(k-1)$ 个顶点的图，它既不包含三角形，也不包含大小为 k 的独立集吗？如果不存在，这样的图可以有多少个顶点呢？满足这些的最大可能的数称为 Ramsey 数 $R(3, k)$。

上面的讨论（根据数学研究的标准）是非常简单的，但是确定是否可以改进它被证明是非常困难的。这就是 AKS 解决的问题：他们证明 $R(3, k)$ 至多为 $k^2/\log(k)$ 乘以一个常数因子。如果你真的希望欣赏一下这个成就，你就应该花一点时间自己来考虑一下这个问题，但是如果你没有时间，那么你至少要记住这个问题已经有几十年的历史了，而且 15 年后 Jeong Han Kim 在另一篇著名的文章中证明了这个结果是最好的：即 $R(3, k)$ 不会超过 $k^2/\log(k)$，而且实际上等于 $k^2/\log(k)$（仅相差一个常数因子）。

为了证明他们的结果，AKS 可以比上面讲到的简单论述做得更好。极其粗略地，他们用的是同样的讨论，但是用一种更谨慎的方式处理的。回忆一下基本的想法是选择顶点 $v_1, v_2, \cdots$, 并且回避你所选顶点的邻点。我们可以描述这个程序如下。从整个图出发，我们选择一个顶点 v_1，并且扔掉它的所有邻点；然后从图的剩余部分选择顶点 v_2，并且扔掉它的所有邻点。我们这样继续做下去。因为任何顶点的邻点个数都不会超过 $k-1$，所以每一步我们不会扔掉太多的顶点，因此我们可以持续相当长的一段时间。

现在如果我们在程序的任何一步中，发现了一个顶点，它的邻点数目远小于 $k-1$，那么我们将会非常高兴：我们将选取那个顶点，并且我们不需要扔掉图的那么多个顶点，所以程序可以持续的更长。但是我们可以找到这样的顶点吗？最开始的时候，没有任何原因。但是我们确实对这个程序给出了某个控制：当我们选择一个顶点 v_i 的时候，我们扔掉它的邻点。如果这些邻点本身有很多的邻点，那么当我们将它们扔掉的时候，我们也将会扔掉很大数目的边。所以基本的想法是以这样的方式选择序列 $v_1, v_2, \cdots$：尽量减少没有被扔掉的图的那部分边的数目。AKS 证明将这个想法继续下去是可能的，并且最终会延长这一进程使得算法将会持续大约 $\log(k)$ 次，只要那个简单的论断成立。

上面我所暗示的讨论并不是 AKS 给出的原始证明，但是描述起来比较容易。他们早期的讨论也是非常重要的，因为它是称为半随机方法的一个较早的例子，这里我将不再讨论，但是我想说这是另一种具有很多应用的技巧。

7. 结论

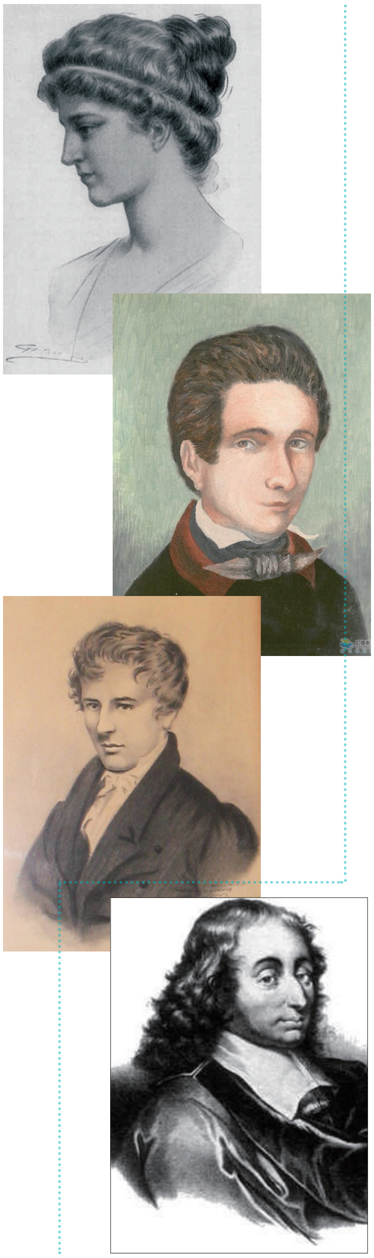
一些数学家因为一个或者两个定理而著名，另一些数学家因为巨大的、重要的一些一流结果而著名。偶尔，也会有数学家因为两者而著名。没有 Szemerédi 定理和 Szemerédi 正则引理的讨论，塞迈雷迪的工作将不会完整。然而，对塞迈雷迪来说，他的工作远远多于这两个定理，他已经发表了 200 余篇论文，正如我在开始时提到的，71 岁的他并没有任何慢下来的迹象。他应该得到阿贝尔奖，这是极其恰当的。即使我仅仅了解他工作的一些表面情况，我还是希望通过这个小样本描述，至少能够让大家认识到推荐他获奖的一些理由。

作者简介：W. T. Gowers 是英国皇家学会院士，剑桥大学数学教授，因其将泛函分析与组合数学联系起来的贡献于 1998 年获菲尔兹奖。

漫谈终身未婚的数学家

王淑红

> 作为《数学文化》的忠实读者，每次翻阅都被那些奇妙的思想和故事深深地吸引，情不自禁拿起笔来描摹终身未婚的数学家，这是《数学文化》杂志给我的启发和勇气。看数学文化，也参与数学文化，融为数学文化的一员，是我的莫大心愿。以一篇小文开始与《数学文化》的知交，同时谨祝《数学文化》越办越好。



从上至下：希帕蒂娅（Hypatia），伽罗瓦（EvaRist Galwa），阿贝尔（N. H. Abel），帕斯卡（Blaise Pascal）

中国人讲究“修身、齐家、治国、平天下”，“男大当婚女大当嫁”，“成家立业”。似乎都把成家放在立业的前面，家是休憩的港湾，是稳固的大后方，好像有家才能安身立命。而西方很多数学家却与此背道而驰，比如希帕蒂亚、E. 诺特、英年早逝的数学家伽罗瓦和阿贝尔、微积分的创立者牛顿和莱布尼兹、柏拉图、笛卡尔、帕斯卡、达兰贝尔、戴德金、切比雪夫、哈代和保罗 • 厄多斯。

他们不但没有先成家后立业而且终身未婚。那么促使这些数学家独居终老的原因是什么呢？这些数学家为什么不走寻常路？为什么对于人世间最美丽的爱情敬而远之？为什么甘愿孤寡一生？都是我们疑惑的。俗话说女人通过征服男人征服世界，而男人通过征服世界征服女人，这些数学家为什么只追求征服世界而没有去征服女人呢？是因性格孤僻、孤芳自赏，还是要为数学和科学事业奉献终身呢？是时代的因素还是人性的个案呢？

带着这些疑问和好奇，翻开这些数学家成长的足迹，期许能够发现一些端倪。竟然发现一个奇妙的现象，这些数学家不娶不嫁，不仅仅是为了事业，还为了更为崇高的爱情。这是为什么呢？让我们来看看一些伟大学者醍醐灌顶的精辟论断吧。

英国哲学家培根，也是我本人最喜爱的一位哲学家，曾经说过：最好的作品，最伟大的情操肯定出自未婚的或没有子女的男性。

歌德说：爱情是理想，婚姻是现实，混淆理想和现实，难免遭到惩罚。

著名的单身作家华盛顿 • 欧文说：对已婚男人来说，浪漫爱情的芬芳会在婚后消散；对单身汉来说，爱情可能沉睡，但永远不会死亡。

绅士的英国人一贯主张单身汉比已婚男人更懂女人，否则的话，他们早就结婚了。

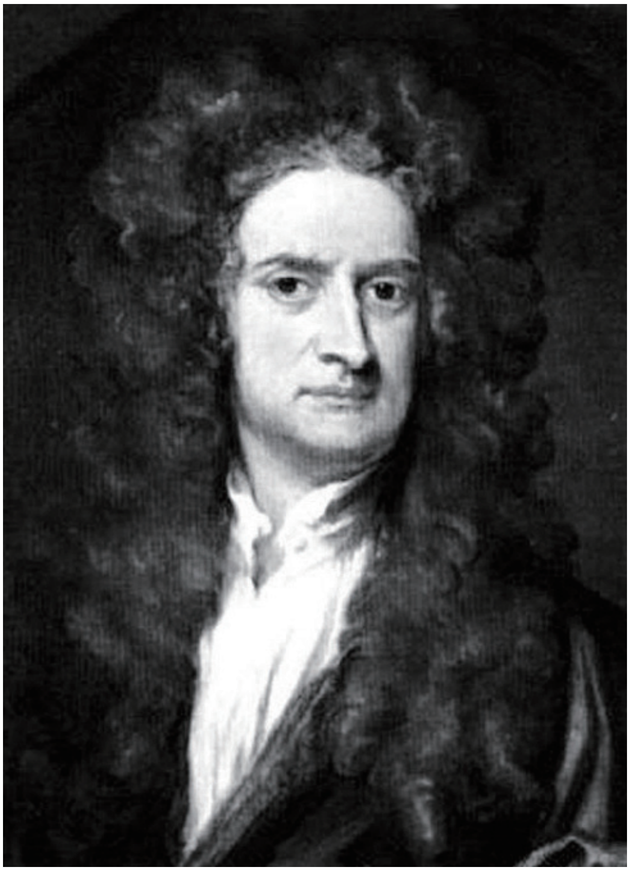
由此看来，这些单身的人士似乎是对爱情有更高的信仰和追求，追求一种纯粹的永不凋零的爱情之花，而这朵花大多时候生长在心上。

不妨看一些个案，也许我们还会发现点什么。

尽管在二十多岁时，希帕蒂娅的求婚者就络绎不绝，但她要干一番大事业，不想让爱情过早地进入自己的生活，因此拒绝了所有的求婚者。后来被一群听命于主教西里尔的基督暴徒残酷杀害，爱情之花尚未绽放便不幸辞世，不能不说是一种遗憾。伽罗瓦因爱情决斗而身亡，一代天才殒殁在爱情的狼烟中，他是追求爱情的，并且为了追求爱情而死。挪威的数学家阿贝尔一生坎坷，去世后获得各项殊荣，大概他是因为生存的压力而没有结婚吧。帕斯卡 39 岁时病逝，一生没有恋爱。

这几位早逝的数学家未婚我们还好理解，可是有的数学家很长寿，却没有结婚，实在令人觉得蹊跷，比如被数学史家 E.T. 贝尔赞誉为有史以来最伟大的三位数学家之一的英国科学家牛顿，虽然也有过对爱情的渴望，但最终还是因为更加醉心于科学事业而与婚姻失之交臂，也许对于牛顿而言，科学事业就是他钟爱一生的爱人吧。

牛顿有两次恋爱经历被传为美谈。第一次是牛顿在剑桥大学求学期间，因为瘟疫蔓延，学校被迫放假，因此牛顿暂停学业回到家乡住在舅父家中，正值 23 岁青春年华的牛顿与表妹一见钟情。牛顿喜欢表妹的美丽、聪颖、好学和富有思想，表妹则喜欢牛顿的渊博和远见卓识。他们经常一起散步，牛顿即兴地长篇大论他的学习和研究工作，表妹即便听不懂也表现出很大的耐心，饶有兴味地聆听。牛顿心里暗喜："这个可爱的女子认为我的所思所讲非常有趣，一定是我本人很不错，而且她也一定是聪慧机敏的非凡女子。如果她能协助我一起解决工作中的困难，夫唱妇随、珠联璧合，何其美哉乐哉！"但想象中的美好却并不总是能在现实中兑现。由于牛顿生性腼腆，所以未能及时表达出自己的爱慕。又由于瘟疫结束后牛顿重回剑桥大学，没有重视自己的个人生活，全神贯注地沉浸于科学研究，遂把远方的表妹抛之九霄云外。表妹误以为牛顿对自己冷淡，遗憾地另嫁他人。这是牛顿因醉心于科学研究而丧失的第一次婚姻契机。



牛顿（Newton, 1643-1727）

与第一次爱情擦肩而过之后，年轻的牛顿并没有停止蠢蠢欲动的青春勃发的心，时而也有对浪漫爱情的炽烈向往。有一次，青春的激情点燃了牛顿的爱情之火，牛顿轻轻地握着一位美丽姑娘的手，含情脉脉地注视着她，似乎将要有什么事情发生，但在这千钧一发之际，他的心思却忽然飞跃到无穷小量的二项式定理。他竟然如梦似幻般下意识地抓住姑娘的一个手指，当做是通烟斗的通条，硬往烟斗里塞。姑娘痛得大叫，他才从二项式定理的梦中清醒。面对惊吓过度的姑娘，他连忙柔声地道歉："啊！亲爱的，饶恕我吧！我知道，我是不行了。看来，我是该打一辈子光棍！"宽容的姑娘饶恕了牛顿的无意之为，但却无法理解他为何如此醉心痴迷于科学，断然离开了牛顿。牛顿的第二次爱情就这样被扼杀于襁褓，幻化成泡影。

此后牛顿再没有萌动火热的爱情。他痴迷于科学研究，不断发现新的问题，乐享其中，连做梦都是宇宙、世界。往往顾不上打领带结、系好鞋带和扣好马裤就走进大学餐厅。牛顿把他旺盛的生命毫无保留地奉献给了科学事业，把科学当做了为之倾心和相守一生的爱人。据心理学的分析，很多成年的问题都可以从年少时找到答案，也许牛顿少年时代在一首诗里表白的远大抱负就注定了他终身未婚的命运吧：

> 世俗的冠冕啊，我鄙视它如同脚下的尘土，
> 它是沉重的，而最佳也只是一场空虚；
> 可是现在我愉快地欢迎荆棘冠冕，
> 尽管刺得人痛，但味道主要是甜；
> 我看见光荣之冠在我的面前呈现，
> 它充满幸福，永恒无边。

莱布尼茨（ Leibniz, 1646-1716 ）

达兰贝尔（D'Alembert, 1717-1783 ）

切比雪夫（Chebyshev, 1821-1894 ）

与牛顿几乎同时发明微积分的德国数学家莱布尼茨同样终身未婚。他们二人的微积分优先权之争被称为科学史上最不幸的一章，英国数学家因固守牛顿的传统而严重阻碍了英国的数学和科学进展。争论一度白热化，但是这两位数学的巨匠本人却没有针锋相对，他们都在不同的场合彼此赞誉过对方。我们不该把他们看成敌人或者对手，而应该把他们看成是惺惺相惜心灵相通的知音或朋友。他们共同发明微积分，他们又同样终身未婚，难道只是历史的巧合吗？研究莱布尼茨的欧洲学者说：“莱布尼茨从未结过婚，五十岁时他曾考虑结婚。但他的心上人要求给她一点时间再想一想，这也给了莱布尼茨一点时间再想一想。所以他从未结过婚。”

而达兰贝尔虽然也终身未婚，但有一位患难与共、生死相依的朋友，即沙龙主人勒皮纳斯。虽未婚但有一位红颜知己也算是幸运。

有人可能会说，17、18 世纪的西方，在大学里做教授被要求必须像牧师那样独身，所以造成了有些数学家未婚的现象。但对于戴德金、切比雪夫、E. 诺特、哈代、保罗 • 厄多斯这些生活于 19、20 世纪的未婚数学家又怎样做出解释呢？切比雪夫有一个富有同情心的表姐，当其余的孩子在庄园嬉戏之时，表姐教他唱歌、读法文和做算术。一直到临终，切比雪夫都把这位表姐的相片珍藏在身边。可见他是喜欢女人的，但为何没有走进婚姻的神圣殿堂呢？哈代一直受同样未婚的妹妹精心照顾一生，难道未婚具有某种传染性吗？

日本有人专门研究过 280 位大科学家的生平，发现他们事业高峰都在二三十岁之间，三十岁以后，事业螺旋式下降。更为有趣的发现是，大多已婚科学家的创造力枯竭得很快，而单身科学家却能将高效的创造力保持到五六十岁。由此看来，婚姻可以使男人变得迟钝。已婚的科学家是不是该着急了呢？大可不必，这也许只是一种臆测、笑谈或者巧合。君不见还有那么多家庭事业双丰收的科学家吗？比如欧拉就非常喜爱孩子，喜爱家庭生活。一生育有 13 个子女，在做科学研究的时候，经常子女绕膝。有人说读读欧拉，他是所有人的老师。可能和他喜爱生活、热爱音乐有很大关系吧。

谨以此文抛砖引玉，至于 E. 诺特、柏拉图、笛卡尔、帕斯卡、达兰贝尔、戴德金、切比雪夫、哈代和保罗 • 厄多斯这些数学家为什么终身未婚，有兴趣的读者可以补充和继续探究。

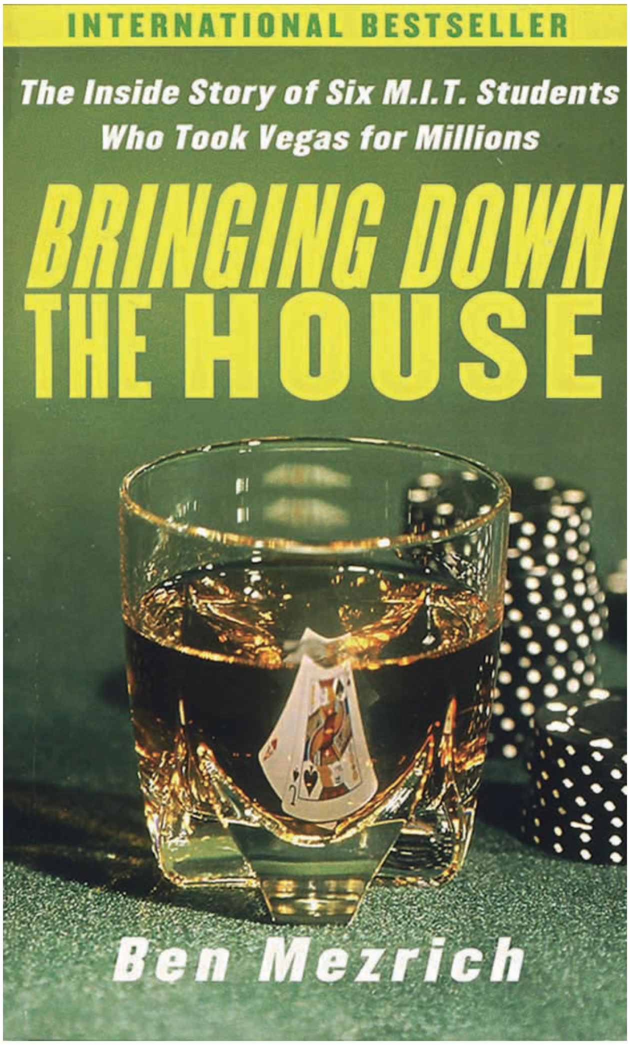
作者简介：王淑红，河北师范大学数学与信息科学学院讲师，主要从事代数学及近现代数学史研究。曾在《自然辩证法通讯》、《科学技术哲学研究》和《西北大学学报（自然科学版）》等刊物上发表多篇论文。

打赢庄家

万精油

媒体热衷的新闻一般都与政界要人或电影明星有关，很少与数学或数学家挂边。最近却出了个例外，数学家进了媒体的眼界。报道说澳大利亚 19 名数学家组成“高智商”赌博集团，利用专业知识，在各国赌场和博彩业疯狂赌博。短短 3 年，总计赢取了超 24 亿澳元（约 156 亿人民币）。不久前，他们在赌场上的成功引起澳税务局关注，这一赌博集团才被曝光。后来的调查发现，这个赌博集团其实不是真正用到数学或统计，大部分盈利都是钻一些规则的空子，搞偷税漏税的勾当。

真正利用数学统计原理去赌博的事情在美国发生过。麻省理工有一帮学生就干过这事。后来还有人把他们的事迹写成书，拍成了电影。我曾经写过关于这本书的一个书评，可以帮助大家了解数学家如何在赌场发挥他们的优势，现在读起来也不算过时。当初写的时候读者对象是海外华人，数学统计不能太过专业，现在把它投到《数学文化》，可以加上一些数学和统计的东西，作为附录放在文章后面。



赌场里所有的玩法中，21 点是对玩家最公平的游戏。大家的牌同样比大小，差不多是 50-50 的游戏。当然，如果真是这样，赌场就不会开这种赌法了。赌场总是要有一点优势才能赚钱。赌场利用一些规则来为他们创造优势。不过，真正说起来，赌场为 21 点制定的所有规则几乎都是对玩家有利的。对庄家唯一有利的规则就是玩家总是先要牌。如果玩家先胀死，则不管庄家的牌如何，庄家先把钱收走。这个优势太大，没人愿意玩，幸好赌场另外还有一些对玩家有利的规则来平衡一下。比如，庄家 17 点以下必须要牌，17 点以上（包括 17 点）必须停。另外，如果玩家头两张牌就拿到 21 点（也就是通常所说的 BLACKJACK），则庄家赔一倍半。此外还有玩家可以分对、加倍等等。在这些规则下，庄家的优势不到 1%。这样算起来，10 块钱一赌的 21 点，玩家每把输 1 毛钱。100 块钱可以玩很久了。

对于职业赌徒来说，庄家的任何微弱优势都是不可容忍的。因为他们玩 21 点不是为了玩得久，而是要赢钱。庄家的任何优势，哪怕是微小的优势，在大量的盘数中就可以表现出来。要赢就必需要改变这种优势。顺便说一下，前面提到的庄家的 1% 的优势当然是要求玩家按最佳方案要牌。事实上大多数到赌场的玩家都没有按最佳方案要牌，不知道什么时候该停，什么时候该要，什么时候该分牌，什么时候该加倍等等。所以庄家的优势不止 1%。对职业赌徒来说，按最佳方案要牌不是什么问题。所谓最佳玩法无非就是三个由 0，1 组成的矩阵（见附录），半小时就可以背熟。我不是职业赌徒（业余赌徒都不是），但这几个矩阵也是可以倒背如流的。可是，倒背如流只能使你不会输得更快，却解决不了这 1% 的差距。

要打赢庄家就必须要会变赌注。在有利的情况下赌大一点，不利的情况下赌小一点。也许有人会觉得奇怪，牌都是随机洗的，怎么会有不利或有利的时候。这就是 21 点与诸如俄罗斯轮盘，CRAP 之类赌法的区别。这些赌法，上次的结果与下一次没有关系。这次色子掷出一个 6，下一次掷出任何数的概率仍然相同。而 21 点就不一样，这一次出来一张 A 或 10，剩下的牌中就少一张 A 或 10。仔细研究一下那三个要牌矩阵，你会注意到其本质基本就是假设下面一张是十点的牌。所以，如果你是 12 点以上，而庄家的明牌是 2 到 6，你就要停，因为你或庄家胀死的可能性很大。其它关于分对、加倍等几乎都围绕着这一点在转。所以，如果你有理由相信剩下的牌中 10 点以上的牌多，这就是对玩家有利的时候。你就需要增加赌注，这样你就可以在有利的时候把输出去的捞回来，而且赢更多。彻底改变 1% 的命运。

怎样才能知道剩下的牌中 10 点以上的牌多？这就需要记牌。这种记牌的人被赌场叫做“数牌者”（Card Counter）。他们开始下最小的赌注，等数到情况有利就下大赌注。用这种方法长期赌下去，赢面就超出 50%。赌场为对付这一招，把每一轮牌从一副增加到六副。电影《雨人》（Rainman）中有个人说：正常人是数不清楚六副牌的。但不“正常”的人很多，尤其是有钱赚的时候。不少人对六副牌也照数不误。实际上他并不需要记住所有的牌，只需记住大小牌的差，就一个数在那里来回倒，并不是太难的事。赌场的另一招是一轮牌快打完时就重新洗牌。即使如此，数牌者仍然可以有微小的优势。对于这种靠数牌下注的人，一旦被赌场发现就会被列为不受欢迎的人。轻者遭拒绝，重者什么情况都可能发生，甚至消失在沙漠里。每个赌场都有这样的黑名单。

所谓道高一次，魔高一丈。有聪明人想出用团体作战的方法来避免被列如黑名单。一人数牌，数到有利的时候

就做出一些暗号，另一人（看起来不相关的人）就来下大注。而数牌者照样继续下小注。因为有利的牌并不是每轮都出现。所以这个团体一般都有四五个人数牌，一个人下大注。下大注的人叫大玩家（BP=Big Player）哪里有利就往哪里跑。

《打赢庄家》（Bring Down the House）这本书讲的就是由麻省理工的学生组成的这样的团体。平常上学或工作，周末就飞到拉斯维加斯或大西洋城去赌。靠这种团体作战法几年内赢了好几百万。这本书写的是真实故事，但内容不输于虚构的电影。他们如何计划，如何表演，如何被出卖，如何被打得鼻青脸肿，团队内部因分赃不均或意见不同而产生的矛盾，团队与另外的团队因地盘问题而产生的纠纷，情节引人入胜。而且其对于各种人物的描述也相当独到。到美国来的中国留学生想当初都是自己圈子中出类拔萃的人物，与这些人可以有很多共鸣之处，读起来会特别过瘾。甚至对怎样教育自己出类拔萃的小孩也可以有一些借鉴。本来是写书评，却只是讲了讲打赢庄家的数学原理，故事情节部分还是大家自己去看吧。

附录：Black Jack 最佳策略简述

所谓最佳策略就是在给定状况下从统计上赢面最大的策略。这些策略是通过数学统计推出来的。不一定保证每副牌都赢，但从统计上来说你如果严格按照这个策略打牌的话，赢的概率最大。有多少种给定状况呢？通常情况下，庄家一张牌，从 2 点到 11 点。你有两张牌（如果刚分过对，则只有一张牌），其和为 2 点到 20 点（21 点的情况算 Black Jack，你已经赢了）。所以，总状况空间是一个 10×19 的矩阵。你的决策选择是三种，停牌（0），要牌（1），加倍（2）。所以，这个最佳策略可以用下面这个矩阵表示。

玩家 / 庄家	2	3	4	5	6	7	8	9	T	A
1	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
10	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1
11	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
12	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
13	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
14	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
15	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
16	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

特别说明一下，这个矩阵只适用于玩家没有 A 的情况。因为 A 可以算成一点，也可以算成 11 点，对于有 A 的情况专门有另一个矩阵（见后）。上面这个矩阵前 8 行很显然，肯定要牌。9, 10, 11 也肯定要牌，但有时候有比要牌更好的决策，那就是加倍。所以在 9 到 11 行里你会看见有 2。后 4 行也很显然，已经到 17 以上，肯定停牌。中间那些行就需要记了。初看起来不好记，但如果你假设后面翻起来的牌都是 10（10, J, Q, K），则很好理解，也很容易记。比如你是 14，庄家是 2 到 6 时你要停牌，因为你翻一张 10 你就涨死，但庄家如果暗牌是 10，就是 12 到 16 点，再翻一张 10 就涨死。所以这种情况下你要停牌。但是当庄家是 7 到 11 时，如果暗牌是 10，则已经够 17 点，可以停牌，你的 14 点就算输。这个时候你就需要要牌。所以，上面那个矩阵的第 14 行，前 5 个是 0，后 5 个是 1。其它的行都可以类似推出来。唯一特别的情况是第 12 行。这个需要专门记，事实上在有些情况下 12 行的前两个数是可以变的，讲起来就复杂了，自己琢磨吧。

顺便提一下，所谓加倍就是你认为条件有利时再下一倍的赌注。你有利时就加倍那赌场岂不是亏了。所以加倍是有附加条件的，这个附加条件就是你只能再要一张牌，不管下一张牌是多少你都必须停。与上面相同，如果你假设下面一张牌是 10 点，则上面所有加倍的情况都很好理解了。

对于有 A 的情况，就要用下面这个矩阵

玩家 / 庄家	2	3	4	5	6	7	8	9	T	A
1	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
2	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1
3	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1
4	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1
5	1	1	2	2	2	1	1	1	1	1
6	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
7	0	2	2	2	2	0	0	1	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

这个表也可以像前面所说那样记。庄家 4, 5, 6 时，再来一张 10 点就涨死。所以几乎都要加倍。当然，如果你已经是 18 点以上（8+A 或 9+A）就不用再加了。比如第 9 行，你的牌是一个 9 和一个 A。这时就不能再要牌。如果要来一张 10，你的点数没有增加（因为你的 11 点变成 1 点了）。但如果要来一张不是 10 那你的点数反而变小，所以不能再要牌，第 9 行全是 0。其它情况可以类推。

当你的两张牌是一对的时候，赌场允许你拆对，就是说再加一注把它分成两手牌。比如两个 8，加起来是 16，可以说是最坏的牌，拆开后得两个 8，每个 8 如果来一个 10 的话就变成 18，很不错的牌。所以不管对方是什么牌你都要拆对。其它情况下什么时候要拆对什么时候不拆可以看最后这个矩阵。这里，1 表示拆，0 表示不拆。你会注意到第 11 行全是 1。

玩家 / 庄家	2	3	4	5	6	7	8	9	T	A
1	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
8	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
9	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

在讲上面这些矩阵的记法时我们反复强调假设后面来的牌是 10 点。那么很自然的，后面的牌是 10 点的概率大的时候这些矩阵就非常有效，这种时候根据这些矩阵而采取的策略赢面甚至超过庄家。这就是为什么要数牌。注意，我们这里说的是“数”牌而不是记牌。你并不需要记住所有出现过的牌，你只需知道出过的牌里有多少是大牌（10, J, Q, K 或 A）或小牌（2 到 6）。出现一个小牌就 +1，出现一个大牌就 −1。中间牌（7, 8, 9）就不动。所以，你脑袋里只需记一个数（不断上下波动）。如果你记的这个数超过两倍于庄家所用的牌副数（一般赌场都用六副牌，所以有利点是 2×6 = 12），那么情况就对你非常有利了。这个时候就该下大注，把前面输的钱捞回来。必须提醒大家的是，这只是统计上对你有利，实际情况是你下大注的时候也有可能输。所以，你必须要有相当数量的赌资来对付这种统计上的小波动。一般来说需要有 100 倍于你所下的最大赌注的赌资，才能比较安全的对付统计上的波动。我上面提到的数牌法只是众多数牌法中最简单的一种。其它还有更复杂的，比如，4, 5, 6 算 +2, 10, J, Q, K 算 − 2，A 算 − 1, 2, 3 算 +1 等等。但这些复杂的数法容易出错，反到没有简单办法有效。

过去二十多年，美国境内，世界各地，不论是开会还是旅游，凡是我到过的有赌场的地方，我都会去玩一玩 21 点。至今几十场下来，赢多输少。虽然小打小闹赢不了多少钱，但至少说明我上面提到的这些矩阵还是很有效的。有一次在巴哈马的一条船上，输得莫名其妙，后来发现他们赌场搞假（因为小船，没有人监督他们），当意识到有假的时候我马上停了。这其实是在赌场玩的最重要的一点，要知道什么时候停。不管输赢，都要给自己设一个限，该停的时候就要停。你要知道一直赌下去赌场基本上是要赢的（这是他们赖以生存的理论基础）。如果没有团体作战，一个人长期作战，要么你大输，要么被赌场列进黑名单。写这个附录不是为了鼓励你去赌，而是让你偶尔在赌场玩一玩的时候不要输太快，增加更多的乐趣。

数学聊斋连载

（连载四）

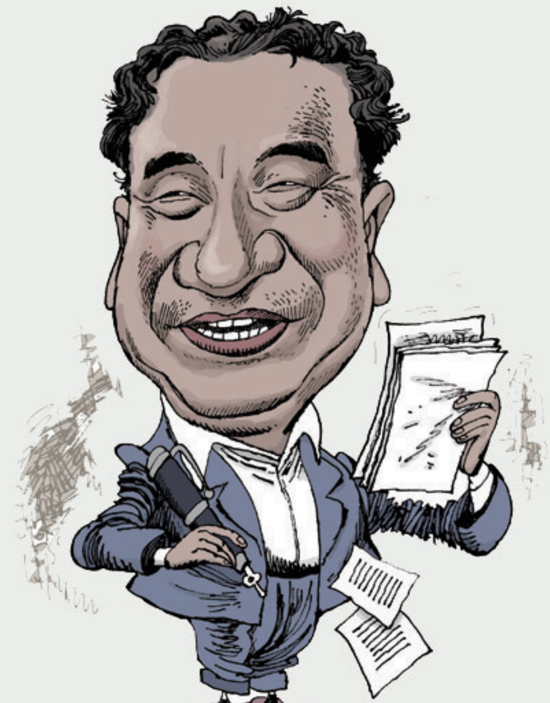
李尚志

明星做广告的责任

——非欧几何

明星经常做广告。很多人因为对明星的崇拜而相信明星做广告的产品，踊跃购买。但是，明星做广告的产品有时候也会被揭发为假冒伪劣产品，甚至是含有毒成分的食品。这时，有的消费者就会来追究明星做广告的责任，声称是受了明星的骗才买了这些产品，要求追究做广告的明星的法律和经济责任。这时候，明星就会出来大呼冤枉，很多媒体也会出来为明星喊冤，其理由也振振有词：“明星也是人，不是万能的，不可能具有鉴别这些产品的专业知识，也不可能花很多的时间和精力去鉴定这些产品的真伪好坏，怎么能够保证所做广告的产品的质量，怎么能够对产品的质量问题承担这么大的责任呢？”

这些理由听起来都很正确。但是，当明星做广告宣传产品的时候，他们是否也会将这些正确的话讲出来，提醒消费者不要做出错误的判断呢？是否也会在将产品吹得天花乱坠的时候也提醒一句：“我们明星也是人，不是万能的，不可能具有鉴别这些产品的专业知识，也不可能花很多的时间和精力去鉴定这些产品的真伪好坏，因此大家不要盲目相信我们的广告词，应当理性地作出自己的判断。”明星当然不会良心发现做这样的提醒，唯利是图的广告商更不会允许明星做这样的提醒。因为，广告商让明星做广告，其目的就是要消费者相信“明星是万能的，也是不会骗人的，他们说好的产品就一定是好”。明星之所以能够拿到



李尚志

高额的广告费，就是因为明星能够让更多的人相信他们是万能的，相信他们推荐的产品一定是好的。

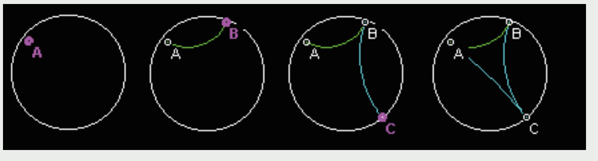
做广告的时候希望消费者相信“明星是万能的”，踊跃购买。出了问题又希望消费者相信“明星不是万能的”，不要追究他们的责任。我们不必与明星和商人们辩论到底明星万能还是不万能。但是，不用辩论

也知道：明星不可能既是万能的又不是万能的。如果明星是万能的，在产品出问题之后就应当追究明星们的责任。如果明星不是万能的，那就请不要相信明星的广告，在决定是否购买这些产品的时候独立作出自己的判断。如果你要坚决作明星的粉丝，相信他们是万能的，盲目购买他们作广告的产品，那就做好牺牲自己利益的准备，中了毒也自认倒霉。“明星不可能既是万能的又不是万能的。”这个简单道理不但可以用来说明明星做广告应当承担什么社会责任，也可以帮助我们理解看起来违背常理的非欧几何。

从中学的平面几何开始，学生学的就是欧几里得几何。其中有一条重要的公理：在平面上，过直线 a 外面一点 P，只能作一条与直线 a 不相交的直线 b。同一平面内这两条不相交的直线 a, b 称为相互平行。这个公理称为平行公理。由平行公理出发可以推出一系列几何定理，例如：三角形内角和等于平角（180度），等等。

欧几里得几何还有一些别的公理。例如，过平面上不同的两点可以并且只能作一条直线。这些公理的成立看起来都是显而易见的。但是，平行公理似乎显得复杂一些，不那么显然，似乎可以由别的显然成立的公理推导出来。于是，就有很多数学家试图用更显而易见的公理来证明平行公理。经过很多年的努力都没有成功。很自然，有些人尝试用反证法来证明平行公理。也就是：假定平行公理不成立，假定在平面上过直线 a 外面一点 P 可以至少作两条不同的直线 b, c 与 a 都不相交，试图由此推出矛盾。从这个假设出发，推出了很多看起来荒唐的结论。例如，三角形内角和小于 180 度，相似三角形必然全等，等等。曾经有很多人以为：既然否定平行公理之后推出了荒唐的结论，那就是证明了平行公理。其实这不对。什么叫做荒唐？他们所说的“荒唐”其实是按欧几里得几何为标准来作出的判断。比如，三角形内角和为什么一定是 180 度？小于 180 度为什么就是荒唐？其实，“三角形内角和等于 180 度”比“在平面上过直线 a 外一点 P 只能作一条直线 b 与 a 不相交”更不显然，凭什么就能用前者来证明后者的成立呢？如果否定平行公理之后能推出相互矛盾的结论，那就证明了平行公理的正确性。反之，否定平行公理之后推出的一大批看起来荒唐的结论相互不矛盾，可以自圆其说，这些“荒唐”结论就可以组成另外一个几何体系与欧几里得几何分庭抗礼。

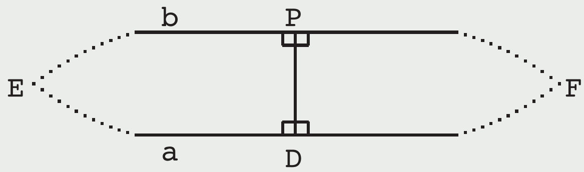
经过无数的失败，终于有人醒悟过来，意识到否定平行公理之后得到的一大批看起来荒唐的结论相互是不矛盾的。俄罗斯数学家罗巴切夫斯基首先在俄罗斯科学院做报告正式宣布了这一结论，由这些貌似荒唐却不矛盾的命题组成了一个新的几何体系，称为罗巴切夫斯基几何。也就是说：既可以假设平行公理成立，过平面上任意直线 a 之外一点 P 只能作一条直线与 a 不相交，由此推出一系列相互不矛盾的几何定理，组成欧几里得几何。也可以假设平行公理不成立，过平面上任意直线 a 之外一点 P 至少可以做两条不同的直线 b, c 与 a 都不相交，由此推出另外一系列相互不矛盾的几何定理，组成罗巴切夫斯基几何。这两种几何都没有矛盾，都可能正确，但不可能同时正确。到底哪一个正确，不能仅由逻辑推理来判定，需要在现实的宇宙空间中进行测量来判定。



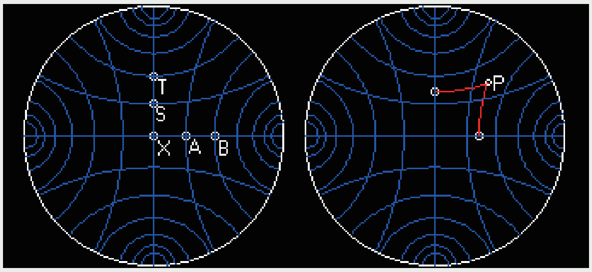
（非欧几何意义下的）双曲几何里的三角形

虽然人们没有在否定平行公理之后推出的一大批非欧几何定理之间发现矛盾，但没有发现矛盾不等于没有矛盾。有可能是因为地球人都不够聪明，所以没有发现矛盾，以后有可能从天上掉下个外星人发现矛盾。最好的办法是不要等待天上掉下外星人，而由地球人给出一个证明，说明否定平行公理之后得到的几何定理相互没有矛盾呢。这样的证明确实给出来了，但不是直接证明非欧几何定理之间没有矛盾，而是证明了：只要欧几里得几何没有矛盾，非欧几何就没有矛盾；如果非欧几何有矛盾，那么欧几里得几何也有矛盾。如果欧氏几何与非欧几何两者都有矛盾，就什么几何都没有了。我们只好同意两者都没有矛盾。

按照欧几里得几何，过平面上任一直线 a 之外一点 P 只能做一条直线 b 与 a 不相交。按照罗巴切夫斯



基几何，过 P 与 a 不相交的直线至少有两条，因而有无穷多条。在逻辑上，还应当有一种可能性：过 P 与 a 不相交的直线只有 0 条，根本就不存在。不过，可以证明直线 a 之外一点 P 至少有一条直线 b 与 a 不相交。证明方法是：过 P 作 a 的垂线 PD，如上图。再过 P 做 PD 的垂线 b。我们断定 b 与 a 不相交。若不然，设 b 与 a 有交点 E。将直线 a, b 关于直线 PD 做轴对称变换之后仍分别与 a, b 自身重合，而 a, b 的交点 E 则从 PD 的一侧变到另一侧成为 a, b 的另一公共点 F。a, b 是过两点 E,F 的两条不同直线，这与“过不同的两点 E、F 只能作一条直线”的公理相矛盾。为什么 E、F 一定是两个不同的点？这是因为它们分别位于直线 PD 的两侧。有一条公理说：任一条直线将平面分成两个不相交的部分。如果将这条公理也去掉，则直线 PD 两侧的 E、F 有可能是同一个点，就好比在地球上从中国往东和往西可以到达同一个地点，以上的证明就并没有推出矛盾。这就得到平行线的第三个公理：从平面上任一直线 a 之外一点 P 的每一条直线都与 a 相交。由这个公理推出的结论组成既不同于欧几里得又不同于罗巴切夫斯基几何——黎曼几何。黎曼几何并不奇怪：假如将地球表面看成平面，这个“平面”上任意两点 A, B 连成的最短线 (过 A, B 与球心所作平面与球面的交线) 看成直线，这它们满足平面与直线的相关公理，并且任何两条这样的“直线”都相交。



双曲几何里的坐标系

以上三种几何都没有矛盾，其中哪一个在现实的宇宙空间中成立？科学家们似乎更偏向于黎曼几何。不过，在小范围的宇宙空间中，罗巴切夫斯基几何与黎曼几何近似地等同于欧几里得几何，正如地球表面的球面在小范围内近似地等同于平面。这个“小范围内的宇宙空间”有多小？在太阳系甚至银河系范围内都不会有显著误差。生活在地球上的人们可以大胆使用欧几里得几何而不用担心有明显的误差。不过，这三种几何虽然是为研究几何空间发明出来的，却还可以用来描述很多别的事物。正如现实的空间虽然是三维的，四维或更高维数空间的几何和代数知识仍然可以用来研究现实世界中由 4 个或更多个参数决定的系统。

房价何时过千万？

——等比级数的中国故事

数学教材和科普读物，讲到等比数列的时候都喜欢讲一个故事：

印度一个聪明人为国王发明了国际象棋。国王非常高兴，问这位发明人想要什么奖赏。并且答应：“你要什么我就给什么。”发明人回答：“请按国际象棋的 64 个格子给我奖赏：第一个格子给我一粒麦子，第二格给两粒，第三格给 4 粒。依此类推，每个格子给我的麦粒数是前一个格子的两倍。64 个格子给完了，就是我所要的全部奖赏。”

国王想，他所要的麦子不多呀。从 1 粒麦子开始，实在很少。每次两倍，也不多。64 个格子也不算多。经过计算，这些麦子的总数 2^{64}-1 是一个 20 位的整数。这些麦子的总量比全世界生产的麦子都多，可以从地球一直堆到太阳。国王给不出这么多麦子。

这个故事的中心思想是要说明：随着指数 n 的增长，指数函数 2^n 的值增长得多么快。用这样一个有趣的故事来普及数学知识，当然很好。但这个故事讲了很多年了，老掉牙了，不新鲜了。而且是古代的外国的，离我们的生活太远。并且，我怀疑这并不是真人真事，可能只是古代外国的聪明人创作的一个虚拟故事，一个寓言，来说明指数增长的惊人速度。

等比级数的形象例子

类似的例子还不少，例如，为了说明立方倍积的尺规作图问题，就创作了上帝托梦让人们将正方体神坛体积扩大一倍来免除瘟疫的故事。为了说明斐波那契数列，就创作了养兔子的故事。

虚构有趣的故事来普及科学知识，可以说是一种好的教学方法。但也不能过分。如果书上的应用题和实例全部都是虚构的，没有一个真的，就给学生一个印象，科学的应用都是假的，没有真的。例如，鸡兔同笼问题，让学生通过鸡和兔子共有多少个头多少只脚来计算鸡兔各有多少只，学生就会想：既然已经看见笼子里的鸡和兔，直接数清楚鸡和兔有多少只就行了，何必数头数脚瞎折腾？在我的教学实践中，发现很多学生确实认为数学的应用都是假的没有真的，向农民买菜计算价钱只需要加减乘法，总不至于用到微积分吧？

有没有真实的、生动的、发生在我们身边、与我们的生活密切相关的中国故事可以取代国际象棋发明者的故事，同样能说明指数函数的快速增长呢？下面就是一个：房价飞速上涨，让中国的房地产商开心，老百姓们关心。中央政府采取严厉措施控制房价，各省相应地提出了具体的控制房价措施和目标。很多省制定的控制房价的奋斗目标是：房价涨幅控制在 10% 以内。这就提供了一个很好的数学习题：

习题：假定房价每年上涨 10%，多少年之后上涨到每平方米 1 千万元？

要得出明确的答案，需要知道现在的房价是多少。稍加调研就可以知道这个数据。例如，北京现在的房价大体上是每平方米 3 万元。不过北京的房价控制目标不是每年增长 10%，而是“稳中有降”，也就是控制在 0%，与这个习题的条件不吻合。在那些将房价控制目标定为 10% 的省市，将现在的房价按每平方米 1 万元计算，大体上符合实际。

有人会认为：从 1 万元开始每年上涨 10%，就是每年涨 1 千元。10 年涨 1 万元，经过 9990 年上涨 999 万元达到 1000 万元。9990 年太久，现在可以不必考虑。

只要懂得一点中学数学甚至只要学好了小学数学的人都知道以上的算法是错误的。从 1 万元开始每年上涨 10%，第一年确实是涨 1 千元。随着房价的持续上涨，10% 也就越来越多。当房价涨到 10 万元时，下一年再涨 10% 就是涨 1 万元而不是涨 1 千元。因此，每年上涨 10% 并非“涨幅稳定”，而是越涨越猛。如果真的每年只涨 1 千元，那就不是“涨幅稳定”而是“涨幅持续回落”了。

正确的计算方法很简单：每年涨 10% 就是变成前 1 年的 1+10%=1.1 倍。现在是 1 万元，n 年之后就是将 1 万元连乘 n 个 1.1，达到 1 万元 $\times 1.1^n$. 这是 n 的指数函数。利用计算器容易算出

$$1.1^{25}=10.8347,\ 1.1^{49}=106.7190,\ 1.1^{73}=1051.1532。$$

也就是说：25 年之后超过 10 万，49 年之后超过 100 万，73 年之后超过 1000 万。

25、49、73 这几个数不是凑出来的，而很容易利用中学数学知识算出来。算法如下：先算多少年可以涨到 10 万元，也就是求方程 $1.1^x=10$ 的解。两边以 10 为底取对数得 $x\lg 1.1=1$，那么 $x=1/(\lg 1.1)\approx 24.16$。因此，涨到 10 倍只需要 24.16 年，经过 24.16×2=48.32 年涨到 10 万元的 10 倍，就是 100 万元。经过 24.16×3=72.48 年涨到 1000 万元。

这个结果似乎太离谱了。房价真的会涨到每平方米 1000 万元吗？数学上算出来正确的结果当然是真

的：如果将房价上涨率控制到 10% 的目标确实能够实现并且维持下去，经过 25 年、49 年、73 年，房价真的要达到每平米十万、百万、千万。

反之，如果房价上涨率的控制指标不能实现，房价又会变成多少呢？由于 10% 的房价“控制指标”不是在中央政府鼓励房价上涨的情况下制定出来的，而是在严厉限制房价上涨的情况下制定出来的，是制定者很不情愿被迫让步到的最低线，实际执行结果很可能更高而不是更低，可能是 20%、30% 甚至 50%，房价达到千万实际上就不需要 73 年，只要 39 年或者 27 年甚至 17 年就能提前实现。

也有可能出现另一种情况：房价连续若干年保持了每年 10% 或更高的增长率达到了十万，中央政府采取更严厉的限制房价措施将增长率控制到 10% 之下，就有可能让房价不会涨到百万或者千万。比如，房价从 10 万开始每年只涨 1 万而不是每年涨 10%。按照电视台经常广播的科学术语，这叫做“涨幅持续回落”。很多老百姓听不懂这个术语：明明是持续稳定上涨，怎么是回落呢？其实，“持续稳定上涨”与“涨幅持续回落”两者并不矛盾。从某年的 10 万涨 1 万变成下一年的 11 万，涨幅是 1 万 /10 万 =10%。再从 11 万涨 1 万变成更下一年的 12 万，涨幅是 1 万 /11 万 =9.09%。从 10% 变成 9.09%，涨幅确实回落了。以后随着房价越来越高，每年涨的 1 万元所占比例越来越小。具体计算结果是：房价从 10 万依次涨到 11, 12, 13, 14, 15, …万，涨幅依次是 10%, 9.09%, 8.33%, 7.69%, 7.14%, …。这确实是“涨幅持续回落”。

等比级数的求和

中国人创造的这个真实例子，足以生动形象地说明指数增长之快速，比起那个子虚乌有的印度故事的教学效果肯定好得多。

让我们想一想：既然国际象棋发明者预先知道国王不可能拿出这么多的麦子来奖赏他，为什么要提出这个离奇的要求？恐怕也就是要炫耀自己的聪明。殊不知，炫耀自己的聪明也就是显示国王的愚蠢，很有可能国王会把他杀了。这个聪明人懂得指数增长之快速，在数学上确实聪明，但却有可能因显示自己的聪明而丢掉了性命，就象三国演义里的杨修在曹操面前卖弄自己的聪明丢了性命一样，政治智商其实很低，只能说是一个书呆子而不是聪明人。有一种说法是这个发明者是国王的宰相，我觉得这样的书呆子只能当发明家而不可能当宰相。相反，制定 10% 的“房价控制目标”的这些中国人比那个印度发明家聪明得多：他们制定了一个看起来很低的指标，不但没有丧命的风险，连挨骂的风险都没有。很多年来我们的中学用那个印度书呆子的故事来教等比数列，教出了一代又一代的中学毕业生，只会应付高考，却不明白“房价持续上涨”可以叫做“涨幅持续回落”，说明这样的中学数学教育其实是失败的。如果用制定 10% 涨幅的中国聪明人取代那个印度书呆子来作为等比数列数学教学的主角，教学效果一定会好得多。

出生 8 年才第一次过生日

很多动脑筋急转弯的书上都有这样一个问题：有人出生 4 年之后才第一次过生日。这是怎么回事？

这个问题的答案不难：他是在闰年的 2 月 29 日出生的。比如在 2008 年 2 月 29 日出生，以后连续三年 (2009，2010，2011) 都不是闰年，2 月都只有 28 天，没有 29 日，要等到 4 年之后的 2012 年 2 月 29 日才第一次过生日。

可是，如果我们说有人出生 8 年之后才第一次过生日。你相信吗？

如果你了解闰年的规则，就知道出生 8 年之后才过第一次生日也是可能的：他在 1896 年 2 月 29 日出生。不但出生之后的连续三年 (1897，1898，1899) 不是闰年，而且第四年 1900 年也不是闰年，都没有 2 月 29 日，再后面的三年 (1901，1902，1903) 也不是闰年，直到他出生之后的第 8 年 1904 年才是闰年，1904 年 2 月 29 日才第一次过生日。

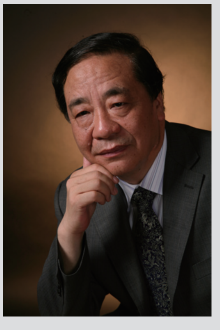
闰年的规则是：如果年份数是 4 的倍数而不是 100 的整数倍，那就是闰年；如果年份数是 400 的倍数，那也是闰年。在其余的情况下，或者年份数不是 4 的倍数，或者年份数是 100 的倍数但不是 400 的倍数，那就不是闰年。

为什么要有这样的规则？我们知道，一年就是地球绕太阳公转一圈的时间。一天是地球一昼夜的时间。平均起来，一年等于 365.2422 天。在制定历法时，只能让一年的天数是整数，最接近一年的当然就 365 天，所以只能规定一年 365 天。但这样一来，每年就少了 0.2422 天，由 1/0.2422 = 4.12882 知道：差不多每 4 年就少了一天。因此每 4 年就补充 1 天。历法规定：如果年份数是 4 的整数倍，就在这一年的 2 月份末尾补充 1 天，就是 2 月 29 日，这一年就称为闰年。

但是，每 4 年少的天数实际上是 0.2422×4=0.9688，每 4 年补充 1 天其实是多补了 1– 0.9688=0.0312 天。经过 1/0.0312=32.0513 个闰年之后，就多补了 1 天，应当将这 1 天扣除，也就是扣除一个闰年。每 4 年闰一次，经过 32 个闰年就是 4×32=128 年。这 128 年本来应当有 32 个闰年，应当扣除 1 个闰年，只保留 31 个闰年。

如果规定每 128 年扣除 1 个闰年，这样的规定不容易记忆，使用起来不方便。所以采用了另一个方法：以 400 年为单位来计算闰年的天数。400 年包含 3 个 128 年零 16 年。3 个 128 年应当去掉 3 个闰年。因此，现行的历法规定，在这 400 年中，年份数是 100 的倍数的 4 个闰年中，只保留其中是 400 的倍数那一年仍然作为闰年，将其余 3 个去掉，也就是将年份数是 100 的倍数但不是 400 的倍数的 3 个闰年去掉。

400 年除了包括 3 个 128 年之外还剩 16 年没有加以考虑。经过 128/16=8 个 400 年之后，积累起 128 年，从这 128 年的闰年之中应当再扣除 1 个。8 个 400 年也就是 3200 年。不过，人类迄今为止使用公历的历史还远不到 3200 年。而且，真的经过两三千年之后地球的转动速度也可能还会有微小的变化，一年是否仍等于 365.2422 天尚不清楚，所以现在去考虑那么遥远的未来的事情还为时过早，到时候自然会有办法。



作者简介：李尚志，北京航空航天大学数学与系统科学学院学术委员会主任、教授、博士生导师。第一届全国数学名师。

自然的奥秘：混沌与分形

谨以此文纪念混沌之祖庞加莱逝世一百周年

丁玖

“自然界的大书是以数学符号写的。” —— 伽利略

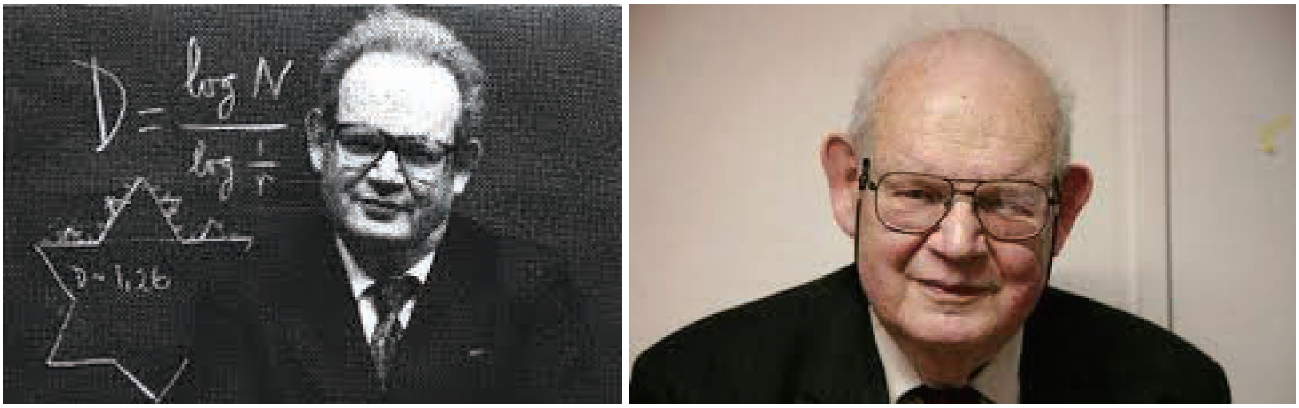
（九）“英国的海洋线有长？” ——

1970 年，曼德波罗（Benoit Mandelbrot, 1924-2010）的一篇文章大概会让自以为懂得几何、代数又好的读者觉得好笑。文章的题目是疑问式的：“英国的海洋线有多长？”

英国的海洋线有多长？富有个性的一位英国前辈、湍流研究的首创者理查德逊（Lewis F. Richardson, 1881-1953），曾对曲折的国境线好奇。他比较了比利时、荷兰、西班牙和葡萄牙的百科全书，发现这些国家对共同边界长度的记载相差 20%。曼德波罗


理查德逊（Lewis F. Richardson, 1881-1953）


英国海岸线



曼德波罗（Benoit Mandelbrot, 1924-2010）

在他的文章中得出结论：任何海岸线在某种意义上是无限长的。这真是与普通常识相悖。如果无限长，那为什么马拉松运动员能从海岸线一端跑到另一端？

我们知道怎样测量一条直线段的长。要测量一条海岸线的长，拿一只两脚规，把它张成某个单位的长度，比如一米。然后沿着海岸线一步一步地数数，最后的米数只是真实长度的一个近似，因为两脚规忽略了两脚之间的迂回曲折。如果把两脚规并拢一些，比如张成一尺长，再量一次，就会数到稍稍大一些的长度，这是因为原来每步一米量了一步的距离，现在每步一尺地量出来不止三步。再把两脚规的步长缩短到一寸，重新数步子，就会算出更大的长度。如果一只不厌其烦的小蚂蚁自告奋勇地担当两脚规的角色，翻过海岸线上的每一粒粗沙子，它会向我们报告一个还要大的长度。看上去，两脚规张得越窄，量得的长度就越大，但是常识告诉我们，它们会趋向于一个最终值，即海岸线的实际长度。

银行定期存款问题也有类似的说法。设想你有一笔财富 100000 元人民币存一年定期，年利息为 100%。如果到年底取回存款时才计算利息，你拿回家 200000 元，其中 100000 元是利息。如果聪明的你要求银行一个季度算一次利息，每季利滚利，到时你拿到的钱比 200000 元多一点点。如果银行更大方，答应一个月算一次利息，则你得到的更多。一天算一次利息，一年后连本带利还要多。如果银行“连续”地计算你的利息，连续地利滚利，不要以为你能获得无穷大的年终收益，但你一年之后能拿回最大可能的人民币数额 271828 元，即你的本金 100000 元乘上“自然对数”的底 e 这个常数。

如果海岸线是“足够规则”的，譬如是椭圆形的，那么上述“两脚规”测量的过程确实收敛到一个有限数。这就是从大学微积分里学到的怎样计算光滑曲线的长。但是，曼德波罗发现，当把“两脚规”的步距越调越小时，因为大海湾显露出越来越小的子海湾，犬牙交错、弯弯曲曲、参差不齐，所得的海岸线长度也就无限地上升。

曼德波罗是个“杂学家”，与常规意义下的科学家不同，他是一个兴趣广泛的数学家。当多年后荣誉等身的他演讲前主持人介绍他“……在哈佛教过经济学，在耶鲁教过工程学，在爱因斯坦医学院教过生理学……”的时候，他不无骄傲地对听众们说：

“当我听到过去从事过的一连串职业时，就经常怀疑自己是否存在。这些集合的交集肯定是空的。”

曼德波罗出生于波兰首都华沙一个立陶宛犹太人的家庭，十二岁时他随父母定居法国巴黎，原因之一是他的数学家叔叔佐列姆•曼德波罗（Szolem Mandelbrojt, 1899-1983）在那里教书。老曼德波罗和其他几个志同道合、才华横溢的年轻数学家，如后来坐上冯•诺依曼在普林斯顿的椅子的韦伊（Andre Weil, 1906-1998），三十年代在因第一次世界大战而数学家断代的祖国建立了“布尔巴基”(Nicolas Bourbaki) 这个影响了世界几十年的数学团体。它后来的积极参加者包括斯梅尔的“反越战盟友”、荣获 1950 年菲尔兹奖的施瓦茨（Laurent Schwartz, 1915-2002）。 这个组织杜撰的人名出现在他们集体写成的多卷本浩瀚巨著的作者签名处，其实曾是十九世纪具有希腊血统的一位面孔严肃的法国将军的真名。布尔巴基的成员对待数学也是“面孔严肃”的。他们和团体建立之初依然健在的英国理论数学巨匠哈代有着共鸣，但对已逝的本国同胞庞加莱比较反叛。他们从公理开始，以推理为准，要演绎出一切严格的定理。他们坚信，数学就是数学，不是物理，应当纯粹，无关应用。在他们眼里，几何直观永远是不可靠的，甚至是愚弄逻辑思维的罪魁祸首。

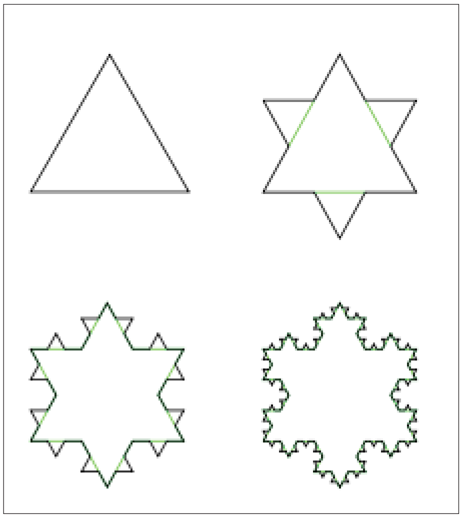
但是，老曼德波罗可能影响了一部分世界，却未能够影响他侄子的数学世界观。曼德波罗对布尔巴基的价

值观是不能容忍的。二战后，他考取了庞加莱的母校巴黎高工和更为有名的巴黎高师。他开始时慕名上高师，但几天后便逃离了这个布尔巴基分子集中的法国最高学府，转入高工。十年过后，由于他无法在弥漫着布尔巴基形式主义空气的法国感到快乐，便离开了祖国，离开了祖国的学术界，去了美国 IBM 的沃森（Thomas J. Watson, 1874-1956）研究中心。但当他宣誓加入美国籍时，依然保留他的祖国籍。他后来获得了 IBM 的"院士"（Fellow）荣誉称号，并任耶鲁大学的讲座教授。

曼德波罗具有与生俱来的强大"几何直觉力"，终生热爱几何图形，并喜欢用几何的语言来解释或描绘吸引他眼球的任何自然现象。这与他的同胞——"十八世纪最伟大最谦虚的数学家"拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813）截然相反，后者在他似乎最需要图形的杰作《分析力学》前言中颇为得意地特别强调："这本书找不到图"。移居到美国东部后，曼德波罗从属于经济学的关于棉花价格变化无序之间发现有序规律的"尺度无关性"，到属于工程科的为消除电话线噪音提出的描述信息传输误差分布的新策略，为自己日后创立新几何提供了具体的模型、铺下了前进的道路。

没有哪个同事理解曼德波罗研究实际复杂问题时改变尺度、化繁为简发现规律的新颖做法，但他正在做的"几何分析"思想的老祖宗却是那个下半辈子由于思想超前而被逼疯的康托尔。不连续性、随机噪声，错综复杂的海岸线，都被欧几里得的几何学拒绝于千里之外，都被牛顿的微积分扼杀在摇篮之中。直线与平面、三角形与圆、椭球与锥体，是多么美丽的几何图形，托勒密（Ptolemy, 约 100-178）用以构造宇宙学说、毕加索（Pablo Picaso, 1881-1973）用以画出传世之作。欧几里得的几何占据了我们的大

科克（Helge von Koch, 1870-1924）



科克曲线（前四次迭代）

脑已有两千年之久，阻碍了我们"非常规的思维"。康托尔革命性的"三分集"构造，是近代科学四百年历史上第一次对经典几何的反动。

曼德波罗传播他的新几何思想：云彩不是球面、山峰不是圆锥。不规则的自然世界具有像康托尔三分集那样的结构和特征。2010 年底的冬天对北京的居民来说是一个"无雪的冬天"。当入冬后过了一百多天，第一场雪姗姗来迟时，多少人欢欣雀跃。但是，他们是否仔细瞧瞧托在手掌心中的雪花？

1996 年的某天下午，在美国密西西比州 Hattiesburg 市橡树园小学读书的一位名叫丁易之的小女孩放学一回到家，就迫不及待地告诉她在大学数学系教书的爸爸：

"Dad，今天我们'提高班'的老师讲了 chaos！"

接着，她拿出一支笔和一张纸，先画了一个大的等边三角形。然后她把三角形的每一条边分成三等份，以中间的那部分为底边又画了一个形状一样但边长小三分之二的三角形。结果是一个有十二条边的六角形。在每一条边上，她做同样的事，以中间的三分之一段为底边画上更小的等边三角形。她一直画到越来越小的三角形看不清楚为止。

看到这些，丁易之的爸爸颇为惊奇。在美国，这么小的孩子就能知道一些当代科学的初等概念，而在中国，他们整天被关在教室里做习题。于是，他笑眯眯地喊着他女儿的小名说：

"丁丁，你可以告诉你的老师，你爸爸的导师和他的导师就是定义什么是 chaos 的两个人。等你长大点我可以告诉你关于 chaos 更多的故事。"

2005 年，丁易之为台湾的"庆祝李天岩六十生日国际研讨会"翻译了她爸爸写的"李天岩学术传记"，从中知道了更多关于混沌的历史。

设想我们能把丁易之画三角形的过程一步步做到无穷，就看到围在外面的由折线边构成的边界变得越来越细微，就像构造康托尔三分集的过程中变得越来越稀疏一样。它最后的形状就像北京人手中融化前的雪花。瑞典数学家科克（Helge von Koch, 1870-1924）早在 1904 年就描述了这个"雪花"的边界线，现在它就被称为"科克曲线"，又经常被形象地叫做"科克雪花"。

科克曲线和康托尔的三分集一样具有自相似性。如果我们割下科克

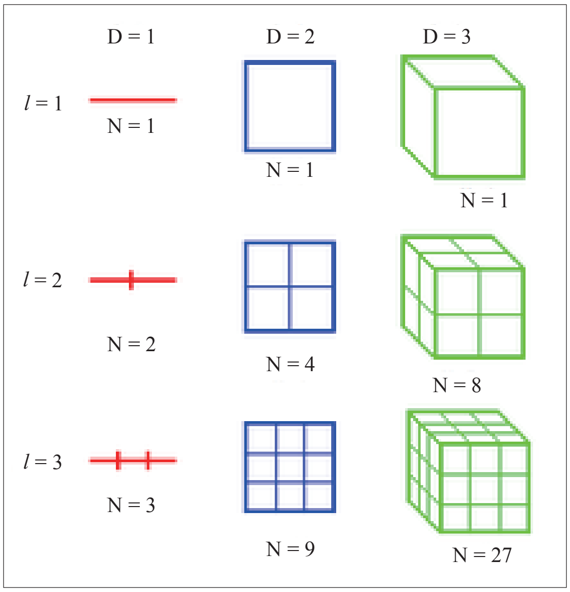
雪花的一边，再把它的三分之一部分放大三倍，就得到和原先割下的那片一模一样的图形。科克曲线自相似性的放大因子也是 3。

科克曲线围了一个有限的区域，事实上这个区域包含在原先的等边三角形的外接圆之内，因而它的面积是个有限数。外接圆的周长也是有限的，因为它是圆直径的 π 倍。但是科克曲线的长也是有限的吗？

我们来算算看。假设三角形的三个边长都为 1。那么它的周长等于 3。在每一步后，各个顶角的两边各长出一个边长缩短了三倍的三角形，因而这一步后的周长等于上一步后的周长乘上 4/3。这样，第一步后的周长为 3(4/3), 第二步后为 $3(4/3)^2$，第三步后为 $3(4/3)^3$。由此类推，第 n 步后的周长为 $3(4/3)^n$ 。这个数随 n 的变大也变得越来越大，没有上限。因此我们得到一个令人难以置信的结论：连续、永不自我相交、连通、并位于一个有限区域内的科克曲线的长度是无穷大，和两边无限延长的一条直线一样长！

科克曲线这个有穷区域的无穷长边界线在上世纪初让见到它的数学家睡不好觉，它太和直觉不容、它太和常规相悖，在当时的数学主流世界被视为一个怪物，因而成了一个被遗弃的无人领养的“私生子”，直到曼德波罗把它捡起，让它复活。他把科克曲线看成是“粗糙而生动的海岸线模型”，把它看成现实世界的图像，用以解释丰富多彩的自然现象。

虽然现在最时髦的理论物理学家在他们的“超弦理论”中断言我们周围的宇宙至少有十维，我们只感知生活在三维空间之中。也许是四维之中，如果时间另加一维的话。我们行走的地球表面却是二维的球面，我们的小



线段、正方形和立方体的维数

轿车开过的高速公路只是一维的线，花粉过敏者的鼻子最不想吸入的微小颗粒大概算是零维的点。但是维数的概念也和观察者的尺度有关。春天里老让人打喷嚏、令人困扰的花粉在我们的眼里是个零维的点，但在吸附在它身上的细菌看起来（如果细菌有眼睛的话）却是一个三维的庞然大物。

欧几里得两千多年前就精确地告诉我们什么是点、什么是线、什么是面，它们的维数分别是 0、1、2。二维面内的一维曲线不用周围，面积为零，只有长度，而三维空间中的二维曲面不占空间，体积为零，只有面积，这些“常识”已在我们的头脑中根深蒂固。直来直去、表里如一者往往被人说成“一维个性”，能说会道、左右逢迎者可被称为“二维巧匠”，翻手为云、覆手为雨者大概非“三维大师”莫属。

对西方文明影响最大的古希腊哲学家亚里士多德（Aristotle, 公元前 384- 前 322）也说得清清楚楚：“直线在一个方向上有大小，平面在两个方向上有大小，而立体在三个方向上有大小；除此以外，就没有其他大小了，因为这个已是全部了……不同种之间的大小是不能转化的，如从长度到面积，从面积到体积都不能转化。”

“整数维”已经在我们的头脑里挥之不去。如果有人说，这个东西是半维的或一点五维的，我们会认为他要么是个诗人，要么是个疯子。须知，美国上世纪最伟大的诗人大都在疯人院里写出他们最伟大的诗篇。

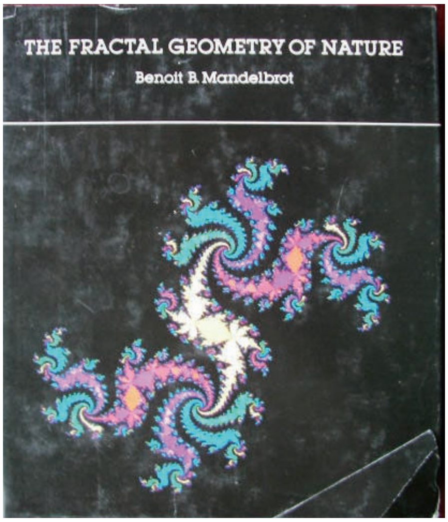
但是，当曼德波罗宣称科克曲线的维数是 1.2618 时，他不是疯子，他是 IBM 心智健康的科学家。他也不是诗人，但是他喜欢引用爱尔兰多面手作家斯威夫特（Jonathan Swift, 1667-1745）的语句：

于是博物学家看到小跳蚤，
又有小跳蚤在上面跳，
它们又挨小蚤咬，
这样下去没个了。

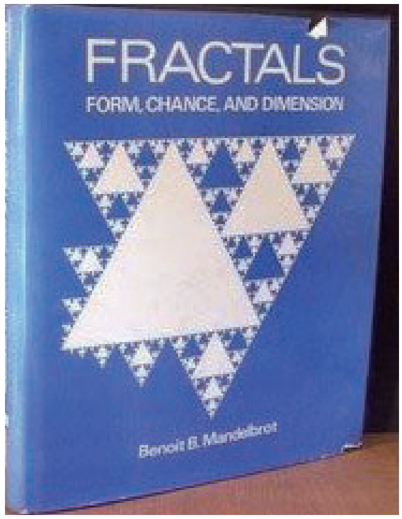
我们用比直觉多一点的“数学”方式来检验维数的概念。一条长度为 1 的线段可以被分为 n^1 个小段，每段长 $1/n$。一个边长为 1 的正方形可以被分为 n^2 个小片正方形，每片面积为 $1/n^2$。类似地，一个边长为 1 的立方体可以被分成 n^3 个小块立方体，每块体积为 $1/n^3$。这三个数 n^1、n^2、n^3 中的“指数”1，2，3 就分别是线段、正方形和立方体的维数。

在以上的“化整为零”的剖分之中值得注意的是：无论是小线段、小方形、小立方，放大 n 倍后就和原先的图形一模一样。它们也有和康托尔集合或科克曲线一样的自相似性，这个 n 也是所谓的“放大因子”。采用放大因子，加上“对数”这个工具，曼德波罗告诉我们：

线段维数为 1，因为小线段个数的对数除以放大因子的对数等于 1；正方形维数为 2，因为小方形个数的



曼德波罗著《自然的分形几何》



曼德波罗著《分形：形态、机遇和维数》

对数除以放大因子的对数等于 2；立方体维数为 3，因为小立方个数的对数除以放大因子的对数等于 3。

曼德波罗用同样的想法来计算科克曲线的维数。希望我们还记得在其构造的第一步，原先的三角形的每条边生成四个小边，其放大因子为三 . 这么一来，他就算出科克曲线的维数等于 4 的对数除以 3 的对数，约为 1.2618。

这个分数就被曼德波罗视为英国海岸线的“维数”，它比一大点，比二小点。因而，怪模怪样的海岸线比笔直的高速公路“宽些”，但比平整的飞机场“窄点”。类似地，可以算出康托尔三分集的维数等于 2 的对数除以 3 的对数，差不多是 0.6309。粗糙不平的乡间马路的维数可以是 2.25。

革命的时机成熟了。1975 年某天的一个下午，曼德波罗要为他刚完成的开天辟地的大书命名。一个新学科总要有一个名字，像刚出世的新生儿。他“老来得子”的儿子刚从学校放学回来，于是他借了儿子的拉丁语词典翻了翻，如同当上爷爷的中国老学究为求孙子一“佳名”而沉入康熙字典。拉丁文是英文的祖先。没有什么比最接近英文单词 fraction（分数）的什么东西更能反映这个学科的特色，于是，他把这个单词的最后三个字母“ion”巧妙地改成“al”，从而造了“fractal”（分形）这个数学名词，它既是名词又是形容词，既属于英语，又属于法语，代表了他生活过的两个国家。曼德波罗造字的历史功绩，大概只有中国唐朝的女皇帝武则天（624-705）才敢相比。

1977 年，曼德波罗的第一部著作《分形：形态、机遇和维数》（Fractals: Form, Chance and Dimension）出版了，它宣告了新几何“分形学”的诞生。1982 年，他对这本书增订修正，以《自然的分形几何》（The Fractal Geometry of Nature）新名问世。这引发了科学界甚至一般民众对“自然界的分形美观”狂热的注意，就像美术爱好者趋之若鹜地涌向毕加索的画展那样。

（十）自由王国的几何

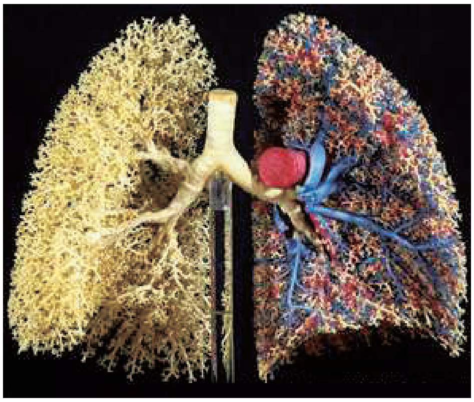
曼德波罗的著作让人们再次以欣赏的眼光审视大自然的杰作。在分形几何统一思想的旗帜下开始聚集不同学科的科学家，他们在各自的领域里看到了特异怪癖之处，经典的思维无法解释。

我们周围花花绿绿的世界并不总是规则有序的，一直在统治着我们中学教科书的欧几里得几何对此却束手无策。放眼看去，缥缈不定的彩云、雷霆万钧的闪电、纷纷霏霏的落雪；绵延不断的群山、蜿蜒曲折的海岸、崎岖不平的马路；跌拓多姿的人生、变幻莫测的心理、叱咤风云的官场，怎能用简单平滑的整数维数来描绘？

1978 年，美国哥伦比亚大学地球物理学家肖尔茨（Christopher H. Scholz, 1942-）一买到曼德波罗的书，就觉得它在自己的工作中大有用武之地。在他看来，既然地球表面和海洋相交的海岸线有分形结构，地面顶部的内表面所形成的“分裂层”也会具有相似性。这些断层控制着地层中流体的运动和地震的活动，深入了解它们十分重要。他最终成了在这个领域里头成功应用分形技术的少数几个名人之一。

造物主把我们身体的组织结构设计得几乎是天衣无缝，除了极少数的不甚重要之物，比如阑尾。血液走遍全身，动、静脉血管、毛细管到处密布，既形成连续的分布，又大玩分形结构的把戏，这样它们既有巨大的表面积，又能挤进小于人体 5% 的体积，活像科克曲线那样。难怪曼德波罗大开英国文豪莎士比亚（William

《威尼斯商人》中贪婪的夏洛克和聪明的鲍西娅



人肺的分形结构

分形面孔

Shakespeare, 1564-1616）的经典喜剧《威尼斯商人》的玩笑：那个贪婪而阴险的犹太放债人夏洛克不光做不到不流血地割下一磅人肉，就连割下一毫克都办不到！

我们的心肺循环系统呢？跟随曼德波罗前进的生理学家们很快发现，是分形描述，而不是早先的标准描述与支气管的分支的数据吻合。心脏跳动的频率图服从分形规律，传输电脉冲的纤维网络也是。充满肺泡的肺容纳巨大的表面积，成了人体中最典型的分形组织，它的维数是 2.17。泌尿系统是分形，肝脏里的胆管也是，好像我们内部身体完完全全按照分形的蓝图被全能的“上帝”制造出来的。甚至我们外部身体的头发也可被装饰成分形的式样，在美国纽约市的大街上走一圈有时能观赏到如此引人注目的头型。

曼德波罗把自然界像无穷树杈一样的分形结构的复杂之处反而解释成是“在欧几里得几何意义下存在的现象”。在分形几何的意义下，这些复杂性简单得好像是最自然不过的透明体。他指着阳光之下的树说，像我们自己身体里的心肺循环系统一样，树叶需要分形表面的枝叶优化自己的光合作用。“创世者”总是要按照“最优化”的原则来行事。笛卡尔的同代法国人、也许是有史以来最大“业余数学家”的费马（Pierre Fermat, 1601-1665）近四百年前就知道光是按“最短时间原理”走路的。

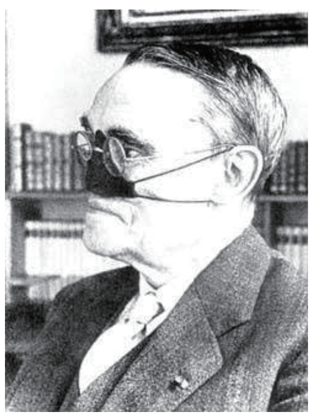
这就把人们的视线投向植物园里多姿多彩的树叶。天啊，仔细一看，表面起伏不平的它们真的具有诗意浓浓的分形体态。看来，在性态的发生过程中，分形尺度不仅是常见的，而且是普遍的。

2005 年的夏季，位于美国东南部的南密西西比大学科学与数学教育中心的研究生们在主任和任课教授的带领下驱车西行，像好莱坞电影中的“西部牛仔”那样踏上了西南部科学教育探险之旅。历时两周的探索和求知，硕果累累的他们回校之后举办了科学汇报会，其中来自中国的数学教育博士生叶宁军的“分形之旅”报告最受欢迎。她在仙人掌到处可见、乌拉姆呆过多年的新墨西哥州的广阔沙漠地带细心考察了这些大自然的分形杰作，并与“分形几何学”中那些著名的分形图形进行了有趣的比较和分析。

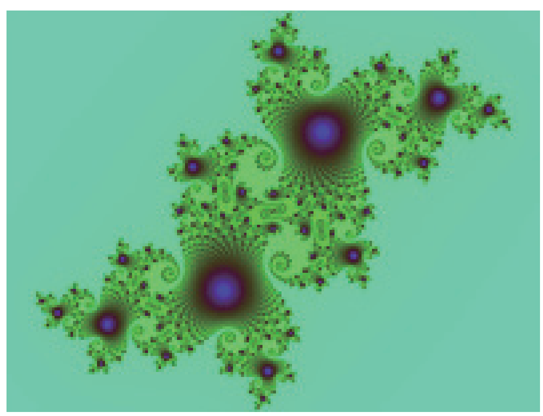
在曼德波罗的分形图形到处张贴之后，人们突然间发现“混沌”与“分形”在更多的数学场合出现，这两个新术语之间有着千丝万缕的相互联系。

中学生已经知道什么是像 $2+3i$ 这样的复数，这是几百年前为了求解二次方程 $x^2+1=0$ 不得不创造出来的“虚无缥缈”之数。这“由实（在）数到虚（幻）数”的一跳，解决了许多大问题，例如，在复数的范围里，每个代数方程都有根。复数的加减乘除运算法则与实数几乎一样简单，只要记住一个死规定：虚数单位 i 的平方等于 -1。

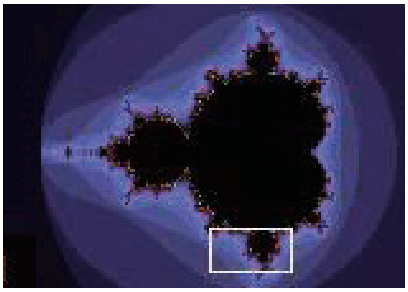
巴恩斯利（Michael F. Barnsley）这位牛津大学数学系 1968 年本科毕业的英国人、1972 年美国威斯康星大学的理论化学博士，在 1979 年的一个会议上见到费根鲍姆之后，就认为倍周期分叉和普适性的思想都是好东西。他思忖着，这些在实数范围内玩的游戏可能在复数世界里更好玩。这也许是个好想法，他说干就干。他把费根鲍姆在实数轴上玩过的二次函数搬到复数点的平面上，不过他把它的外形稍微改了一下：z^2+c，其中，z 是复自变量，c 是一个可取不同数值的复参



朱利亚（Gaston M. Julia, 1893-1978）



朱利亚集



曼德波罗集

数。当他用计算机不断迭代时，一些妙不可言的形状开始浮现，令他激动得赶快在他位于美国亚特兰大城的佐治亚理工学院的办公室写就了一篇论文，寄给了《数学物理通讯》的编辑。

这名编辑恰好就是茹厄勒。他告诉作者，五十年前他的两名法国老乡法图（Pierre J. L. Fatou, 1878-1929）和朱利亚（Gaston M. Julia, 1893-1978）就发明并研究了它，尽管靠的是没有计算机的艰苦劳动。巴恩斯利回忆当时：

“茹厄勒把它像一个烫手的山芋那样扔回给我，并说：‘巴恩斯利，你说的是朱利亚集。’”

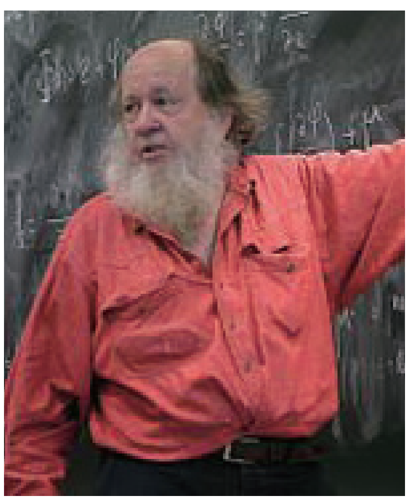
朱利亚集是二次多项式 $z^2 + c$ 的迭代点保持有界的所有那些初始点组成的集合的边界。不同的参数值 c 对应于不同的朱利亚集。它们呈现出各种各样的分形形状，“有的是变肥的浮云，另一些是瘦削的棘丛，还有的像火灭后在空中飘动的火星。”数学为自己的领土提供了无数的分形例子。

虽然拒绝了巴恩斯利的投稿，茹厄勒还是给了他一个好的建议：“你和曼德波罗联系一下吧。”

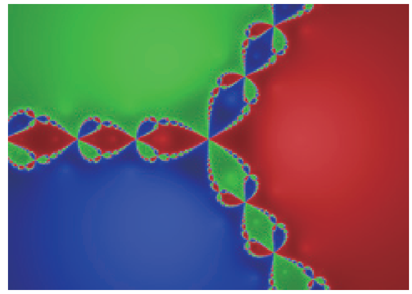
巴恩斯利很快发现，曼德波罗已经走得比朱利亚更远了。曼德波罗大概20来岁时看到过朱利亚和法图在第一次世界大战时期写的文章和当中画的图形。1979年，他想看看他这两位前辈数学家搞过的二次多项式 $z^2 + c$ 当参数变化后迭代有哪些变化。他每次都只从0这个原点开始迭代，威力强大的计算机大大帮助了他，使他能在屏幕上看到这些迭代点序列最终是否“远走高飞”，或总是在一个有限区域内徘徊。他把具有这两个互相排斥的迭代性质的参数值在视觉上区分开来。由他定义的这第二种参数之集合，即迭代点永远有界的所有那些参数值 c 的全体，现在当之无愧地以他的姓命名。

这个1980年定义的上下对称的“曼德波罗集”，它的轮廓看上去像海马的尾巴再附上形状一如整个集合的微粒岛屿群。它既是迄今为止最复杂、最有趣的分形之一，也是最难研究的几何对象之一，连它的创造者都感到头疼。比如，这个集合是否像科克雪花一样是“连通”的，即整个大陆是否与伸得远远的半岛相连？他不能断定，因为计算机不能代替严格的数学证明。相差十岁的法国巴黎高师数学教授多阿第（Adrien Douady, 1935-2006）和他过去的博士生、美国康奈尔大学数学教授哈伯德（John H. Hubbard, 1945-）用到复变函数论和动力系统的双重知识证明：是的，它是连通的。曼德波罗集的每一个漂浮的细微颗粒的确是挂在一根细细的线上，这细线又把它连接到集合的其他“魔鬼的聚合物”部分上。

在同一时期内的某个学期，哈伯



多阿第（Adrien Douady, 1935-2006）



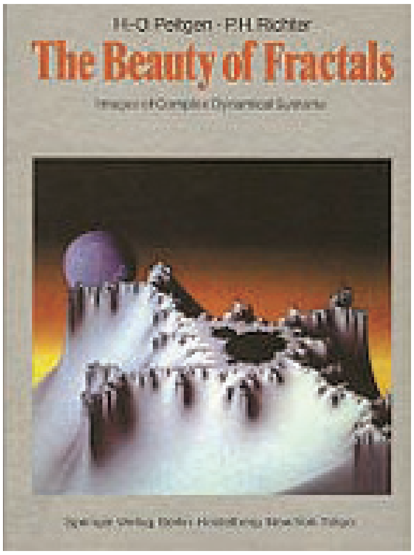
求解1的三个立方根的牛顿法的分形

德在法国教大一的微积分。他没有想到自己的一部分事业竟和计算数学中古老的牛顿法联系在一起。牛顿在他老年的时期用到了这个方法，现在这个办法的所有现代形式都冠以他的大名，尽管苏联的数学家和经济学家、1975年诺贝尔经济奖获得者康托诺维奇（Leonid Kantorovich, 1912-1986）对它的收敛性理论作出了系统而主要的贡献。

经典牛顿法求解一个未知数的实数方程的思想很简单。方程的解是函数的曲线和 x- 轴的交点坐标。取解点的一个近似点，在曲线上对应的那点作一条切线，它和 x- 轴的交点比第一个猜测更靠近解。重复这个过程就得到近似解的一个序列，可望能收敛到解。如果第一个猜测取得足够好，意思是和未知的解足够接近，那么这个迭代过程是收敛的，而且，收敛的速度很快。

但是如果初始猜测不好，迭代不收敛了，那怎么办？教了多次微积分课本里介绍的牛顿法，有点厌倦标准教法的哈伯德想换换花样。他把目光转向在复数平面上用牛顿法解最简单的三次方程 $z^3 - 1 = 0$，即算出1的三个立方根，分别是实数1和两个复数根 $(-1 + i\sqrt{3})/2$ 和 $(-1 - i\sqrt{3})/2$。这三个解在复平面上形成一个等边三角形。给出一个初始点，他让学生们看看牛顿法将引到三个解中的哪一个。

这实际上成了一个标准的具有三个“吸引子”的动力系统问题。哈伯德让计算机决定哪些点走到第一个



《分形之美》

解，哪些点趋向第二个解，哪些点导致第三个解。这些到达不同目的地的初始点分别用三个不同的颜色区别开来。在粗糙的选点下，牛顿法的动力学果然如他所猜把平面分成三个扇形，但随着选点的越来越精细，他和学生们发现这三个区域的分界线越来越不清楚，三种颜色互相缠绕，只要两种颜色靠近一些，第三种颜色便乘虚而入，挤进来夹在中间，这又引起一连串新的自相似的涌入，似乎没有哪个点可以分开任两种颜色。就这样，美国数学教授哈伯德和修他课的法国学生们“意外”地发现了已经使用了几百年的牛顿法所“制造”的分形图。

色彩迷人的分形的美学价值很快引起更多人的欣赏。那些斑驳陆离的牛顿法图形，那些波涛汹涌的海洋卷起的层层巨浪般的朱利亚分形图案，那些曲曲弯弯的平衡状态“吸引域”分形边界，增加了普通大众的艺术享受。成百上千来自四面八方的信件像“科克雪花”似地飘进哈伯德的办公室，索求曼德波罗集等等的图片。一时间，他忙得只好请系里的研究生帮上一手。巴恩斯利不光写了一本关于怎样用他发明的“迭代函数系统”的有效技术画出分形的好书，并且干脆办起了他本人商业性的“迭代公司”。他把自己的技术说成是“混沌游戏”，它可以随心所欲地“成批”生产各种各样形状的分形图，像卷心菜、霉菌、甚至泥土，包括他童年起就喜欢的蕨类植物叶子。

两个德国人也粉墨登场了。数学家帕特根（Heinz-Otto Peitgen, 1945-）和物理学家里希特（Peter Richter）合作了转向分形的事业。他们编著了一本精美的厚书《分形之美》，1986年由德国最好的学术出版社斯普林格出版，书中漂亮的彩色分形图也成了推销书的卖点之处。他们用计算机生成的分形艺术之作在全球巡回展览。既懂物理又通生化的里希特又订购了一只可以调剂身心的“混沌双摆”，放在自家的窗台上，随时观察它不可预测的互摆运动。

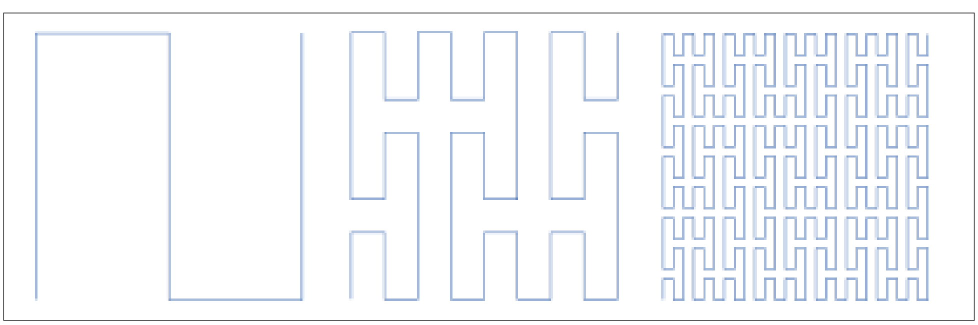
曼德波罗几何革命的狂风暴雨也催醒了在故纸堆里沉睡了已大约一

皮亚诺（Giuseppe Peano, 1858-1932）

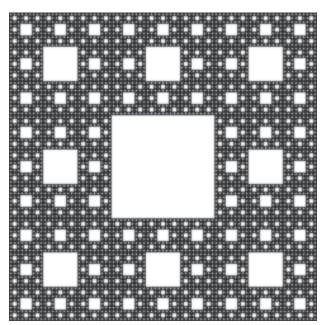
个甲子、和科克曲线差不多一样老的另外一些怪异图形，它们当中有所谓的“皮亚诺（Giuseppe Peano, 1858-1932）曲线”和“席尔宾斯基（Waclaw Sierpinski, 1882-1969）地毯”。意大利产的“一维”皮亚诺曲线居然能够跑遍一个二维正方形的所有点，令人纳闷。但是，这些都是一百年前当数学遭遇到“集合论危机”时少数几个像法国印象派画家那样“怪诞”的数学家生下的怪胎。

曼德波罗没有将分形的思想全部归己所有。在他《自然的分形几何》书中某一节的“历史梗概”中，他写道：

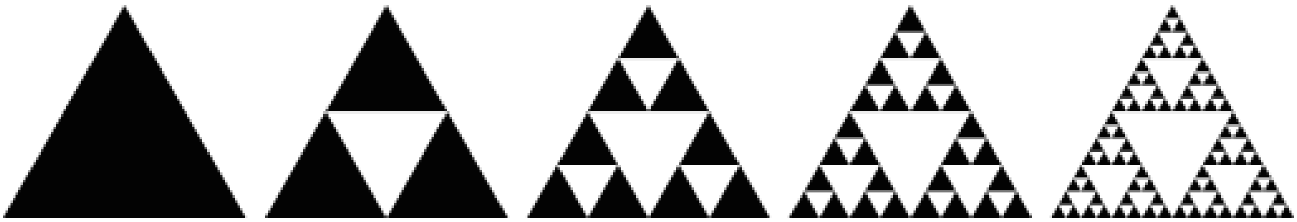
“分形的几个基本思想可以追溯到古希腊的亚里士多德和十七世纪的



皮亚诺曲线构造前三步



席尔宾斯基地毯



席尔宾斯基垫圈的构造前四步

莱布尼茨的时代，分形的思想可以说是源远流长。”

在百家争鸣的古希腊，毕达哥拉斯把万物归于整数，引来了无理数的责难；芝诺（Zeno, 约前490-前430）的四个“运动悖论”，让连续与离散相撞。亚里士多德对“世界的连续性”深信不疑，以至于让莱布尼茨发明微积分后还要想定义“分数阶的导数”以保证“阶数的连续性”。但是到了十九世纪的中叶，由于对数学分析语言严格化的要求，微积分的坚实基础由捷克的波尔查诺（Bernhard Bolzano, 1781-1848）、德国的魏尔斯特拉斯，以及法国的柯西（Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857）等几位“几乎处处严格”的数学家们铺垫，甚至连“函数”这个最原始、最重要的概念也有了现代化的定义，而不是原先的那种只是“连续曲线”的代名词。在这时候，各种各样“病态”的函数纷纷出笼。当过多年中学数学教师的魏尔斯特拉斯于1872年构造了一个处处连续但又处处没有导数的函数，这就打破了人们普遍认为的“曲线应有切线”这一传统观念。到了“离经

席尔宾斯基（Waclaw Sierpinski, 1882-1969）

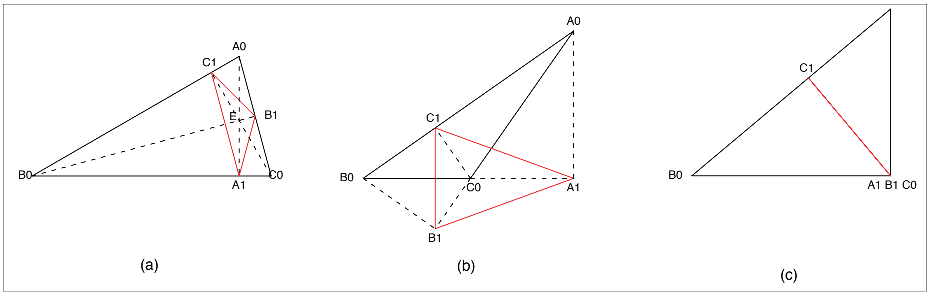
叛道”的康托尔时代，人们可以定义奇形怪状的点集，可以构造一笔“画”不出图像的函数。名字很长但寿命不长、只比魏尔斯特拉斯大了十岁的同胞数学家狄利克雷（Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859）就定义了这样的一个函数，它在所有有理数上的函数值都为1，而在所有无理数上的函数值都为0。

一百年前辉煌的波兰数学学派领头人、乌拉姆青年时期的另一个老师席尔宾斯基构造了如上的“席尔宾斯基垫圈”，现已成为“分形几何”这门学科中众多图形中的一个“代表之作”。

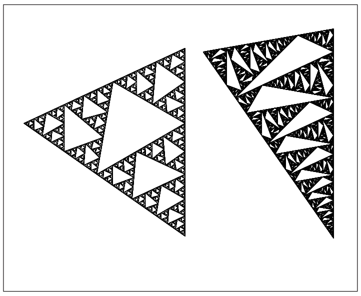
取一个等边三角形。去掉连接它的每条边中点所形成的那个小等边三角形，但保留其三条边。对剩下的三个同样大小的等边三角形重复做同样的事情，一直做到无穷。所有剩下的那些点组成一个处处稀疏的图形，像海绵一样处处有洞，但包含有不可数的点。像科克曲线一样，这个席尔宾斯基三角形也是自相似的，其放大因子为2。

席尔宾斯基的等边三角形分形在新世纪之初被美国南阿拉巴马大学的数学教授、具有微分几何背景的张新民推广成任意的锐角三角形分形，但他要用到欧几里得几何学里的“垂足”概念。

任意画上一个三角形，从它的每个顶点作其对边的垂线，和对边的交点称为垂足。三个垂足组成的新三角形叫做原先三角形的“垂足三角形”。如果原先的三角形是锐角三角形，那么它的垂足三角形在其之内。若原先的三角形是钝角三角形，则垂足三角

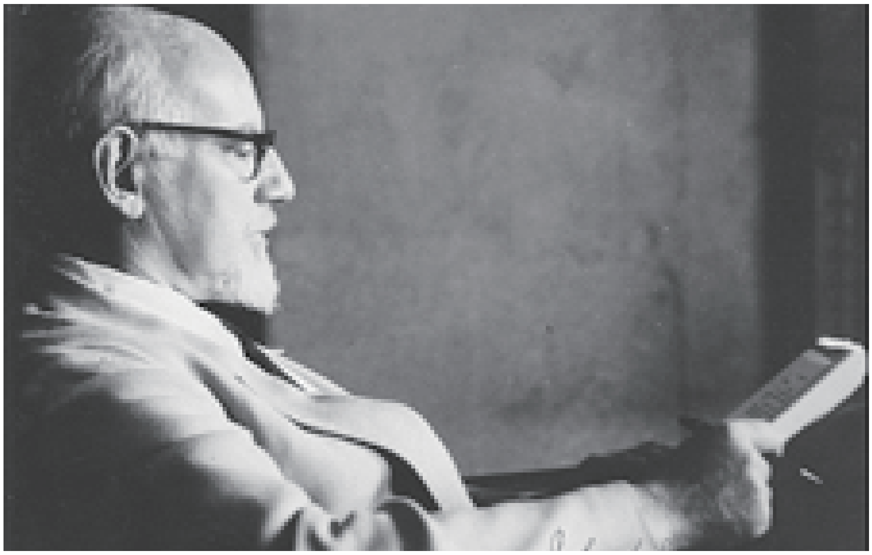


垂足三角形



席尔宾斯基垂足三角形

茅以升（1896-1989）



辛格（John L. Synge, 1897-1995）

形有一部分在它的外面。直角三角形的垂足三角形退化成连接斜边上的垂足和其对应顶点的一条线段。

垂足三角形迭代出现在庞加莱的同时代人、英国剑桥大学教授郝博生(Ernest W. Hobson, 1856-1933) 1891年写的《三角学教程》书中。从一个三角形出发依次作出一个又一个的垂足三角形，形成一个无穷序列，类似于依次迭代一个数值函数。这样的三角形形状的变化有意思吗？是有序的还是无序的？

电影《美丽心灵》的主角、五十年代的国际数学明星、被精神病折磨了三十年最终1994年因他十几页关于博弈论的博士论文开创性工作而荣获诺贝尔经济奖的美国俊杰纳什（John F. Nash Jr., 1928-），上世纪四十年代曾就读于卡内基工学院，当时的数学系主任是一位名叫辛格（John L. Synge, 1897-1995）的爱尔兰人。值得一提的是，该校颁发的第一个工学博士（1919）为中国人茅以升（1896-1989）。高寿的辛格数学生命也很高寿，他活到90岁时对垂足三角形迭代突发兴趣，居然和一位合作者于1989年在《美国数学月刊》上刊登了一篇论文。该文告诉读者：迭代垂足三角形可以有任意周期！

比如，初始三角形为等边三角形的垂足三角形也是等边三角形。这等于是说：等边三角形是“垂足三角形迭代”的一个不动点。如果初始三角形的三个角的角度为43°，44°，93°，迭代七次后的垂足三角形也有同样的形状，就是说，有一个周期为七的点。再来看看角度分别为50°，75°，55°的初始三角形，它迭代四次后成为一个周期为三的点。这就让我们一下子想起李 - 约克的“周期三意味着混沌”这句名言。

辛格的迭代引起了出生在匈牙利的美国纽约大学柯朗数学研究所的大牌人物之一拉克斯（Peter D. Lax, 1926-）的极大兴趣。他第二年马上也在《美国数学月刊》上发表了一篇论文，用初等的大学生能看懂的方式论证了垂足三角形迭代的混沌性和概率性质。

锐角三角形的垂足三角形有一个后来吸引了张新民注意的性质，学过中学几何的人都可以证明它：挖掉垂足三角形之后剩下的三个小三角形都和原先的那个三角形有一样的形状。这个“自相似性”让他想起了席尔宾斯基三角形，并一下子给这个“欧洲产儿”找到无穷多个“北美弟兄”：

任意画上一个锐角三角形，作出它的“垂足三角形”。将这个垂足三角形去掉，原先的三角形剩下的部分由三个小一点的三角形组成，对它们的每一个画出对应的垂足三角形，并去掉它们，这样就剩下九个彼此相似的三角形。继续做同样的事，直到无穷，所有留下的点的全体构成一个分形。张新民比较谦虚地把它称为第一个三角形所对应的“席尔宾斯基垂足三角形”，而没有附上他自己作为发明者的名字，尽管至少别人可以有理由这么做。不同的锐角三角形给出不同花样的“席尔宾斯基图案”，如果一个角很小，这个分形看上去颇像中国新疆维吾尔族姑娘的长辫子。

早先的席尔宾斯基三角形只是新的一大类席尔宾斯基垂足三角形中的一个成员：席尔宾斯基三角形就是等边三角形所对应的席尔宾斯基垂足三角形。这个“众星拱月”的“王子”的维数等于3的对数除以2的对数，大约为1.585。他的那些亲戚呢？王子的维数是否在所有的家族中最小？这些都是对“动力几何”这门学科感

兴趣的张新民迫切想知道的事。他在同事的帮助下用计算机做了一些试验，发现他的猜测好像是对的。比如说，如果三角形的三个角的角度为60°，45°，75°，维数大约是1.634；三个角若是65°，35°，80°，则大约为1.688维；如为75°，25°，80°，约1.875维。可惜，维数函数的解析表达式无法写出，故不能直接算出分形维数的值。

不久，大嗓门、会教书的张新民被在相距120公里以外的邻州的南密西西比大学数学系当教授的丁玖邀请去做一个数学讲座。他向后者提出了这个“维数猜想”。像师傅李天岩一样，在南京大学何旭初（1921-1990）教授门下拿到“最优化理论”硕士学位的丁玖只用了初等微积分的“隐函数求导术”以及“最优点充分条件”就很快地证明，“王子”的维数比他的“近亲”都小，但对“远亲”尚不得知。但这只解决了一个“局部极小”的问题。

2007年秋，丁玖在复旦大学数学系作的一个关于“从有序到混沌”的报告中提到了张新民的“整体极小”猜想。一位名叫李昭的研究生听了他的演讲后，思考了这个问题，并提出了一个巧妙地应用“凸函数”性质的解决思路。翌年之春他们完成了合写的论文，从投稿到被曼德波罗在耶鲁的同事和合作者任主编的《分形》（Fractals）期刊接受，只用了不到一个月的时间。

作为这一连串故事的结束，张新民关于席尔宾斯基垂足三角形“维数函数”的另一猜想却被李昭复旦数学系的学长、中国科学院计算数学与科学/工程计算研究所的唐贻发在和丁玖2010年发表在同一期刊的文章所否定，用到的数学工具还是初等微积分。然而他们似乎隐隐约约地感到对于这类分形的维数函数，还有一些谜团存在，这是否导致另一分形结构还不得而知。

（十一）尾声

混沌与分形一百年来的演化史，是一部“引无数英雄竞折腰”的数学史和科学史。从庞加莱到斯梅尔，从乌拉姆到李天岩，不光以他们的科学建树留名青史，更以他们多彩多姿的人生轨迹影响大众。

庞加莱强大的几何直觉和科学洞察力让他毫不犹豫地留给后人大量的定理、更多的思想。尽管有些还没有被严格地证明，但他几乎都是对的。作为伟大的数学家，作为现代纯粹数学几大学科的创立者，他生前却是被提名最多次的诺贝尔物理奖候选人，提名者包括科学史上和牛顿地位一样高的爱因斯坦（Albert Einstein, 1879-1955）。他对牛顿、拉普拉斯等“机械决定论”自然观的无情批判，他在《机遇》一书中所集中阐述的“偶然性”与“必然性”之含义和联系，为混沌学和分形几何学的发展铺下了哲学基础。戴森会毫不犹豫地把他划为一只“科学的大鸟”。

冯•诺依曼和乌拉姆这两位科学和人生的亲密战友，惺惺相惜、彼此欣赏、相互理解。他们分别是匈牙利民族和波兰民族对美利坚合众国巨大智力贡献的代表。只要读一读麦克雷（Norman Macrae, 1923-）撰写的冯•诺依曼传记，只要看一眼当事人之一戈德斯坦（Herman Heine Goldstine, 1913-2004）所回顾的美国现代电子计算机发展史，就可以想象，如果寿短的冯•诺依曼多活十年，只要他在洛伦茨的办公室里看到天气预报奇怪的计算结果，彼此交谈一个小时，混沌学的发展立刻会有一个“大跃进”。

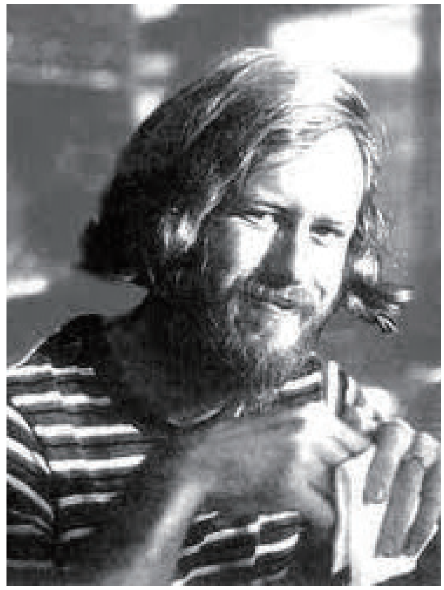
乌拉姆终生都对“Pattern”（模式）着迷，这大概源自家中他幼儿时代天天见到的地毯图案。作为非线性分析的主要“始作俑者”，从洛斯阿拉莫斯的岁月开始直到离开人世，他都在思索“模式”这个“主题词”。读一遍他收录在后人为他编纂的文集《科学、计算机及故友》内的一文，“图形变化的模式”（Patterns of Growth of Figures），就可对他的非线性迭代思想“略见一斑”。他留在《数学问题集》中的方法和思路，成就了几代数学家的事业，包括李天岩三十岁前另两大数学贡献之一的一维函数“乌拉姆猜想”之解决（第二个则是属于计算数学领域的“现代同伦延拓算法”），以及中科院计算数学所的周爱辉与合作者丁玖于1996年解决的关于多维函数的乌拉姆猜想。他的“乌拉姆方法”是三十五年前由于李天岩的工作而开始的“计算遍历理论”这一学科的开山鼻祖。

洛伦茨这位一直保持绅士风度、彬彬有礼的和蔼老人2008年4月去世，距离他的91岁生日仅差一个多月。他留给世人的“洛伦茨吸引子”成为了混沌学领域中最有名的奇异吸引子。没有哪个图形比这条无限缠绕不止的活像猫头鹰面部的双螺旋线更包含混沌的全部内涵、更富有想象力、更具有深远意义。在谈论混沌的成千上万篇技术论文的丛林中，很难找到一篇比被人夸奖为“那是一篇妙文”的“确定性的非周期流”被引用得更多。

从洛伦茨的照片就不难推断这是一位从里到外一贯如此的谦谦君子，一生中都保持着低调作风、充满涵养的儒雅学者。按照名记者格莱克锐眼的观察，生前的他“面孔像饱经风霜的美国老农，然而眼睛又是出奇地有神，使他看起来好像总是在笑。他很少谈论自己或自己的工作，只是在倾听别人讲话。”这寥寥几笔，让我们似乎看到中国画家罗中立（1948-）三十年前感动国民的那幅著名油画《父亲》主人公满脸分形般密布的皱纹，又好像面对既有看尽“人性弱点”的讽刺小说《围城》、又有笑傲“文史群雄”的煌煌巨著《管锥编》的“文化昆仑”钱钟书脸上那着实迷人的孩

罗中立油画《父亲》

钱钟书（1910-1998）



鲍恩（Rufus Bowen, 1947-1978）

子般的灿烂笑容。

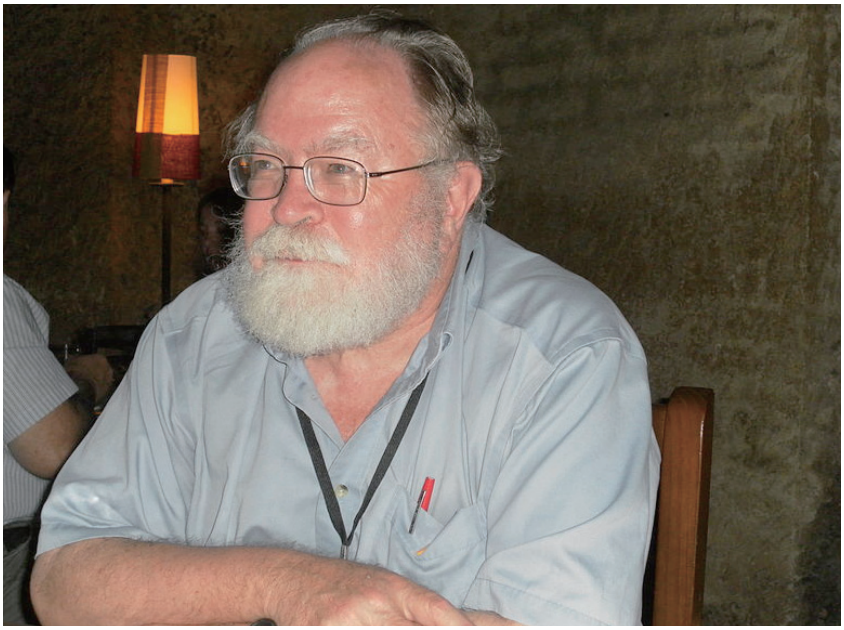
斯梅尔七十年代进入了经济学领域，他关于"一般均衡理论"的数学"帮助"了本校的一位经济学教授德布勒（Gerard Debreu, 1921-2004）1983年荣获了诺贝尔奖。八十年代他开始研究算法，提出了大范围牛顿法。后来他领导一批人探索计算的基础理论。他不光自己是个杰出的数学家，也培养了一批卓越的学生，如他手下最早的博士科佩尔（Nancy J. Kopell, 1942-）和舒布（Michael Shub, 1943-）以及31岁病逝的天才鲍恩（Rufus Bowen, 1947-1978）。

斯梅尔对任何感兴趣的事都有一往无前的精神。六十年代中期他开始了世界各地珍贵矿石的收藏，并逐渐成为一位世界级收藏家。他不畏劳苦地寻找矿石之宝，就像他寻找数学的瑰宝一样入神，使得他在数学和矿石世界同样达到高峰。由于他学得一手高超的摄影技术，无法进入他家收藏室一睹为快者可在万维网上欣赏他的部分优美矿石。他的冒险不止于数学、政治和矿石。年轻时的他曾和同伴另辟新路攀登过一座近一万四千英尺高的俊峰。五十七岁时他担任一艘四十三英尺长的双桅帆船船长，率领两位同事冒险远航三千海里之外的太平洋马克萨斯群岛之一的希瓦瓦岛。

2002年北京国际数学家大会召开前的几个月，让包括中国大陆在内的部分数学家担心斯梅尔是否"老来弥坚"地重演一幕三十六年前的莫斯科"记者招待会"。毕竟，西方人，数学家包括在内，常常断言并试图"证明"中国"缺乏人权"。可是，又是一次"杞人忧天"。今天的斯梅尔，六十四岁从他连续任教三十年的加州大学伯克利校区退休后应丘成桐邀请接受了香港城市大学"杰出大学教授"的聘书，看到了中国的巨大进步，目睹了香港的回归祖国。他已加入在中国的大地上培养人才的教授行列。2010年4月，第二次应聘香港同一所大学的斯梅尔在本校的陈关荣陪同下访问了中国科学院数学与系统科学研究院、清华大学和北京大学，并做了三场学术演讲，报告他最新的研究结果，掀起北京的数学家和学生们的一阵激动。现在，年逾八十的他还在香港继续不知疲倦地工作着，还经常和年轻人一起去爬山。

斯梅尔的矿石收藏之一

享有盛名的梅好像是头衔最多的"混沌学家"。除了当过十五年普林斯顿大学动物学"1877级班"讲座教授外，他连续十一年担任同一大学的"研究董事会"主席。他1979年被选为崇高的英国皇家学会会士。1988年离开美国后他一直任教英国，被聘



约克（James A. Yorke, 1941-）

史铁生 (1951-2010)

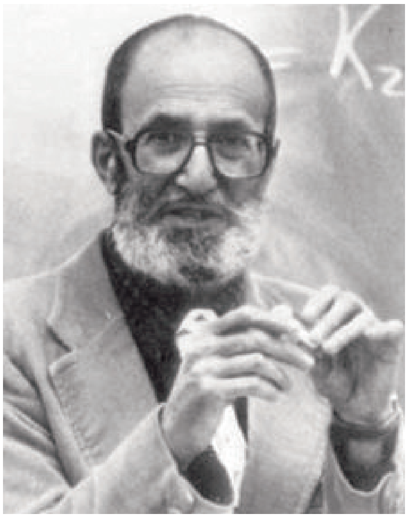
为牛津大学和伦敦帝国学院的双校教授。1995年至2000年他身为英国政府首席科学顾问，然后又干了五年的皇家学会会长。我们不必再列举他几乎“不可数”个其他的职位、奖项、名誉称号了，只加一项：最后，他被女王封爵。

戴着“杰出大学教授”桂冠的约克和他的“左膀右臂”合作者已让美国马里兰大学成为混沌研究的圣地之一，2003年他和曼德波罗共享属于“自然界复杂行为”范畴的“东京奖”。约克的名字好像已成混沌学的代名词，而他几十年如一日的“马克思式”的大胡子也成了他本人的不变“模式”。上世纪末的某个短暂的时间段，他的胡子飞了，露出了面部的庐山真面目，让他的粉丝几乎不认识他了，于是在一片“抗议”声中，他恢复了本来面目。

拥有密西根州立大学“大学杰出教授”头衔的李天岩曾经让他八十年代中期在中国大陆招收的五、六个都是国内名牌大学数学系七七级本科生的博士研究生害怕，因他经常在他们每学期“讨论班”的第一天“训话”：“我不希望你们今后在‘麦当劳’端盘子”（意指要好好做学问）。但是久而久之，大家发现他脸“冷”心“热”。他对学生有一句名言：如果你们碰到任何困难，只要想想我的身体，就没有困难了。的确，1974年拿到博士后六个星期，他的血压竟高达220/160毫柱，原因是肾脏开始坏了。洗肾持续五年半，每周要三次，每次要花五个小时，结果无济于事。1981年他手足情深的同胞妹妹给他的一个肾脏移植，让他活到今天。可以说，全身动过十多次大手术的李天岩是美国的“史铁生”，而双腿瘫痪、洗肾几十年、作品震撼人心的小说散文家史铁生（1951-2010）是中国的“李天岩”。他们俩都是“天岩铁生”的，是生活的挑战者、事业的攀登者、不屈不饶精神的实践者。

费根鲍姆后来发展的用于地图制作的分形方法以及实用软件，让新地图集里海岸和群山更有真实感、更具吸引力，尽管他曾遭受那个“分形之父”的“恶意中伤”。他的“普适性”也让他成为普天下名校争相聘用的科学明星。1986年他接受了美国洛克菲勒大学的“丰田”讲座教授位置，并固定在那里再也不动，因出名前的他动得太频繁了，四年之中在几乎覆盖美国大地的一个直角三角形从一个顶点疲倦不堪地跳到另一个。当年每天“二十五”个小时艰苦的智力劳作让非他莫属的名誉和奖项纷至沓来，包括1983年的麦克阿瑟（John D. MacArthur, 1897-1978）天才奖和1986年的沃尔夫物理奖，让他满盘收获“辛勤汗水浇灌的幸福之树”结下的甜蜜果实。

曼德波罗大概是最受争议的新型科学家之一，在他出名前是如此，出名后也是如此，尽管他几十年来光环满身，包括1985年美国科学院五年一颁的巴纳德奖。有人对他常和古人“争功夺利”不满，有人说他从未证明定理，更有人说他不是数学家。四十年代当过冯•诺依曼的助手、写过几本数学名著的著名匈牙利裔犹太人美国数学家哈尔莫斯（Paul R. Halmos, 1916-2007），甚至直言不讳



哈尔莫斯（Paul R. Halmos, 1916-2007）

地认为：虽然分形很漂亮，但它不是数学。曼德波罗的后半生大概过得不甚爽快，因为他要抵挡来自四面八方的“明枪暗箭”。刚刚作古的他，其一生功过，还未最后“盖棺论定”，自有后人评说。

看来，还是李天岩和约克的那个经过严格证明的定理“经得起时间的考验”，因而得到有资格的鉴定家戴森的宠爱。无论如何，混沌与分形，好像是科学领域里的一把利剑的双刃，寒光闪闪、所向披靡。它们改变了我们对自然世界的看法，提供了观察物体形态的新方式。混沌是在时间方向上的分形，分形是在空间形式中的混沌。它们把我们从绝对、静止的决定论思维桎梏中彻底解放出来，让我们以整体的眼光观测细微之处，从确定性系统中找到内在随机性，在不规则的“无序”之中理出“有序”规律，“于无声处听惊雷”。它们促使我们再次深深地回味几乎一百年前爱因斯坦在苦苦思索和质疑新生的量子力学时所表达的那句已经载入科学史册的深深疑问：“上帝是在掷骰子吗？”

混沌和分形不光已成为数学领域两大相辅相成的研究分支，更以遍地开花的应用在几乎所有科学技术界的地盘中大显身手。遥望大地，全世界各国对这两门学问的理论研究和应用探索，方兴未艾。作为最新的例子，无线通讯、药物设计这两个与我们的日常生活最有关系的行业已把“混沌”当作一位富有的老太爷来服侍。但是放眼未来，我们不愿预测“混沌学与分形几何学”的走向，因为按照“混沌”的观点，未来是不可预测的！

致谢：作者感谢美国密西根州立大学数学系李天岩教授和香港城市大学电子工程系陈关荣教授在写作过程中提供的帮助。

参考文献

1.“关于‘Li-Yorke 混沌’的故事”，李天岩，《数学传播》十二卷三期，13-16，1988。

2.《混沌——开创新科学》，詹姆斯·格莱克著，张淑誉译，上海译文出版社，1990。

3. A First Course in Chaotic Dynamical Systems, Robert L. Devaney, Addison-Wesley, 1992。

4.《分形的哲学漫步》，林夏水等著，首都师范大学出版社，1999。

5.《勇闯人生的数学大师斯提芬·斯梅尔》，Steve Batterson 著，邝重平译，世界科技出版公司，2002。

6.《数学大师——从芝诺到庞加莱》，E. T. 贝尔著，徐源译，上海科技教育出版社，2004。

7.《天才的拓荒者——冯•诺依曼传》，诺曼•麦克雷著，范秀华、朱朝晖译，上海科技教育出版社，2008。

8. “Birds and Frogs”，Freeman Dyson, Notices of the American Mathematical Society, Vol. 56, No. 2, 212-223, 2009。

2011 年 3 月 8 日初稿

2011 年 5 月 20 日修改完毕

作者简介：丁玖，南京大学数学系七七级计算数学本科生、八一级硕士研究生。1990 年获美国密西根州立大学应用数学博士学位，导师李天岩教授。现为美国南密西西比大学数学系教授。

最美的数学就如文学

——普及经典《数学是什么》的故事与推介

欧阳顺湘

最新英文版

书名：What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods（Second Edition）；
作者：Richard Courant（理查德·柯朗），Herbert Robbins（赫伯特·罗宾斯）；
增订者：Ian Stewart（伊恩·斯图尔特）；
出版社：Oxford University Press，New York（牛津大学出版社，纽约）；
出版年：1996；
其它：592 页，平装；
英文影印版：人民邮电出版社，2009。

部分中文译本

1. 汪浩 / 朱煜民（译）：《数学是什么》，湖南教育出版社，1985，547 页；
2. 左平 / 张饴慈（译）：《数学是什么》，科学出版社，1985，671 页；增订版：《什么是数学：对思想和方法的基本研究》（西方数学文化理念译丛），复旦大学出版社，2005，584 页。

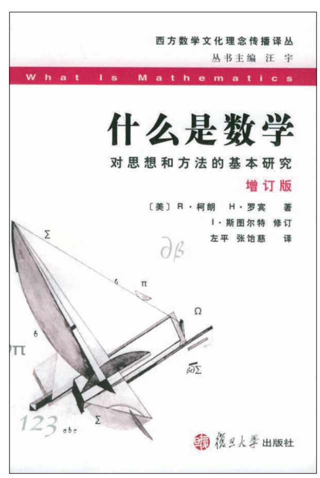


图 1 左平、张饴慈译本（增订版）

1 写在前面

"两千年以来，谙熟一定的数学知识是每一个文明人应有的基本智力。"

这是70余年前著名数学家柯朗为他与当时只是年轻的拓扑学博士、后来成为著名统计学家的罗宾斯合著的数学普及经典名著 *What is Mathematics*?（以下统一以《数学是什么》作为译名）第一版所写序言的第一句话。在我年少第一次读到这句话时，心中有些震动：数学有如此魅力？难道每一个受过教育的人都该如每个中国人应被唐诗浸淫过一样被数学熏陶过？

我所感知的或与我后文将提及的阅读体验有关——那时我主要接触的大多是非科学类书籍。自然也多少与我们的传统有关。我国传统重视的是经史子集之类的人文学科。"数"只是六艺之末，算学学官为从九品。《颜氏家训》说"（算术）可以兼明，不可以专业"。而西方文明素以古希腊文明为源，后者对数学教育异常重视。今日中国，数学因为应用而变得必不可少且日益重要，但要使数学教育深入人心，作为人文教育的一部分，尚需时日。而柯朗接着所写的——"但今天，数学教育的这种传统地位已经岌岌可危。不幸的是，数学工作者对此要负一定的责任"——或在今日仍有意义。

对青年朋友来说，怎样获得有效的数学素养？对教育工作者来说，怎样进行有效的数学教育？让我们来了解这一经典，读读这一名著，认识数学是什么，借鉴下柯朗开出的药方吧。

2 经典常青

1941年，《数学是什么》甫一出版，当即好评如潮，成为畅销书。《纽约时报》写道："无论是专家抑或其他任何对科学思考感兴趣的人都应该拥有这本书。"很多名人如著名数学家外尔（Hermann Weyl, 1885-1955）、莫尔斯（Marston Morse, 1892-1977）等都对之给予很高的评价。甚至爱因斯坦也称此书为"对整个数学领域中基本概念及方法的清晰、透彻的阐述"。

70余年足以将真正的经典沉淀。至今该书英文版即已数次再版——1943、1945、1947分别为第二、三、四版，1996年又由著名数学科普作家斯图尔特增订（该增订版称为第二版应是相对于1978年首次平装版而言）；英文版也多次重印——至1967年该书英文版就已经重印了13次。译本也很多，有中、德、俄、西、越、日等语种的译本；而中译本就有五种。

在大陆，常见的中文译本是前列左平/张饴慈、汪浩/朱煜民的两个译本。实际上，早在1951年，该书的第一个中文译本《近代数学概观》就已出版。这个译本由上海中华书局分四册出版，译者分别为：齐植宋（第一册）、余介石/杨锡宽（第二册）、杨宗磐（第三册）、张春木/孙炳章（第四册）。汪/朱和左/张译本的译者序中都提及这样一个"文言"译本，虽然简单地连具体书名亦未指出。

台湾也有两个译本——一是由吴英格等人翻译，徐氏文教基金会于1977年出版的《数学是什么》[1]；二为容士毅翻译，左岸文化出版社于2010、2011年先后出版的《数学是什么（上、下）》。

一本数学著作，不但被译为多国文字，还存在这么多的中译本，是一个传奇。对于能有机会翻译此书，译者该是深感快意的。杨宗磐在其所作"译者跋"中即说："能将这继承Klein, Hilbert之严格不忘直观的伟大学风的名著之一部，移于我国，是译者最感荣幸的。"

新版《数学是什么》的英文影印版和中文增订版（左/张译本）在国内的网络书店的销售排名中都名列前茅，这也足以说明该书的生命力。在亚马逊网站上，该书被评为四星半。读者还可以在中外不少相关网络上见到许多读者对此书的推介。

罗塔[2]曾希望有人教他的十大教训之一是：数学家更有可能因其诠释性的文字被世人记住，而非其原创性研究。他还举例说，"希尔伯特空间"这一概念，是斯通（Marshall Stone, 1903-1989）和冯•诺依曼根据希尔伯特的一本阐述积分方程的书而引入的，而海林格（Ernst Hellinger, 1883-1950）等做出过重要贡献的一些数学家则被遗忘了。显然，柯朗与罗宾斯这一本书是罗塔所提教训的另一个令人信服的实例。

3 大家柯朗

笔者最早接触此书时并不知道这是一本名著，对柯朗、罗宾斯也没有什么了解。我们先简要介绍下该书的作者，以帮助读者更好地了解这本书。

理查德•柯朗（Richard Courant, 1888-1972，也见译为库朗、库兰特）出生于德国，是20世纪杰出的数学家，在数学物理、变分法等方面有很深刻的研究。柯朗很小时即随父母来到布雷斯劳（Breslau，即现波兰城市弗罗茨瓦夫［Wrocław］）生活。或许值得一提的是后文将提及的托普利茨就出生在布雷斯劳，仅比柯朗年长7岁。他们曾一起学习。后来托普利茨去哥廷根学习，也鼓动了柯朗前往。

柯朗在哥廷根曾任希尔伯特的学生兼助手，他和克莱因、希尔伯特关系深厚，是哥廷根传统的重要继承人。1910年他获得博士学位时年仅23岁。1933年，因纳粹逼迫而离任哥廷根大

---

[1] 在线超星数字图书馆可阅读 http://book.chaoxing.com/ebook/read_10515719.html。

[2] 吉安-卡洛•罗塔（Gian-Carlo Rota, 1932-1999），杰出的组合数学家。其说法见 Gian-Carlo Rota 著，Fabrizio Palombi 编辑的 *Indiscrete Thoughts* (Modern Birkhauser Classics)，Birkhauser Boston, 1996。亦见 Blank 的书评：Brian E. Blank, *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods, book review*, Notices of the American Mathematical Society 48, 11 (December 2001), pp. 1325-1329。

图 2 柯朗（Richard Courant, 1888-1972) 与柯朗数学科学研究所

学数学所所长职位的柯朗逃离德国，先到剑桥大学后于 1934 年以访问教授的身份来到纽约大学。1935 年，他受邀在纽约大学建立数学系。二战前数不清的数学家被迫逃离德国，其中很多在柯朗的帮助下在美国获得职位。

《数学是什么》的撰写被柯朗当作对美国提供职位的回报，实也源于柯朗对数学传播的兴趣。在纽约，他曾积极向公众演讲普及数学知识、演示肥皂膜实验，提高人们对数学的兴趣。他的学生则帮着他整理讲稿。

除了《数学是什么》，柯朗还有不少脍炙人口的经典，如《数学物理方法》[3]、《微分与积分计算》[4] 以及《微积分和数学分析引论》[5]。这些书籍都有中译。

但相比数学创造，柯朗杰出的领导才能更为人称道。在纽约大学，柯朗白手起家，率领他的研究群体，从无到有最终建立了著名的应用数学研究所——19 世纪 60 年代该所更名为柯朗数学科学研究所，至今仍是最好的应用数学研究中心之一。该所的建立在一定程度上象征了希尔伯特在哥廷根创建的科学殿堂在纽约的重建，哥廷根学派的传统在美国的延续，以及世界数学中心从德国到美国的转移。

柯朗也培养了不少人才。据数学家谱系网 [6] 的不完全统计（中国学生未记录），柯朗至少培养了博士生 35 人，并有“后代”学生 4 千多人。值得我们回忆的是柯朗在哥廷根的两位中国学生——魏时珍和朱公谨 [7]，他们同为 1935 年在上海交通大学成立的中国数学会的发起人和第一届理事会成员。在本文附录中我将简介这两位中国学生，既是为了使读者了解柯朗以及哥廷根的数学影响，同时也是有感于这两位的文化魅力。此外，朱公谨翻译的柯朗的微积分教材，不但水平很高，而且可以看出其中一些内容在《数学是什么》中有所反映，是值得介绍的。

关于柯朗更多的介绍，有兴趣的读者可以阅读美国女作家康斯坦丝 • 瑞德（Constance Reid）所作的柯朗传 [8]。

4 罗宾斯记

赫伯特 • 罗宾斯（Herbert Robbins, 1915-2001）出生于美国。他最早在数学界出名即是源于他和柯朗合作的这本《数学是什么》。他在中学时对数学并不特别感兴趣，独钟于文学，常在放学后去公共图书馆读书，“读完了那里的每一本书” [9]。1931 年罗宾斯入读哈佛大学，后跟随著名拓扑学家惠特尼（Hassler Whitney, 1907-1989）进行拓扑学研究并于 1938 年获得博士学位。此后莫尔斯邀请他去普林斯顿大学做他的助理，为期一年。但罗宾斯亟需一个永久职位以给母亲和妹妹经济资助。不久恰好柯朗到普林斯顿寻求合适的助手。莫尔斯推荐了罗宾斯。于是 1939 年罗宾斯到了纽约大学。

罗宾斯后来以统计学家的身份而闻名。他最后任新泽西州拉特杰斯（Rutgers）大学的数理统计教授。著名统计学家奈曼（Jerzy Neyman）在他的两篇论述上世纪下半叶统计学进展的综述中所列突破主要都是由罗宾

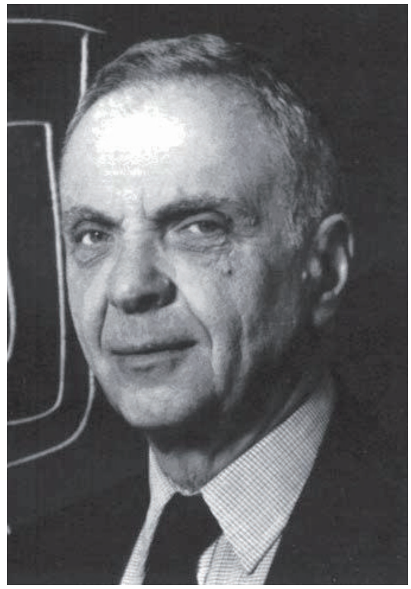


图 3 罗宾斯（Herbert Robbins, 1915-2001）

斯获得。学过概率论课程的朋友或许知道所谓的随机变量序列的完全收敛（complete convergence）[10]，此即是罗

[3] *Methods of Mathematical Physics*， 与希尔伯特合作，德文原著 *Methoden der mathematischen Physik*。

[4] *Differential and Integral Calculus*， 德文原著 Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung。

[5] *Introduction to Calculus and Analysis*，与约翰（Fritz John）合著。

[6] 参比勒费尔德大学的镜像：http://genealogy.math.uni-bielefeld.de/genealogy。

[7] 后来还有受这两位影响而赴哥廷根随柯朗做博士论文的蒋硕民，后因柯朗的离开而随他人继续学习。

[8] Constance Reid，*Courant, Springer*，1996。中译可参考胡复等翻译，东方出版中心于 1999 出版的《库朗：一位数学家的双城记》。

[9] Donald Albers and Gerald Alexanderson (eds.)，*Mathematical People: Profiles and Interviews*（《数学人物》），Birkhäuser，1985。

[10] 概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量序列 $(X_n)_{n\geq1}$ 完全收敛到随机变量 X 指对任意的 $\varepsilon>0$，$\sum_{n\geq1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\left|X_n-X\right|\geq\varepsilon\right)<\infty$。该收敛蕴含 $(X_n)_{n\geq1}$ 几乎处处收敛。但若 $(X_n)_{n\geq1}$ 独立，则反之亦对。

宾斯和我国杰出的统计学家许宝騄在他们合作的一篇短文中提出来的。

罗宾斯曾说他没能在拓扑学领域立足与花费太多时间撰写《数学是什么》有关——直到 1941 年他才得以将自己的论文付梓。他转向统计学，却也和柯朗的一次有意或无意的栽培有关。罗宾斯在纽约大学任教期间，柯朗邀请他早年在哥廷根的学生、著名的概率论学家威廉•费勒（William Feller, 1907-1970）来讲授概率论与统计学，但在课程都安排好并公布了之后，费勒却不能来讲课。于是柯朗要此前对概率论和统计学一无所知的罗宾斯来讲授这门课程。

罗宾斯开始真正的统计学研究是受战争的启发。1942 年，罗宾斯加入了海军预备役。期间他听到两位高级海军军官讨论炸弹落点的效率问题。后来他写了“随机集合的测度”的论文。罗宾斯的经历足够传奇，当他领到退役补贴，置买土地，准备解甲归田时，接到电话邀请去教测度论、建立新的数理统计系。那时，概率统计作为学科并不被看好。罗宾斯曾被告诫：概率论与统计学家最要紧的任务是证明概率论与统计学是数学的一部分。这也说明罗宾斯筚路蓝缕、开拓新领域的功劳。

与罗宾斯有关的另一件趣事是美国数学会自 1938 年正式开始组织的普特南（Putnam）年度数学竞赛。该赛事源于几年前西点军校和哈佛大学之间一武一文的比赛。1931 年，西点和哈佛举行足球比赛，上半场哈佛队落后，中场休息期间，当时的哈佛校长劳伦斯（A. Lawrence）不服气，对西点的首长说：“你们的小伙子虽然或能赢得足球比赛，但我敢打赌我们一定能在数学比赛中击败你们。”西点同意了。1933 年，在劳伦斯的亲戚普特南（William Lowell Putnam）的支持下，两方举行了数学比赛，每方 10 名队员。结果哈佛落败了。参加这次数学竞赛的哈佛队员中就有罗宾斯，而教练即是在罗宾斯博士毕业后提供职位的莫尔斯。

5 斯图尔特

斯图尔特（Ian Stewart）现为华威大学（Warwick University）的数学教授。他在将数学向公众推广方面很知名，撰写了许多普及读物，其中不少已被翻译为中文，如《上帝掷骰子吗——混沌之数学》[11]、《二维国内外数字漫游奇历记》[12]、《第二重奥秘：生命王国的新数学》[13]、《自然之数》[14] 等书。他还是《科学美国人》杂志的专栏作者。1995 年他还因科普成就而获迈克尔•法拉第奖（Michael Faraday Medal）。

6 严肃读本

数学普及读物大致有三类：

- 一是涉及数学历史、哲学、方法论等方面的著作，如哈代的《一个数学家的辩白》、阿达马的《数学领域的发明心理学》[15]，以及许多数学家传略；
- 二是趣味数学类书籍，这类书通过通俗易懂且使人感兴趣的问题与方法来传播一些数学思想和知识。著名的有如马丁•加德纳（Martin Gardner）所编写的很多书。我们今天也能见到有的数学家在积极通俗地传播数学，希望读者用同看电视、阅读卡通书籍那样只看不想的轻松方式对数学有一定的认识；
- 三是较“严肃”的数学读物。这类书比一般读者觉得枯燥的数学教材更多阐述性的叙述，更多引导，可读性更强，但又可从中学到一些“真的数学”。阅读这类书，对读者的要求也较高；读起来虽然不总是很轻松，但所获却是翻阅许多娱乐数学类读物所不及的——这也恰是经典的共性。

《数学是什么》即是第三类较严肃的数学普及读物。剑桥大学数学系有一个给新生推荐参考书的小册子，《数学是什么》也在第三类书中；斯图尔特最早也是因此小册子而得悉该书。

柯朗在其书的第一版序言（参汪 / 朱译本）中解释《数学是什么》是作为普及性读物而撰写的，假定的读者为受过教育的外行，仅需良好的高中文化水平。然而读者应当具备成熟的智力且愿意独立思考，因为柯朗的目的是使他们真正接触到数学的实质内容，柯朗认为为此不可能“不劳而获”，“若仅持娱乐消遣的态度而不下工夫吃苦研究，亦将一无所得”。

柯朗还批评虽然传记、历史著作以及有趣的通俗读物能够普遍地引起读者对数学的潜在兴趣，但学问不能单凭间接的方法获得。他还比喻：“如果一个人从未集中思想倾听过音乐乐章，而单靠最出色的报刊杂志来获得音乐教育，那就无异于缘木求鱼。”无独有偶，日本概率论大家伊藤清甚至更进一步比喻，说数学之美不同于音乐和建筑之美（如莫扎特的音乐和科隆大教堂），后者可以使门外汉通过感官直接获取，然而数学之美只有通过对数学公式的理解来取得。

按照后面介绍的罗宾斯的比喻，阅读《数学是什么》的读者不应知难而退，可以将自己比作在参加 17、18

---

[11] *Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos*, 潘涛译，上海远东出版社，1995。

[12] *Flatterland*, 暴永宁、胡晓梅译，湖南科学技术出版社，2008。

[13] *Life's Other Secret: The New Mathematics of the Living World*, 周仲良等译，上海科学技术出版社，2002。

[14] *Nature's Numbers*, 潘涛译，上海科学技术出版社，1996。

[15] Jacques Solomon Hadamard（1865-1963），*An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*, New York: Dover Publications, 1954。

世纪法国文化沙龙[16]，渴求知识和智力训练的文明人。柯朗的这本书以及他著的数学教材（如后文将介绍的微积分教程）的一个特点就是，柯朗在智力上将读者与自己同等看待，不回避难点，叙述方式宛如只是一位长辈只因先生而早知般地向读者介绍数学。

重视对数学的真正理解、独立思考的能力的提高也恰是柯朗批评数学教学投机取巧找终南捷径的判据。柯朗在《数学是什么》的序言中写道：“数学的教学，逐渐流于习题的空洞演练，虽然这或可有助于发展形式演算的能力，但却无益于对数学的真正理解，不利于提高独立思考的能力。”

7《论数与形》

因为我们的目的主要是介绍书，我们且枝蔓开来，介绍另外一本“第三类”数学普及经典《论数与形》，恰好它也可用来烘托《数学是什么》。

在数学类书籍出版方面很有影响的德国斯普林格出版社（Springer）[17]在对《数学是什么》推荐语中说它是与拉德梅彻 - 托普利茨和胡维兹（Hurwitz）的名著组成的三部曲中的第三乐章[18]。拉德梅彻与托普利茨的经典著作是指德国著名数学家汉斯 • 拉德梅彻（Hans Rademacher, 1892-1969）与奥托 • 托普利茨（Otto Toeplitz, 1881-1940）的《论数与形》[19]。这也是一本既适合高中生阅读，对专业数学家也有益的普及图书。实际上笔者第一次知道该书，是因某综述文章对此书有关等周问题初等阐述的引用。该书共 22 节（第 20 节分 a, b 两文），用初等的语言，分节介绍具体的经典数学问题，如组合问题、华林问题等。其介绍清晰，且着重问题的逻辑，例如，介绍几何平均和算数平均之间的关系时，还花了较多笔墨用例子介绍这两个平均的概念和优劣。

两位著名数学家曾谈及他们少年时阅读此书的经历。

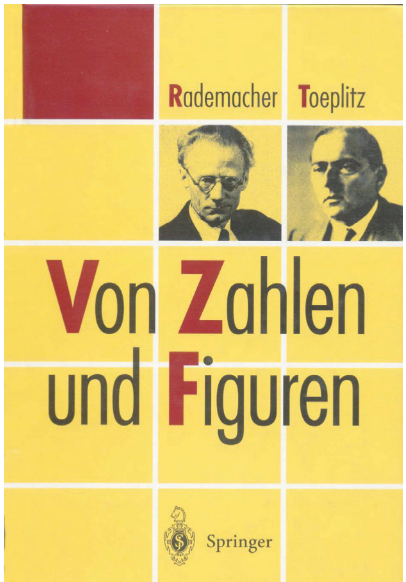


图 4《论数与形》一书的封面（德文版）

阿贝尔奖获得者拉克斯（Peter Lax, 1926-）在台湾数学杂志《数学传播》对他的专访中说[20]：“12 岁时，我开始对数学感兴趣。……我们所读的第一本书是拉德梅彻 - 托普利茨的书。……书内的章节都很短，只有 5、6 页，对刚开始学习数学的学生是很合适的。即使今日，我仍会推荐这一本书给对数学有兴趣的年轻人。”

沃尔夫奖、邵逸夫奖获得者阿诺德（Vladimir Arnold, 1937-2010）在接受俄罗斯著名的数学、物理方面的科普杂志“Kvant”的采访（1990 年发表）时，说他的第一本启蒙数学书也是拉德梅彻 - 托普利茨的书。他还回忆起他一天只读几页地咀嚼该书[21]。

《论数与形》和《数学是什么》两书都是由名家撰写，风格也接近，在严肃地讲数学问题，而且很多经典问题两本书都有讨论，例如极小极大、等周问题、四色定理、毕达哥拉斯定理和费马大定理、多面体和欧拉公式等。事实上，《数学是什么》书末所列一般参考书目中即有《论数与形》一书。只是《数学是什么》较系统，而且有微积分等较高等的内容。

可见有的数学家是因为阅读《论数与形》而与数学结缘。可以想象，也有不少数学家因为《数学是什么》而喜欢数学。

1997 年阿诺德在巴黎演讲《论数学教育》[22]，在批评法国的数学教育时也同时提到这两本书：

“我对此异常震惊：所有那些写得最好而且最重要的阐述数学方法的书在这里却几无学生知晓（在

[16] 沙龙是法语 salon 的音译。原意为客厅。在十七、十八世纪成为上层社会举行集会，讨论文艺、政治、科学的代名词。法国梅森（Mersenne，1588-1648）神甫曾在巴黎每周举办一次数学沙龙，其客人有费马、笛卡尔和帕斯卡父子。1647 年年轻的帕斯卡就是在这里认识笛卡尔的。

[17] 斯普林格出版社进入数学物理出版领域恰是源于柯朗的建议；特别是斯普林格的“黄宝书”系列（Grundlehren）也主要因为柯朗的贡献。

[18] 原文为：“Dritte Staffel der‘Golden Oldies’zusammen mit den beiden modernen Klassikern von Rademacher/Toeplitz und Hurwitz”。笔者不清楚 Hurwitz 的哪本书较适合初学者。

[19] 1930 年第一版，德文书名为 *Von Zahlen und Figuren: Proben mathematischen Denkens für Liebhaber der Mathematik*，意为《论数与形：写给数学爱好者的数学思想举例》，其英文译本名为 *The Enjoyment of Mathematics:Selections from Mathematics for the Amateur*，中文译本有左平根据英文转译的《数学欣赏》，北京出版社，1981。

[20]《数学传播》，2002 年第 26 卷第 4 期，总第 104 期，参 http://w3.math.sinica.edu.tw/media。

[21] 参下书的前言：*Mathematical Omnibus: Thirty Lectures on Classic Mathematics*，Dmitry Fuchs 和 Serge Tabachnikov 著，美国数学会出版，2007。该书基于作者在“Kvant”上发表的系列文章，类似于《论数与形》，介绍各种数学问题，似无中译。

[22] *On teaching mathematics*, 1997 年 3 月 7 日在巴黎 Palais de Découverte 的演讲的扩充版，以俄文发表于 Uspekhi Mat. Nauk 53 (1998), no. 1 (319), 229–234; 英译发表于 Russian Math. Surveys 53 (1998), no. 1, 229–236。可免费下载。HTML 版本可参 http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html。中译将刊登于《数学文化》。

图 5 波恩大学数学所门后走廊一侧的纪念牌，其上德文意为：纪念 Otto Toeplitz，1.8.1881-15.2.1940，数学家，教师与同事，从 1928 到 1935，因他是犹太人，被纳粹贬低、侮辱与驱逐。另一面有类似纪念牌纪念同是犹太人而被迫自杀的豪斯多夫。（请注意德语日期写法日：日 . 月 . 年，图片为作者摄于 2011 年 9 月。）

我看来，甚至可能没被译为法文）。这些书有拉德梅彻 - 托普利茨写的《论数与形》，……，柯朗和罗宾斯写的《数学是什么》……[a]。”

[a] 阿诺德提及的其它书有：希尔伯特和康福森（Stephan Cohn-Vossen，1902-1936）写的《直观几何》；波利亚（George Polya，1887-1985）写的《如何解题》和《数学合情推理》；克莱因（ Felix Klein，1849-1925）写的《19 世纪数学发展史》。

8《高观点下》

另一本值得比较的书是克莱因（Felix Klein，1849-1925）所著的《高观点下的初等数学》[23]（下简称《高观点下》）。克莱因是哥廷根学派的创始人、国际数学教育的奠基者。该书源于克莱因为德国中学数学教师和高年级大学生开设讲座的讲义。他希望中学教师能从高等数学的视角来理解中学数学的教学。

柯朗对克莱因的《高观点下》是推崇的。正是由于柯朗的努力，才使得该书能从早期“石印”版变为斯普林格的正式出版物。然而，两书也有很明显的差别。柯朗 1938 年开始写作《数学是什么》时，立意要使自己的书能有更广的读者。他在给马克思 • 波恩的信中介绍[8]自己的书：“这本书是给数学教师的。它并不是科普读物，而是从初等数学的角度来谈高等数学的。这本书与克莱因的书差别很大，我想写它是十分必要的。”

两书的读者对象不同，阅读《高观点下》需要有较高的程度——克莱因所谓的初等数学并不低等。为此两书叙述的方式也不同。克莱因是高屋建瓴，以俯视的姿态看待初等数学的问题；而柯朗的书是循序渐进，从初等问题出发，介绍高等数学中的数学思想和方法。这一点从英文书名的副标题也可以看出（笔者以为左 / 张将副标题翻译为“对思想和方法的基本研究”是不甚恰当的）。所以这也决定了柯朗的书更加适合初学者。

令人尊敬的是，《高观点下》的第三卷中译是吴大任与其夫人在 80 多岁的高龄根据德文原著翻译而成的。吴大任曾在回答红卫兵时说他将来准备翻译数学书，说这个要求不低，“这是一项有意义的，必要的，也是为人民服务的一种方式”。我们后面还将论及这种中国前辈数学家对外国数学名著进行译介的努力。

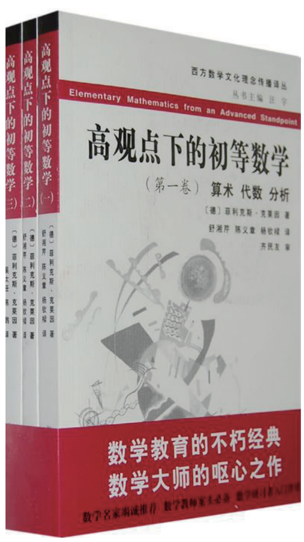


图 6《高观点下的初等数学》

9 禁书风波

1947 年，《数学是什么》的俄文译本在前苏联出版。当时，第二次世界大战的硝烟刚刚散去，铁幕徐拉。该书可理解地被查，于是柯尔莫哥洛夫写了一个未署名的介绍[24]，指出这本书是对俄语文献的有益补充。当然他也批评了《数学是什么》对俄罗斯数学家所作贡献的忽视：切比雪夫[25]对数论的贡献，罗巴切夫斯基对几何学的贡献等都未在书中介绍。熟悉历史的读者都会对该文章最后的宣言有所理解：“资产阶级科学家不可能对数学的未来有贡献，这是我们苏联数学家的任务。”

按概率论学家 Shiryaev 的说法[26]，

[23] 舒湘芹 / 陈义章等译，复旦大学出版社，2008。

[24] 参俄文译本《数学是什么》第三版中放在书末的介绍。

[25] Pafnuty Chebyshev，1821-1894，在数论方面有著名的伯特兰 - 切比雪夫定理：对于所有大于 1 的整数 n，在 n 与 $2n$ 之间必存在一个素数。

[26] 见 A. N. Shiryaev 为 *From the Heritage of A. N. Kolmogorov: The Theory of Probability*, Theory Probab. Appl. 48, pp. 191-220” 一文（主要内容为《数学的内容》一书第 11 章——柯尔莫哥洛夫所撰的概率论专题的英译——以及柯尔莫哥洛夫与亚历山大洛夫等的相关通信）写的前言。

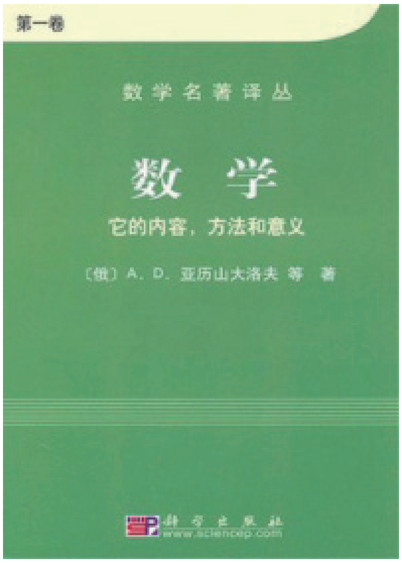


图 7《数学——它的内容,方法和意义》(第一卷)的中文译本封面

《数学是什么》激起了苏联数学家来创作类似的普及图书。其结果就是前苏联于 1956 年由著名数学家亚历山大洛夫（A. D. Aleksandrov）、柯尔莫哥洛夫（A. N. Kolmogorov）和 M. A. Lavrent'ev 等主编出版的《数学——它的内容，方法和意义》一书（以下简称为《数学的内容》）。与《数学是什么》主要由两人撰写不同，该书共 3 卷 20 章，分别由各学科的专家撰写。其中不但有亚历山大洛夫、柯尔莫哥洛夫分别撰写的他们擅长的曲线和曲面、概率论等主题，还有如盖尔芳特（I. M. Gel'fand）、索伯列夫（S. L. Sobolev）与拉迪任斯卡娅（O. A. Ladyzenskaja）等大家撰写的泛函分析、偏微分方程的介绍。此外，该书在出版前还曾预印 350 份征求过前苏联数学界的意见。这套书影响较广，中文译本由多人合作翻译于 1958 年出版。

按柯尔莫哥洛夫的原计划，要有两套书，第一套书是“反柯朗（Anti-Courant）”[27] 的，要以生动的方式介绍高等数学的要义，其目的是使得苏联公众更好地了解数学各学科的内容、方法、发展历史和现状，特别对将以数学为职业的学生有指导作用。另一套书给程度更深的读者，甚至包括职业数学家，以帮助数学家们了解、预测数学未来发展的趋势。这套《数学的内容》即是第一目的的产物。

如同《数学是什么》有柯朗的文章“数学是什么”,《数学的内容》的第一章是亚历山大洛夫撰写的长达 70 页的“数学概观”。《数学的内容》比《数学是什么》有更广博、更现代的内容，如概率论、方程等主题。但《数学是什么》并不因没有这些内容而陈旧。其原因恰如斯图尔特在其所作的序言中所说：

> “这本书写得好，是因为尽管数学一直在发展，但书中选取的、有关历史上的著名发现的专题，都是很难抛弃的。……《数学是什么》这本书没有过时，是因为所选取的材料展示出了无限完美的数学品位。”

另外，《数学的内容》不适合初学者作数学训练之用，而更适合有一定数学水平的读者来了解数学的全貌。冬、夏定期来访我导师的一位国立莫斯科大学的教授（和我共用办公室）就曾对笔者说过他曾通过《数学是什么》来训练自己，而《数学的内容》更像是一本“哲学”书。

10 合作纠纷

柯朗与罗宾斯的合作对书的完成是有益的，但最终成书后的结果却使得这段合作蒙上了阴影。

关于两人的合作，按罗宾斯的叙述[9]是：1939 年到 1942 年他的年薪是固定的，只有 2500 美元；而且那时没有研究基金资助。到纽约任教后不久，柯朗对他说：“我得到一小笔资助来将一些过去的教学资料整理成面向公众的数学书。你是否愿意帮我？我可以给你 700 到 800 美元的报酬。”额外收入和传播数学思想给初学者的想法使得罗宾斯开始了与柯朗的合作。在邀

图 8　柯朗（右）与罗宾斯

请罗宾斯参与写作前，柯朗有不少助手，包括他的儿子，帮他整理该书讲稿；而柯朗则用洛克菲勒教育基金会的资助作为他们的报酬。但罗宾斯和柯朗的合作最为紧密，罗宾斯也常去柯朗家交流。有段时间罗宾斯甚至搬到了柯朗在新罗彻里（New Rochelle）住所的附近，以便柯朗不忙的时候可以一起工作。而随着书籍撰写的进展，罗宾斯意识自己需要花愈来愈多的时间来写书，而这样会影响自己的研究生涯。毕竟，对一位年轻的数学工作者来说，其前途不能依赖于撰写这样的普及读物。另一方面，柯朗则认为罗宾斯的帮助很有益，从而提出一起署名而不再给罗宾斯支付报酬。这样罗宾斯作为作者也就更加用心写作了。罗宾斯同意了，因为他也很喜欢这项工作。

但瑞德对此曾质疑罗宾斯[8]：柯朗真是这样说的吗？许多人在离开柯朗办公室时根本不清楚他在喃喃自语之中究竟作出了什么决定。

成书前柯朗从没有给罗宾斯看他单独撰写的序言，序言署名也是柯朗一人；外文书中常见的致谢页（“DEDICATED TO”）上也没让罗宾斯

[27] Shiryaev 在其序言中[26]使用“Anticourant”一词；罗宾斯在对他的采访中[9]使用“Anti-Courant & Robbins”一词。

参与，柯朗将此书献给他的四个子女。直到罗宾斯自己去印刷商那里看清样时才惊呆了：书名页上没有自己的名字。

这种做法或许是早年德国数学家的习惯，也是柯朗自己受到非议之处。例如，柯朗和希尔伯特共同署名的两卷本《数学物理方法》的第一卷主要是柯朗写的，希尔伯特只在书的表现形式上出力；而柯朗的助手弗里德里希斯为第二卷（主要是第七章）的写作尽力不少[8]。通过一番交涉，柯朗同意将罗宾斯的名字加上。期间的斗争定是不愉快，罗宾斯的导师惠特尼甚至曾私下表示“若柯朗一意孤行，就将其驱逐出（美国）数学会”[8]。因为柯朗的运作，这本书的版权归属于柯朗。所得版税，柯朗每次只是寄一小部分钱给罗宾斯，至于究竟这本书总共卖出多少，罗宾斯也被出版社拒绝告知。

无疑，一开始是柯朗在策划将自己的笔记整理成这样一本书，希望比自己其它出版物更多地表达自己对数学的观点和看法。罗宾斯是一位优秀的作家，他在这些稿件的改进和扩充方面花了很多功夫，使得全书生色不少。数学家在合作成果中讨论谁的贡献占多大比例是不幸的。曾经亲密的合作以不愉快结束也令人嗟叹。这些足以使人引以为鉴。

11 内容简介

《数学是什么》内容广博融洽。笔者仅仅作一粗略介绍，希望能够吸引没读过这本书的读者。

书的开篇是柯朗撰写的短文“数学是什么”，表达了柯朗对数学的观点。书末附加了一般参考书籍以及各章节的参考资料。有经验的数学读者往往对参考文献感兴趣，这不仅记载了前人的贡献，还为读者进一步阅读指出了途径。例如，本文所提及的书《数学人物》[9]（在新版中出现），《论数与形》也都在《数学是什么》的参考书目中。英文版中列有的名词索引也对读者很有好处。

书的一个重要组成部分是可能被读者忽视的习题。作者不但在章节中配置了适量的习题，在全书的最后还附加了更多评注、问题和练习。这些习题有难有易（对较难的问题，特别用符号 * 标出），需要一定的思考，不是作者反对的空洞的解题训练。习题，尤其是对数学学习，是必要的。它们可以训练数学能力，检验阅读效果，防止读得过快带来的一知半解以致最终读不下去。这些习题，即便不能完全解决，尽力思考一下，也是很有益处的。

《数学是什么》新版共九章。前面八章是柯朗与罗宾斯的原作，未加修改。其中分别讨论了：自然数、数系、几何作图和数域、（初等）几何学、拓扑学、函数和极限、极大与极小、微积分。第九章是由斯图尔特补充的，分节讨论了前面讨论过的一些问题的最新进展，例如费马大定理、哥德巴赫猜想、四色定理等的研究现状。斯图尔特的某些介绍可能稍显“讲得太多”，有违柯朗、罗宾斯的本意，毕竟将一本普及性的图书内容限制到合理的范围也是一种艺术。例如，Blank 即在其书评中批评斯图尔特介绍黎曼猜想、维数理论和分形过多。

数是近现代数学的基础。因此第一章即介绍自然数（指正整数）。从第一节的第一小节就可感知全书的风格：这一节温习了我们熟知的整数加、减、乘法，但我们可以看到一个数学家是如何看待这些内容的。在第一节中作者还介绍了整数的表示，这里我们可以了解常用的十位进制以及更一般的位进制的数学原理。作者还举例演示如何计算七进制下的整数加法和乘法。这一章中另介绍了数学归纳法、等比、等差级数以及二项式定理、不等式等。这些可以作为高中生的课外读物。在第一章的补充中有不少篇幅介绍“数学的皇后”——数论，如高斯的素数分布定理以及同余理论初步、毕达哥拉斯数和费马大定理等。笔者至今仍记得第一次读此书，读懂这一章中欧几里得关于有无穷多个素数的经典反证法以及求最大公约数的辗转相除法时的欣喜。

第二章中作者介绍了数系的构造。有理数、无理数和复数是中学阶段的基本内容。但其坚实的逻辑基础的建立却并不遥远。作者使用了较多的篇幅介绍有理数——作为测量手段的有理数、数的扩充的内在需求以及有理数的几何表示。作者从不可公度线段角度介绍了无理数，还从几何级数、循环小数等我们熟悉的对象向读

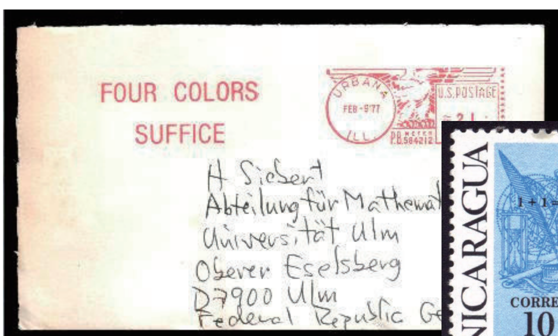


图 9 伊利诺依大学外寄邮件上带“FOUR COLORS SUFFICE（四色够了）”字样的邮戳——这是 1976 年，黑肯（Wolfgang Haken）与阿佩尔（Kenneth Appel）宣布用计算机辅助证明了四色猜想的独特方式

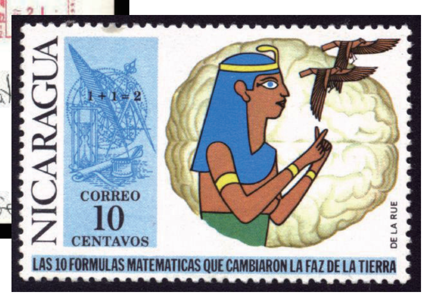


图 10 尼加拉瓜 1971 年发行的系列邮票“改变世界的十大方程”之一“1 + 1 = 2”：用手数数

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	34	42
6	6	15	24	33	42	51

图 11 《数学是什么》第一章中的七进制乘法表——“六六乘法表”（如果您好奇这是怎么来的，就去读下这本书吧）

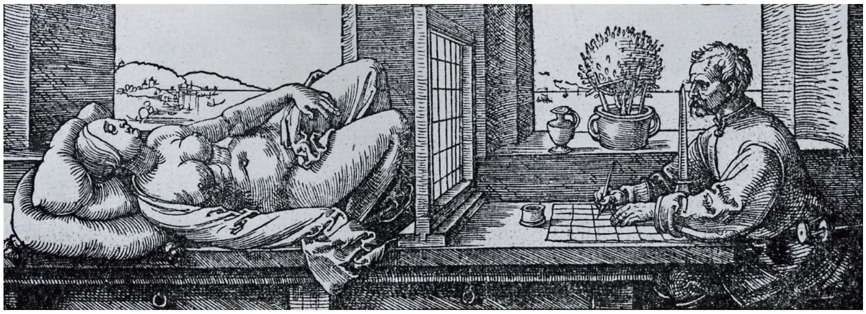


图 13 德国画家丢勒（Albrecht Dürer , 1471-1528）的透视画法机

者介绍极限。书中还介绍了定义无理数所用的区间套原理和戴德金分割方法。至于书中关于无穷的讨论，如有理数的可数性、集合的对应、康托关于集合大小的理论以及数的连续统等都是饶有趣味的。书中还进一步介绍了解析几何、复数、代数基本定理以及代数数和超越数等概念。例如本章最后关于 $2^{\sqrt{2}}$ 是否为超越数（即是整系数代数方程的根）的希尔伯特问题就能吸引读者。这一章还单独讨论了非直接证明（非构造性推理）、无限的悖论以及数学的基础，从此也可看出作者阐述数学思想、方法的兴趣。

第三章中几何作图部分可能是每一个念过初中的朋友都感兴趣的（作者甚至介绍了有趣的仅用圆规作图问题）。1796 年，年仅 19 岁的高斯的第一个发现——正 17 边形（更一般地，边数为费马数的正多边形）可以用尺规作图的故事是即便对高斯也是激动的，高斯从此选择以数学为职业[28]。而著名的三大尺规作图不能问题：

1. 将任一个给定的角三等分；
2. 立方倍积问题：求作一个正方体的棱长，使这个正方体的体积是已知正方体体积的二倍；
3. 化圆为方问题：求作一个正方形，使它的面积和已知圆的面积相等

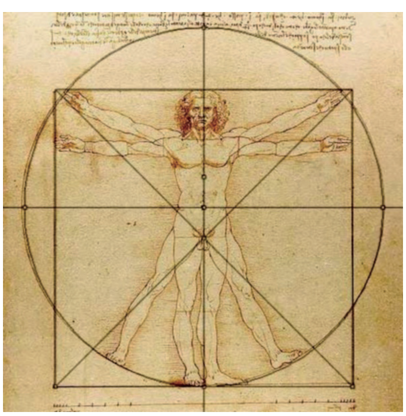


图 12 不限于尺规作图，达芬奇知道如何化圆为方。图为达芬奇绘制同时嵌入圆形和正方形中的人体图像——维特鲁威人

则曾是千年难题。特别是化圆为方，因为方圆的完美性，同时又有着肉体、精神等的象征，更是激起人们的兴趣。

但数学家的眼光不仅在作图，而是着眼于图与数的关系。确实，三大几何作图不能问题的严格证明依赖于代数方程的解。如果不懂这些，就会有人盲目地浪费精力去寻找解法。事实上，在《近代数学概观》第二册中增补有余介石长子余宁生口述的对 30、40 年代“我国之三角分家及方圆家”提供的所谓解法的批评。重温该文“尾声”中一段引用不无裨益：

“有些人以为数学家之所以不能化圆为方等等，乃是因为工作太难的缘故。有了这个念头，当然想要自己去解决问题，以便打倒一切数学家，出人头地。总之，一切麻烦都因学识不够，竟不知是不可能之事，真是可惜。”

书中认真分析了用尺规可以做出哪些量来，讨论了正五边形的作图，介绍了为何不能一般地解决角三等分问题，为何正七边形不能用尺规作图等。我们还可以了解到“化圆为方”是尺规作图不能问题的证明是直到 1882 年德国数学家林德曼证明 π 是超越数才得到的。

第四章是射影几何、非欧几里得几何等的介绍。很多内容对高中程度的读者是适合也有吸引力的。这些内容之间也有联系。例如，射影几何和非欧几何在对平行线的处理上各有特点。为了使读者感兴趣，我们简单介绍一下书中占有一定篇幅的射影几何学以及笛沙格定理，至于书中介绍的相互对偶的帕斯卡定理（帕斯卡 16 岁时发现、莱布尼兹称为“神奇的六边

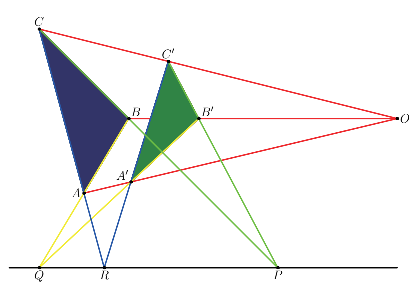


图 14 笛沙格定理

[28] 常见讹传指高斯的墓碑上刻有正十七边形的图案。事实是，墓碑上没有；但高斯家乡不伦瑞克高斯纪念雕像底座侧面刻有正十七角星。

形定理”)、布列昂匈（Brianchon）定理就留待读者自己去学习了。

射影几何学的研究起源于达芬奇、丢勒等人的透视画法，盛于 18 世纪末，特别基于法国大革命中建立的巴黎综合理工大学对几何学的兴趣。这所学校的学生彭色勒（J. V. Poncelet, 1788-1867）在俄罗斯人的监狱里写下的论文奠定了射影几何学的公理系统，从而使得射影几何学得以完全建立。

每一种几何学都主要研究在特定变换下的不变量和不变性。作者也是希望向读者传达这一高观点。射影几何研究经过射影变换后不变的图形性质。法国数学家笛沙格（Gérard Desargues, 1591-1661 ）在笛卡尔和费马创立解析几何的同时期开启了射影几何学的研究。笛沙格发现了射影变换下的不变量——交比，还发现了如下以他名字命名的定理：若三角形 ABC 和三角形 $A'B'C'$ 对应顶点的连线共点，则对应边的交点共线；反之也对。

平面射影几何学和平面欧几里得几何学的最大不同在于射影几何学里承认无穷远点；认为平行线相交于无穷远点，平面的无穷远处是无穷远直线（类比林则徐的名联中的：海到无边天作岸），而不同的平行线组的交点（无穷远点）都在无穷远直线上。因为共线是投影不变性质，对应边平行这一特殊情形的笛沙格定理也成立——交点都在无穷远直线上。该特例是不难证明的；而射影几何的妙处在于，我们可以通过证明这一特例来得到一般证明——正谓“此时无穷胜有穷”[29]。

第五章的拓扑学可以看作上一章的延续，研究的是比投影变换更任意的压缩、扭曲等变换下还保持不变性质的“橡皮科学”。拓扑学是罗宾斯博士研究的专长，也是他要求开辟这一章的。书中介绍了欧拉的多面体公式、四色定理、维数概念、不动点定理以及莫比乌斯带等内容。我们不一一详叙。很有特点的是书中介绍了五色定理的证明以及代数基本定理的拓扑学证明。

第七章是极大与极小问题。这样的问题有应用背景，自然是很有意义的。费马引入导数的论文就是以求极大极小为题的。笔者当时读到最速降线问题，见到其解法之一可以类比中学学过的折射定理时，感觉如醍醐灌顶。我们稍详细聊聊本章中介绍的等周问题。粗略地说，等周问题研究具体空间中已知表面积的封闭曲面（或已知周长的封闭曲线）如何围出最大的体积（或面积）。这是一个古老而又年轻的问题。两千余年前的欧几里得就已经证明了在所有等周长的矩形中，正方形的面积最大。现代数学中，人们也将等周问题称为迪多（Dido）问题，则是因为下面的故事。前 814 年，泰尔王国（今黎巴嫩西南海岸）的迪多公主为免迫害，携财宝与仆人登陆突尼斯湾。她向柏柏人首领借一牛皮之地；却将牛皮切成细条并连在一起，以海岸线为直径圈出半圆以获得最大面积。这就是迦太基城，迪多自任第一女王。这表明迪多女皇已经知道平面上的等周定理：在平面上

图 15　巴西 1967 年发行的邮票，是最早以莫比乌斯带为内容的邮票。在整体上，莫比乌斯带为单侧曲面

图 16　前东德在欧拉逝世 200 周年纪念时发行的邮票。邮票上有欧拉的头像和他发现的多面体顶点、边、面（分别记为 e、k、f）之间的关系公式 $e-k+f=2$

所有周长一定的封闭曲线中，圆围出来的面积最大。这也是历史上许多城市的城墙或外形近似圆周的道理。但其证明却不易。首个较完备的证明直

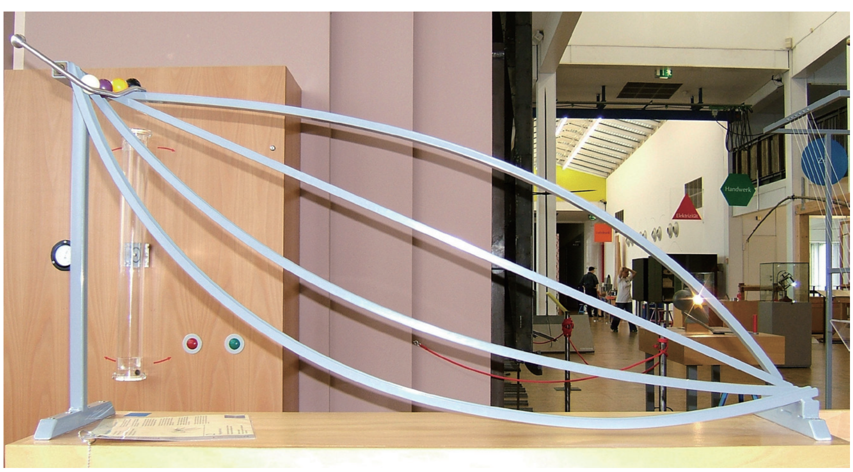


图 17　极大极小问题的经典问题之一：最速降线问题（一个质点从等高处沿着什么样的曲线下降所需时间最短，图为德国曼海姆市技术劳动博物馆展品）

29 引自冯克勤编著《射影几何趣谈》，上海教育出版社，1987。

图 18 迪多女皇割牛皮圈地

到 1838 年才由雅各 • 史坦纳（ Jacob Steiner, 1796-1863）给出。证明中所用到的如对称化的思想，在书中有仔细的介绍，不难理解且重要。该问题的推广，如考虑球面上、高斯空间（平面上的勒贝格测度换为高斯测度）的等周问题及其和泛函不等式之间的联系都是研究热点。如球面上的等周不等式（球冠为最优等周域）还是由著名的概率论大家勒维（ Paul Lévy ）发现。类似的问题还很多，知名的有如蜂窝猜想等。

为解决极值问题，书中介绍了肥皂膜实验。这不仅仅是为着使读者感兴趣，柯朗恰在做研究时也玩肥皂膜实验。事实上，肥皂膜实验中出现的数学问题，至今还是数学家研究的对象。例如，两个或多个肥皂膜在空中相粘的数学理解。

第六章论述函数和极限这些分析的基本内容。这是整个微积分的基石。因此作者花了不少笔墨来介绍。比如，极限这一概念就讲得很详细。 第八章以不长的篇幅，介绍了微积分的精华。其讲述也别出心裁，与大多数现行教程不同的是，这里先介绍积分学，后介绍导数。这和历史发展的顺序也类似，积分的概念在古代就已有萌芽，但导数的概念却是 17 世纪才出现的。

作者在介绍积分时，耐心地逐步推进：以简单积分如三角形、弓形面积的计算为例，以分割、求和、取极限的程序，只用到等比级数求和这一技巧，演示如何根据定义计算积分。如果要初步了解微积分，这本书的讲法是很好的例子：用面积观点介绍简

图 19 柯朗与同事在做肥皂膜实验

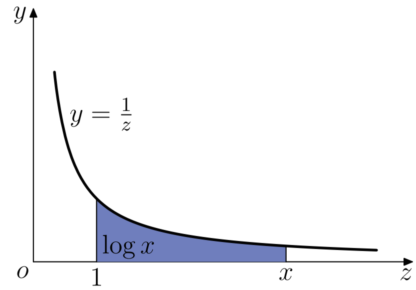


图 20 对数函数定义为双曲线下的面积

单函数的积分，再用面积变化来讲解导数。

在微积分的应用方面作者也别具匠心。如书中介绍了数学家们熟知，而或许一般初学者不幸未能从课堂获得的一个“秘密”：

$$\log x=\int_1^x \frac{1}{z}dz,\ x>0\ 。$$

即将对数函数 $\log x$ 定义为曲线 $z\mapsto y=1/z$ 下从 $z=1$ 到 $z=x$ 的面积。这样的好处是对数函数可通过简单的函数来定义，同时对数函数的诸多性质都变得清晰。例如，中学可能不介绍的基本不等式 $\log x\le x-1\ (x>0)$ 就可通过面积的比较而得到直观理解。更重要的是，由此还可以定义指数函数 e^x 并自然地得到基本极限

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ 。$$

学习如此的一些“见识”是阅读名家书籍的一大乐趣。比如，阅读柯朗的《微积分与数学分析引论》，读者可以学到阿诺德在其《论数学教育》中提到的所谓“秘密”：矩阵行列式的几何解释为矩阵各列构成的平行多面体的体积。

12 适合读者

作者在书的前面写有“本书用法”，介绍了哪些读者可以从中获益。我们且做些有所重复的介绍。

程度较好的高中生学习《数学是什么》不会感觉太大困难，基础稍弱

的学生有所选择或在有人指导的情况下也能入手。一些内容，如几何学、肥皂膜实验等内容可以作为初中生的课外兴趣。又如射影几何学平行于欧几里得几何学，有趣又不难理解，适合高中程度的学生独立学习。如果有朋友想赠书给高中毕业的学生，我推荐这本书。事实上最近德国编有给高中毕业生阅读的数学科普图书，这本《数学是什么》中有关素数分布的定理和拓扑学的内容就被收录其中。

自然，中学教师也能从书中学到不少东西，而且还可以用它作为参考书辅导学生。柯朗在其“本书用法”中就提到“高中教师在指导高材生或指导课外活动小组时，从几何作图和极大极小等章中，可获得许多有益的材料”。

该书更是大学生很好的课外读物，一方面书中关于极限与函数、微积分的论述可以作为大学生学习分析的参考，因其中有清楚的阐述和独到的见解；另一方面还可以了解到现行的普通教学中没法获得的数论、拓扑学等内容，毕竟一般大学课程中不会覆盖这么广的内容。大学教师也可从书里摘取到丰富的例子用于课堂教学。即使对数学专业的学生，书中的素数定理等内容似乎也不是每所大学都会教授。或许现今许多学校针对广大大学生的数学通识课程可以采用该书作为教材或参考书。确实曾有一些教师在大学课堂使用该书。

笔者尤其推荐大学一、二年级非数学专业的学生阅读此书。因此我们继续介绍书中两个对课堂上都要学习微积分的大学生有所启发的例子。

我们知道在历史上 π 的计算是数学水平的象征。因此莱布尼兹的 π 公式

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

就显得很重要。在学习了微积分基本定理之后，可由

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}=\arctan 1&=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\\&=\int_0^1(1-x^2+x^4-x^5+\cdots)dx\end{aligned}$$

再从 $\int_0^1 x^m dx=\frac{1}{m+1}$ 以及不难的余项估计即易得到上述 公式。这表明 $\pi/4$ 可以解释为曲线 $y=1/(1+x^2)$ 下，横轴上方，从 $x=0$ 到 $x=1$ 的面积。这在《数学是什么》中都有介绍及证明。

另举一个微分的小例子。书中在介绍了多项式函数 x^n 的高阶导数后，指出二项式定理（在书的开始不久即介绍了）有一个更简单的方法证明，即考虑函数 $(1+x)^n$ 关于 x 的在 0 处的各阶导数。

13 美如文学

历来有人将数学比喻为艺术，那么数学书就该是艺术作品。著名数学家阿蒂亚爵士在对年轻数学家的忠告中特别指出数学写作的重要性[30]：“数学也是一种文学形式。…… 写得好的论文会成为经典，将被未来的数学家们广泛阅读；写得不好的，不是被遗忘，就是在其结果极重要的条件下被重写。”确实，莫尔斯就曾称赞《数学是什么》说“本书就是一件艺术作品”。

亚马逊网站对该书有如下描述（主要部分亦见斯图尔特在增订版中的序言）：

“形式数学（formal mathematics）就像拼写与语法——只是对局部规则（local rules）的正确使用。有意义的数学（meaningful mathematics）有如新闻工作——它只讲述有趣的故事。但它又不像某些新闻报道，因为它的故事必须真实。而最美的数学（the best mathematics）则如文学——它将故事栩栩如生地呈现于你眼前，使你在理智上和情感上都情不自禁地投入其中。《数学是什么》就是一部精美的文艺作品——它为每一个渴望欣赏数学世界的人推开了一扇窗户。”

这本书写得优美或许和作者之一的罗宾斯青少年对文学的喜爱有关。罗宾斯曾在其采访中[9]与《数学的内容》作比较，说：

“当我看到该译本时[a]，我第一次意识到我们的书《数学是什么》真是一本多好的书。他不是由一个委员会来编写，……。它只是由两个人就一个他们各自以之为终身事业的课题，通过紧密的合作来完成的。当我开始撰写这本书时，我才 24 岁，刚获得博士学位才一年。他代表了我之所学，我之所期，以及我将立身之处。对柯朗而言，这是他作为数学家和研究所管理者和推动者的一生中所拥有的多姿多彩经历的总结。我们代言了一个不复再来的特殊年代（1939-1941）。现在是不可能写这样一本书了；数学已经发生了很大的变化，数学事业的特点也如此不同。我倾向于将《数学是什么》看作是一部文学作品而非科学作品。它有着牛顿和莱布尼兹发现微积分时代肇始的法国文化圈之传统。那时，没接受过正规科学教育的人们渴求理解这些概念；沙龙流行，哲学家发表演讲，给名流讲授微积分。《数学是什么》有着法国人所谓的高等通俗化（high vulgarization）的传统。”

[30] 参 *The Princeton Companion to Mathematics* VIII. 6，可见 http://press.princeton.edu/chapters/gowers/gowers_VIII_6. pdf。

[a] 指《数学的内容》的英译本 *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning*，1963 年由 MIT 出版社出版。

图 21 滥觞于沙龙的法国科学院

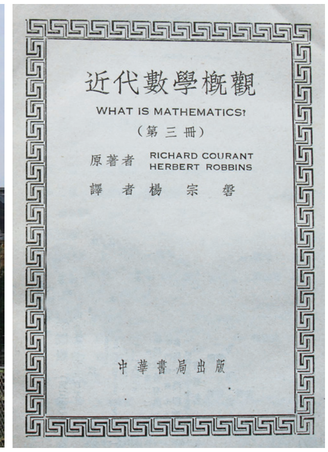


图 22《近代数学概观》第三册标题页（笔者藏书）

中译者也对此书的文笔有所赞誉。吴英格等的译本指该书“内容精辟深入，文笔则飘逸谨严，兼而有之；令人不读则已，一读就非一气读完不可”。左 / 张译本的序言中说：“它不仅内容丰富，而且文笔流畅，阐述精辟；既直观易懂又严谨深刻；使人读时爱不释手，读后回味无穷，确实是一本深入浅出、引人入胜的难得的佳作。”

在我看来，对初学者，“一气读完”是有难度的；但有选择地阅读，是可以被吸引的。我当时阅读这本书，有如年少的我初读《史记》。我当时对《史记》的文字虽不能完全通晓，但得其大意，有如我对《数学是什么》的体会。读这两本书时，看着快翻完的书，都曾感慨：好书不再，奈何快“读”完了！

《史记》既是史学巨著，也是文学杰作，所谓“史家之绝唱，无韵之离骚”。有些相似的是，《数学是什么》讲数学的同时，文字也很好。《史记》文字简洁生动，同样，《数学是什么》最大的特点或许就是以简洁生动的文字概览了近代数学的基石、架构、历史、思想和方法等内容。这恰如著名数学家丘成桐先生在其演讲[31]中所指出的：“数学的文采，表现于简洁，聊聊数语，便能道出不同现象的法则。”

14 中译介绍

我们先介绍最早的中文译本《近代数学概观》。汪 / 朱译本的译者序中只有一行字提及该译本——作者感谢“李运樵副教授提供文言文译本”。由此可见，汪 / 朱的翻译或参考了《近代数学概观》。

左 / 张译本说该译本“流传不广”，“部分章节文字较艰涩”，“且不少术语与目前通行的不尽相同”。《近代数学概观》确实流传不广，甚至查询得知中科院图书馆都收藏不全。但高中水平的读者是可读懂全文的。有兴趣的读者可以找到 2009 年哈尔滨工业大学出版社出版的《世界著名平面几何经典著作钩沉：几何作图专题卷（上）》，其中第四编即为余介石 / 杨锡宽翻译自《数学是什么》的《几何作图题及数域运算》[32]。

笔者暂只找到余介石、杨宗磐相关资料，简介如下。余介石（1901-1968）是著名的数学教育家，曾在四川大学等高校任教。在上世纪初他和赵淞、傅种孙三教授被誉为“三大中等数学权威”，对振兴现代珠算有重要影响。他曾到故宫以放大镜从古画中寻找算盘，并最终在《清明上河图》找到。此证明珠算在宋代即有使用。

而杨宗磐（1916-1976）于 1941 年毕业于日本大阪帝国大学理学部，曾任北平师范大学讲师、北京大学副教授。建国后，历任四川大学、北洋大学教授、南开大学等高校教授。华罗庚在其《高等数学引论》的序言里曾致谢写作过程中参考过的著作，其中就有杨宗磐 1958 年著的《数学分析入门》。

综合前文及附录，我们知道老一辈数学家如朱公谨、余介石、吴大任等对国外名著的译介。其意义，我们引用著名数学教育家、中国数学会第一任董事会主席胡敦复与吴在渊合著的《近世初等代数学》一书的序言中的话“自立之道奈何？第一宜讲演，第二宜翻译，第三宜编纂，第四宜著述”来说明。

下面我们主要考虑汪 / 朱和左 / 张的译本，因为它们对大陆读者而言最常见。特别是左 / 张的翻译增订版添加了新的内容得以再版，读者很容易得到该书。

从译者的经验判断，这两译本的数学内容的翻译都该是值得信赖的。张饴慈是首都师范大学的教授，热心数学教育，近年积极从事新国家课程标准高中教材（北京师范大学版）的

[31] 见丘成桐在浙江省图书馆的讲演：《数学和中国文学的比较》。

[32] 该书第二编也是余介石翻译的《几何作图题解法及其原理》。

建设。笔者曾在与张饴慈、张丹两位老师的讨论下，执笔撰写概率论部分选修教材初稿。左平是张饴慈的同事。如前脚注，左平翻译这书前曾翻译了托普利茨和拉德梅彻的名著。汪、朱中笔者只通过网络粗略了解到汪浩教授。汪晧生于1930年，毕业于清华大学数学系，曾在哈军工从事数学教学工作。哈军工的数学教学异常严谨，锻炼了一些数学人才。汪浩后到长沙国防科技大学任教，曾任政委，少将衔。除《数学是什么》外，汪浩也编译过一些其他书籍。他写有一本普及性读物《数学与军事》[33]，也很有意思。

当然，翻译要做到十全十美是不容易的。1996年英文新版第512页的最后一行中所提的数学家“Fang Chung”应为“Fan Chung”，她是1949年出生于台湾的美国著名女数学家金芳蓉。这个失误实际上在Gillman的书评[34]中已经指出。而左/张译注的增订版中对此却没有更正，中文名字也只“芳蓉”——不知译者是否知道这其实就是人称“台（湾）大（学）数学系四朵金花”之一的金芳蓉。

从语言的角度，两个译本各有利弊。汪/朱译本的文字较典雅，但有些地方可能会使初学者略觉生涩。而左/张译本的语言则平直、通俗易懂。然而左/张译本对一些人名的翻译和我们现在习惯的译名不同。如著名数学家“Pascal”的名字被译为“巴斯嘉”，而非常用的“帕斯卡”。但此译本在译名后用外文加注所以问题不大；若书后能列出人名翻译对照一览表就更好了。相比汪/朱的译本中外国人名的翻译一般都符合我们现在的习惯，且书末列有人名翻译对照。

左/张译注的版本中有些翻译较灵活，但有的灵活可能会显得不必要。如将原书中以自然数为底的对数符号log改成了中国读者较熟悉的ln；将算术级数、几何级数翻译为常用的等差级数和等比级数。但实际上，算术级数、几何级数的叫法无什么不妥，而用log取代ln也是被广泛接受的。

这两译著的一个共同缺憾是都没有能在书后附名词索引及对应页码，在原版中这是有的。而且其它三个中译本都有关键数学术语的中英对照和索引。对这样一本内容广博的书，索引很有利于读者。虽然索引的编制在以前可能颇费工夫，但现代利用计算机，应该极易。此外，两译本都省略了原版中很有价值的参考文献，只是左/张译本的新版本有所进步，附加了参考文献。

15 个人经验

我是在1994年初中毕业后的暑假中读到《数学是什么》的。现在资讯易得，图书丰富，获悉得到《数学是什么》一书的机会很大。然而我当时读到这书是极偶然和幸运的。这或和我1994年入读高中前乏书可读而又喜爱阅读有关。

我们能从不少文学作品中了解到中国六、七十年代书籍的匮乏和人们对读书的渴望。我的家乡是革命老区平江县幕阜山脚下的一农村，我少年时代能得到的书籍也是极少。而电视机也远没普及，观看少时流行的《西游记》、《霍元甲》都得相约跑老远挤到别人家看。因此读书是不多的消遣之一。家里唯一的藏书是四本《毛泽东选集》（五卷中缺第四卷）——其实家里人是不读书的，但家里有此宝书也不很奇怪，或与祖父“富农”身份有关。镇上的新华书店门可罗雀，书不少，但都束之高阁——一直闭架售书，随便进去翻书是不可能的。现在家乡虽然物质丰富了，阅读的环境可能不如从前。这家新华书店也已被改成了几层楼的宾馆。

上高中前我极少购书经历。当时农村的长辈是没有习惯也常没余力给子女买书的。我幼时曾常随祖父街头卖菜，一次到邮局，或看在我喜欢，或是邮局工作人员介绍，祖父给我买了两三册几页纸厚的小画册。其情景和我回家后翻阅图画的片段依稀记得。我少时镇上的综合门市部玻璃柜的一角往往有一些书出售。常光顾那里，也零星买过便宜的连环画。为了看价格，常常要俯身瞄书下的定价以及看是否盖有带“半价”字样的矩形红戳。一些如东周列国故事的连环画常常半价——大约8分钱一本。一次从镇上回家的路上见到地摊卖私自印刷的小册子，还跑回去自作主张向在镇上摆摊的邻居借钱两毛七购得最薄最便宜的《增广贤文》。也还曾有一次悄悄地取家里的钱买了一本《河北武林故事》，花费约1.5元。其实想买一直挂念着的较厚的《三侠五义》，但担心太贵又不敢问价格，只好匆匆买下这本稍薄的。稍长后还买过黄自元临的《九成宫碑醴泉铭》。

当时的农村虽然表面上似乎没什么书籍，但通过交流，还是能读到不少书！如小学时能从邻居处借到连环画、《故事会》和《少年文艺》之类的书籍。初一的邻桌是镇上高中（四中）校长的公子，借给我刚出版的高中生读本《世界之瑰宝 民族之骄傲》，近600页，我翻看过很多遍，其中关于中国书法的介绍印象尤深。我知道有人也曾以此书为文化启蒙读物。更不用说能借到不少当时流行的武侠小说。通俗演义如罗通扫北以及唐代薛仁贵几代人征东、征西至后来的薛刚反唐，历史小说如清代康熙、乾隆的故事，以及以前的启蒙读物如《幼学琼林》都能从不同地方借阅。还记得我读到的第一本宋诗读物是来自邻居家的，而邻居借自其亲戚。还读过后来才知是名著的《水浒传》、《三国演义（下）》等。也借到过文革资料汇编、

---

[33] 1989年，湖南教育社出版；2008年，大连理工大学出版社。

[34] What Is Mathematics?, book review by Leonard Gillman, The American Mathematical Monthly 105, 5 (May 1998), 485–488。

图 23 平江一中校前的彭德怀雕像和天岳书院

繁体竖排的《唐诗三百首》、一册雕版印刷线装的《古文辞类纂》。现在想来，这些书在农村的流传真是奇迹。但这也使得我一点也不奇怪于几年前的新闻——我们同镇的五角村延续着中国最后的私塾。

没书读时，我曾经翻新华字典，特别是乐于翻阅从舅舅家借来的《汉语成语小词典》中的历史故事。我也开始读家里的《毛选》。先是无意中看到书中所附注释——如孙猴子变尾巴为寺庙旗杆的故事——而感兴趣后翻阅全书，里面的文章确实“好得很”。中学教材我也拿来当课外书读。如《语文》课本后教师从不提及的诗歌；一年春节，我还曾捧着厚厚的《植物学》教材读，琢磨其中知识间的逻辑，其味无穷。

当时农村中学很多成绩好的学生，除了个别学习好父母是明白人的（如少数教师子女），知道是要读高中考大学的外，其他的都去念中专[35]了，似乎这是最好的前途。而其时的中专报考有名额限制，因此也只有成绩名列前茅的才有资格。我也不例外随潮而去报考中专了，事实上我并不清楚大学为何物，而周边考上中专的先例是有的。但那时县城的一中希望有好的学生入读。从我们那一届开始，据说还县人大举手表决过，全县中考前 60 名的都得无条件转去一中读书。我就这样被“截留”了。

入读高中前的暑假，我们这 60 名“截留”生被免费邀请到县城的一中[36]去补习。“断送我们前途”的校方似是有所歉意，补习结束前慷慨同意同学的要求，让我们每人从图书馆借两本书回家。所谓图书馆就只一间图书室而已；但我是第一次见到图书馆，和一群同学一路小跑去挑书。我无意间瞥到一本崭新的黄皮《数学家传》，然后又看到较旧的很厚的《数学是什么》（红色封底的汪 / 朱译本）。因为只能借两本，匆忙中厚书吸引了我，就取了《数学是什么》——其实我当时对数学并无偏好，但也不了解其它该读的名著，只是希望不容易读完，附带取了那本崭新的《数学家传》。

将书带回家后，发现《数学是什么》虽然很新鲜——我如发现一个新的大陆。但书却很难读，也无人指导。如同余理论我也就只能看懂开始的入门介绍，至于高斯的二次互反律是没读懂。书上留有先前读者用漂亮的钢笔小行书作的批注，我敬之为天人，竟有能读懂此书的人！进入高中后，我也写条请求图书馆管理员帮我找出该书来再读过（不再有机会亲自挑书，而该书也不在书目中），如几何作图、射影几何等还认真地做笔记。高二时将微积分部分囫囵吞枣地看完了。

我从《数学是什么》获得的数学训练，比这书能提供的，要少得很多很多。这和我贪多求快不正确的读书方法有关。如下的话是我多想当时就有人对我说的：慢慢读，做下书中的习题。读文学书或能“不求甚解”，书读百遍，其意自通。但数学书的美，还是需要下功夫才能体会的。

但这本难读的书对我后来选择以数学为专业还是有些潜在的影响。高中时对书籍之丰全无概念，甚至曾感叹读完《史记》后将无书可读。当然，如《史记》那样的好书也不多。但《数学是什么》这本难啃的书，使我意识到，如果能读数学书，将来无论如何应该不会无书可读，也绝不会孤单。确实，数学书也可如文学书一样放在案头枕边，读读《数学是什么》吧！

现在想来，校图书馆藏有这书可能和地近该译本的出版社所在地长沙有关。一个人喜欢数学或会有很多偶然的机会。而每一个中学图书馆拥有这样一类好的数学普及图书，就会有更多的读者以更大的机会接触到好的数学，从而喜欢数学。我们就以书中介绍的费马大定理的终结者怀尔斯（Andrew Wiles，1953-）的故事结束吧。

话说当年小怀尔斯在图书馆看见一本书，里面有费马大定理的介绍。30 多年后，他回忆：

“它看上去如此简单，但历史上所有的大数学家都未能解决它。这里正摆着我——一个 10 岁的孩子——能理解的问题，从那个时刻起，我知道我永远不会放弃它。我必须解决它。”

[35] 中等职业技术学校，当时中专毕业后算是有铁饭碗了。

[36] 是为彭德怀领导平江起义之处。

图 24 1937 年国立四川大学数学系师生合影，前排右一为余介石教授、中为魏时珍教授、左一为谢苍璃教授（谢亦曾在哥廷根学习）

图 25 1956 年朱公谨教授在上课（照片来源：上海交通大学网页）

16 附：柯朗的两位中国学生魏时珍、朱公谨简介

魏时珍（1895-1992）出生于四川蓬安县，名嗣銮，字时珍，以字行。他在去德国留学前，曾是五四运动前夕李大钊领导的“少年中国学会”的成员。1920 年，魏时珍与同学王光祈（1891-1936，著名音乐学家和社会活动家）从上海乘邮轮赴德学习，在岸上与他们挥手作别的是同为“少年中国学会”会员的毛泽东。他们二人先同在法兰克福学习，后来王先后前往柏林、波恩学习音乐；而魏时珍得知哥廷根是数学的顶级殿堂，于 1922 年考入哥廷根大学，师从希尔伯特、柯朗学习数学。在哥廷根学习期间，他还做过到哥廷根学习的朱德的德文教师。1925 年魏时珍以论文《在平均负荷下四边固定的矩形平板所呈现的现象》获得应用数学博士学位，导师是柯朗。他是第一位在德国获得数学博士学位的中国人。1984 年 6 月，哥廷根大学还向魏时珍颁发了“金禧证书”，表彰他从事的教育科研工作以及为增进中德学术文化交流作出的贡献。

魏时珍在回国前就积极向中国介绍国外先进的知识，如他与爱因斯坦取得联系，向中国人介绍相对论（1923 年）。魏在取得博士学位后于 1925 年回国，积极教书育人。如他撰写了第一本偏微分方程的中文教材——《偏微分方程式理论》教材。魏的这本教材参考了柯朗的偏微分方程讲义。因与本刊主旨相关，我们特别指出魏时珍强调大学教学应该文理相融。他在哥廷根留学期间，与哲学家纳尔逊（Leonard Nelson）交往密切；在任四川大学理学院院长时，即建议各院系均开设文、史课程；文、法学院则应开设自然科学方面的课程。魏自己也深通文理，在 1982 年，他还写了《孔子论》一书。

朱公谨（1902-1961）出生于浙江余姚，字言钧，又名藹如。他和魏时珍同样，出生于书香门第。朱于 1921 年赴德国留学，到哥廷根大学学数学。1927 年他以博士论文《关于某些类型的单变量函数方程解的存在性证明》获得德国哥廷根大学博士学位，导师是柯朗。

朱公谨在取得博士学位后也旋即回国。鉴于当时中国数学基底的普遍薄弱，朱公谨撰写大量普及性的数学著作，特别是自 1934 年起在《光华大学半月刊》上连续撰写“数理从谈”、“从高等数学的点观谈谈初等数学”、“集论小谈”等序列文章，影响了如冯康[37]、吴文俊[38]等一代人。朱公谨还致力于翻译国外数学著作。他翻译了德国数学家戴德金（Richard Dedekind, 1831-1916）的名著《实数探原》，被商务印书馆列为汉译世界名著。上海沦陷于日本后，滞留孤

[37] 参冯端著《冯康的科学生涯——我的回忆》，科学时报，1999 年 8 月 11 日，12 日，16 日，17 日。其中写道：“还有值得一提的是，有一本科普著作对他产生的深远影响。在高三时期，他仔细阅读了朱言钧著的‘数理从谈’。朱言钧（朱公谨）是我国前辈数学家，曾在哥廷根大学留学，回国后在上海交大任教。这本书是通过学者和商人的对话来介绍什么是现代数学（其中也提到费马大定理、哥德巴赫等问题），这本书有很强的感染力，使冯康眼界大开，首次窥见了现代数学的神奇世界，深深为之入迷。据我观察，这也许是冯康献身数学立志成为数学家的一个契机。”参 http://lsec.cc.ac.cn/fengkangprize/FKscan/Fscan1.pdf。

[38] 胡作玄著《吴文俊》，其中写道：“曾留学德国哥廷根的朱公谨（朱言钧）发表了不少译著，吴文俊几乎每篇必读，这对他的早期数学思想产生一定影响。”见 http://www.mmrc.iss.ac.cn/wtwu/ 吴 文 俊 .htm。

(a)《柯氏微积分学》(上卷)封面 (b)《柯氏微积分学》(上卷)标题页

图 26 朱公谨翻译的《柯氏微积分学》(译者署名朱言钧，笔者藏书)

岛的他翻译了导师柯朗的微积分名著“*Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung*”[39]。此即《柯氏微积分学》(上、下卷)，乙酉学社丛书第一集，中华书局1949年初版。全书共951页，工作量不可谓不大。有兴趣的读者可以在超星网上免费阅读这本书[40]。1952年院系调整后，朱公谨受教育部委托主持了我国第一部“高等数学”课程教学大纲的制订并编写了《高等数学》教材。

《柯氏微积分学》用文言翻译，繁体横排，颇有文采。只是某些术语的翻译与当今通行的不同，例如书中的“数序”、“有涯”指的是我们现在常说的“数列”和“有界”。但译者知道译名的重要，脚注中分别以英、法、德三种文字加以说明。

约翰曾在《微积分与数学分析引论》的再版(1973年)序言中一开始即说柯朗的《微分与积分计算》:“极其成功地引导了几代数学家进入高等数学的领域。整套书展示了如下重要的启示：真正有意义的数学，是由直观想象与演绎推理联袂创造出来的。”拉克斯也说这本微积分教程迄今仍是最好的教材之一。如是，其译本自然也受到普遍的赞扬。

香港中文大学前文化研究所所长陈方正(1939-)曾回忆:“我对科学的兴趣是初三那年碰到《微积学发凡》，由这小册子触动的，跟着被中华书局刚刚出版的两卷本《柯氏微积分学》(柯氏即Richard Courant)激发。此书清晰、严谨、有系统，一下子就把我迷住了。”[41]

“在40年代末和50年代初，(《柯氏微积分学》)曾是一种模范教本，直到50年代大规模引进苏联教材之后，此书才停止发行。”[42]

我们摘录原序的一段翻译用以说明柯朗的微积分教材的意义。

“其最显著者，为微分与积分之混合编述，与一般之先论微分，后论积分者大异其旨。考微积之先后分论，实由于偶然之习惯，殊乏理论之根据，其结果使学者不能直捷触及中心问题，即对于定积分、不定积分及导数之关系未能融会领悟，不可谓非憾事。”

这里讲的是自欧拉之后的微积分教材著作者总是把微分学和积分学分开论述，从而导致微分和积分之间的关系不清晰，直到1927年由柯朗延续克莱因的方法而一改风气。

朱公谨也和纳尔逊相知。朱还在纳尔逊去世后不久的1928年，著书介绍纳尔逊的生平与学说。[43]

注1：压题图有《数学是什么》的各(译)版本的封面组成，从上到下，从左到右，它们为：1941年英文原版、西班牙语译本、越南语译本、俄译本、1996年英文增订版、德语译本、日文译本、中文1949年译本、中文1979年译本(台)、中文1985年汪/朱译本、中文1985年左/张译本、中文2010-2011年译本(台)。

注2：本文部分脚注引用前面的脚注。

德国比勒费尔德和知阁

2012年2月10日

[39] 乙酉学社丛书由著名物理学家、教育家、编译家杨肇燫(1898-1974)组织。《柯氏微积分学》书前有杨肇燫撰写的乙酉学社丛书第一集缘起的介绍，其中说：“民国三十有四年之初，抗日战事犹酣，曙光未露，殊深风雨如晦之感。本社同人蛰处沪滨，忧郁隐愤，共相策励，亟思借韬潜之光阴，从事于严正科学之述作，为将来复兴作育人才之准备商略效涓埃之助，而苦于经济拮据，徒有心余力绌之憾。”“缘起”还写道：“佥认为国内文化界中最感贫乏者，莫过于大学所需严正科学之教本；补救之道则莫善于逡译国外名著。盖泰西名家著述既正确可靠，且由经验所积，深合讲授之用；况当前需要至亟，尤须争取时间，为求克期观成，则译述尚焉。”而同人“均抛弃版税，期减轻成书售价，以利读者”。爱国之心跃然纸上。

[40] 上、下卷：http://book.chaoxing.com/ebook/read_11020691.html、http://book.chaoxing.com/ebook/detail_80410171.html。

[41] 陈方正，《陈方正的书单》，2010，参http://www.infzm.com/content/50601。

[42] 冯倩，《中国近代的数学先驱——记数学系首届主任朱公谨教授》，参上海交通大学网页http://math.sjtu.edu. cn/xiaoyou/old/alumni_news/alumni_news_7.htm。

[43] 1928年商务印书馆出版的《理性批评派的哲学家纳尔松(他的生平与学术)》。此书书名页写“一九二六年德国哥庭根大学数理博士朱言钧”，与一般认为的朱于1927年取得博士学位一说有矛盾，待考。

美国如何变成数学超级强国

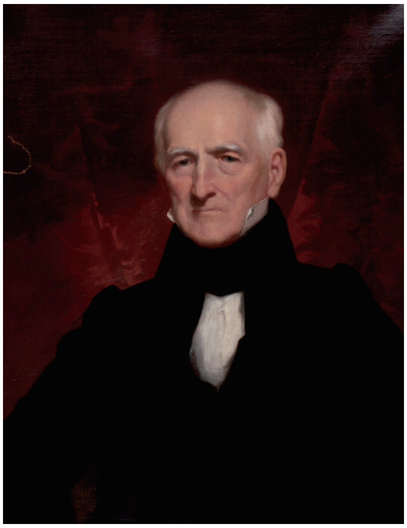
曹亮吉

1976年，美国立国两百年之际，美国数学会在年会上邀请多位学者专家，畅谈美国的数学发展史，事后将讲稿集成《美国数学两百年纪念》（The Bicentennial Tribute to American Mathematics）一书。我们想根据这本书，谈谈美国如何从数学的蛮荒地，演变成今日数学的超级强国。

从十七世纪开始，欧洲有大批的移民来到美洲。虽然同时期的欧洲开始了科学革命，数学急速发展起来，美洲的移民却胼手胝足，为其生活奋斗，科学及数学的园地自然就像其土地一样，还是一片蛮荒。这种情形一直到十八世纪结束几乎都没有什么改变，1803年哈佛大学的入学考试只考最基本的算术就是一个明证。

十九世纪的前半，在美国流行着两种想法，自然神学（Natural Theology）及培根哲学（Baconian Philosophy），使得科学，虽然不一定是数学，有所进展。自然神学认为人可经由发现自然的规律而沐浴于神的荣耀，确认神的存在。这种想法是清教徒世界观的一部分，当然大大影响了十七、八世纪新大陆的学校，也鼓励了十九世纪的美国从事科学工作。

培根哲学则强调三件事：收集资料；不可能有一以贯之的大道理；科



Nathaniel Bowditch（1773-1838），美国建国后的第一位数学家

学以改善人类福祉为目标。在一片开疆拓土声中，这两种想法使他们发展了天文学、动植物学及地质学，以标定并了解日益扩张的新大陆。

虽然牛顿的传统使得英国在科学革命的初期占有非凡的地位，然而由于英国坚持牛顿笨拙的微积分符号，自外于欧洲大陆的科学发展，十八世纪的数学重心就移往欧洲大陆。虽然自然神学与培根哲学这两种想法都鼓励科学的研究，也不排斥数学，但其想法及大部分移民的来源地英国，却无法提供数学教育的典范。

在这样的情况下，唯一对数学发展有所刺激的是测量及天文。美国是新的地方，需要测量来标定海岸线及内陆各地，需要航海图及航海知识使船舰方便来往。这些工作的科学基础在于天文学及相关的数学。美国独立之后的第一位数学家鲍迪奇（Bowditch, 1773-1838），自己学会了一些数学，写了一本《美洲实用航海》（American Practical Navigator）。后来他将法国数学家拉普拉斯（Laplace, 1749-1827）的巨作《天体力学》(Mé canique Céleste) 译成英文并做评注。从航海到天文学，许多人就是这样由数学的应用朝理论的方向前进了一步。

美国海岸测量处（United States Coast Survey），这个政府机关也在有需求的情况下成立。第三任总统杰弗逊（Jefferson, 1801-1809年在任）请了瑞士的哈斯勒（Hassler）来做处长。哈斯勒强调测量需要有深厚的科学与数学的训练，其后的继任者都能保持这个传统。因此这个机构非但精确地测量了美国的大西洋海岸、墨西哥湾、湾内的水流、海岸的深度等等，而且也让有数学能力的人从事与数学有关

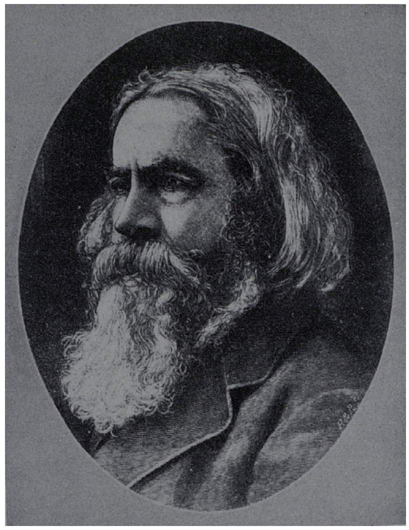
的工作。

另一重要机构是1849年成立的航海历书处（Nautical Almanac）；它需要更多的天文知识，更多的数学计算，也培育了更多的数学人才。此外，十九世纪的美国逐渐走向工业化，具有数学能力的工业人才逐渐受到重视，其需求量也逐渐增加。工业界与政府也都转而关注高等学校中的数学教育。

十七、八世纪的美国教育是深受英国影响的。英国人办教育的目的是要培养绅士与教士。他们当然需要数学，但那是为了心智及逻辑的训练，所以层次不高。1820年以前，在大学所教的数学只有算术、简单的代数、没有证明的欧氏几何学，还有一点点的测量、三角及锥线。而且纵使是较高等的数学，其教法不外就是要学生强记，1830年时，耶鲁大学学生还因不满数学的教法而发生暴动——称为“锥线暴动”。在南北战争之前，很少有学校教微积分，几乎没有学校要求该科为必修。大学的数学只是通识教育的一部分，学生根本没有专攻的可能。

1812年英美发生战争，双方交恶。美国的教育逐渐摆脱英国的模式，各大学各自寻求更富变化的课程，以符合美国立国的民主精神。他们转而引进法国的数学课程与课本，因为大革命（1789）之后，法国人在高等教育上做了重大的改革，数学教育尤其受到重视。在诸大学中哈佛及耶鲁不用说，西点军校之提倡数学教育及模仿法国巴黎高工（Ecole Polytechnique）的课程也非常成功，使得它的毕业生有的成为出色的测量人员、工程人员，有的则到各处新成立的大学推广新的数学课程。这时期的教育改革虽然没有产生一流的数学家，但产生了一些能培养更下一代数学家的数学教师。

到了十九世纪中叶，工业界及政府有了足够的财力，也认识到科学教



哈佛数学教授本杰明•皮尔斯（Benjamin Peirce, 1809-1880）

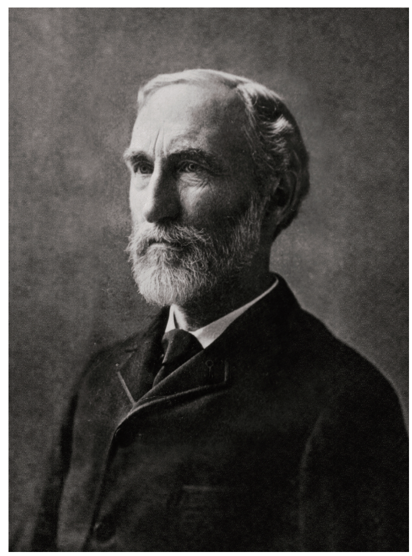
育的重要，纷纷资助各大学充实科学课程与设备，或成立新的、以农工为主的大学，为美国的科学与数学的发展奠下良好的基础。

本杰明•皮尔斯（Benjamin Peirce, 1809-1880）是此转型期的代表人物。他年轻时帮助鲍迪奇校正《天体力学》英译中的评注，使他得以学到法国的数学与物理。1833年升任哈佛大学教授，成为该校数学教育改革的推动者之一。1847年纺织业巨子A. 劳伦斯（A. Lawrence）捐款给哈佛大学，成立Lawrence科学家，由皮尔斯担任物理学数学的教授。皮尔斯曾是美国海岸测量处的处长，也参与航海历书处的研究。他还教出一批未来的学者：包括数学家、天文学家、两位哈佛及一位麻省理工学院的校长，更培育了两位出名的儿子：一位是哈佛大学数学教授詹姆斯•米尔斯（James Mills），另一位是著名的哲学家及逻辑学家查尔斯•桑德斯（Charles Sanders）。1870年，皮尔斯还出版了《线性结合代数》（Linear Associative Algebra）；这是第一部美国本土出产的有水准的纯数学著作，它在1881年开始受到欧洲数学家的重视。

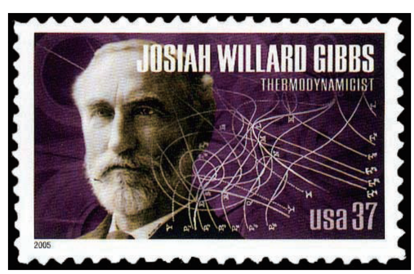
皮尔斯受到的是本土教育，学到的是法国的数学与物理，从事过应用数学的工作，着手过数学教育的改革，培养了优秀的学生，最后使自己进入了世界数学的舞台。他的一生正代表了十九世纪美国的数学发展。

从纯数学的观点来看，皮尔斯还不是世界级的人物。比皮尔斯稍后，十九世纪美国所产生的世界级数学家是吉布斯（J. W. Gibbs, 1839-1903）。他的父亲是耶鲁大学的哲学教授，他本身也从耶鲁得到工程学位，然后前往德国转习数学与物理，回美国后在耶鲁大学教书与研究。1881年他在耶鲁开始讲授向量分析，是公认的向量分析的开山祖师。

1880年代美国开始进入高水平的数学研究，还可以从下面几件事看



吉布斯（J. W. Gibbs, 1839-1903）可能是美国历史上第一位世界级的数学家



出来。1876年，铁路大亨约翰•霍普金斯（Johns Hopkins）创立了以其名为校名，以研究为主导的大学，并从英国请来了世界级的数学家希尔维斯特（Sylvester, 1814-1897）。在1877到1883年的停留期间，希尔维斯特不但教出许多好学生，而且伙同美国的数学界，共同创办了登载原创性论文的《美国数学杂志》（American Journal of Mathematics）。以前也有人试过发行研究性质的数学刊物，但都因素质不良，稿件不全而熬不下去。这份新的刊物，一方面由于希尔维斯特的魅力，一方面也因美国数学界已经有此需要，逐渐成长茁壮，一直到现在都还举足轻重。另一份刊物《数学年报》（Annals of Mathematics）也在1884年由维吉尼亚大学出版。这份刊物几经演变，现由普林斯顿大学出版，是世界数学界顶尖的杂志。

1888年以哥伦比亚大学为中心的纽约数学会成立，扩展迅速，到1894年就变成美国数学会（AMS）这一个全国性的组织。学会发行会刊 Bulletin（1894）、学术杂志 Transactions（1900），举办各种学术活动，出版数学书籍，为美国数学研究的提升注入了组织的力量。学会成立之初的几任会长，不是应用数学家就是学术行政人员。进入了二十世纪后，绝大多数的会长都是学有专精的数学家。这也证明美国在进入二十世纪时，其数学研究环境的树立已大致完成。

1892年，石油大王洛克斐勒捐助的芝加哥大学成立，也是美国数学史上的一件大事。第一任数学系主任R.H. 摩尔（R. H. Moore, 1862-1932）是耶鲁大学的毕业生，他和那一代的许多美国数学家一样，游学过德国，深受当时数学界中心哥廷根大学的世界级数学家克莱因（Klein, 1849-1925）的影响。1893年芝加哥举行世界博览会，芝加哥大学趁机发起国际数学会，从欧洲六国请来数学家与会。克莱因也应邀参加，并在会后假西北大学做了一连串的学术演讲。国际数学会与克莱因的演讲轰动整个美国数学界，芝加哥大学很快就变成美国的数学重镇。摩尔本身的研究非常出色，但更重要的是他教出了许多更出色的学生，其中最有名的是迪克逊（Dickson, 1874-1954，研究数论与群论）、维布伦（Veblen, 1880-1960, 研究几何学）及 G. D. 伯克霍夫（G. D. Birkhoff, 1884-1944，研究分析学）。日后他们分别在芝加哥大学、普林斯顿大学及哈佛大学带动研究，使这三个地方成为二十世纪上半叶美国的数学重镇，而他们本身的研究也是世界级的。美国的数学水准就在他们这一代与欧洲先进国家并驾齐驱，他们的学生也不必再到欧洲游学了。

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

1888年纽约数学会成立，1894年变成美国数学会（AMS）这一个全国性的组织

1930年一个全新构想的研究机构成立了，这是由新泽西州纽瓦克（Newark）地区百货公司巨子班贝格（Bamberger）捐赠成立的，位于普林斯顿大学附近的高级研究所（The Institute for Advanced Study）。最先设立的是数学院，既没有大学部也没有研究所的学生，教授聘请的是世界级的学者，另外每年从世界各地招讲学者来共同讨论与研究。最早的数学院教授有维布伦、摩尔斯（Morse, 1892-1977）、爱因斯坦（1879-1955）、冯•诺依曼（von Neumann, 1903-1957）及外尔（Weyl, 1885-1955）。除维布伦及伯克霍夫的学生摩尔斯外，其它三人都是从欧洲来的，也都是世纪级的学者，都是为了躲避纳粹而来的。纳粹更使许多著名的欧洲数学家纷纷跑到美国的各大学寻求庇护。本身的数学研究已成气候，再加上这一批生力军，美国就在二次世界大战前后，一跃而成为世界数学的超级强国。

作者简介：曹亮吉，台湾作家、数学家，台北市建国中学毕业后进台湾大学数学系读书，芝加哥大学数学博士。1976年始在台大数学系工作，曾任系主任，于2001年退休。多年来以“阿草”为笔名，致力于数学与科普写作。

proposition

学习代数有必要吗？

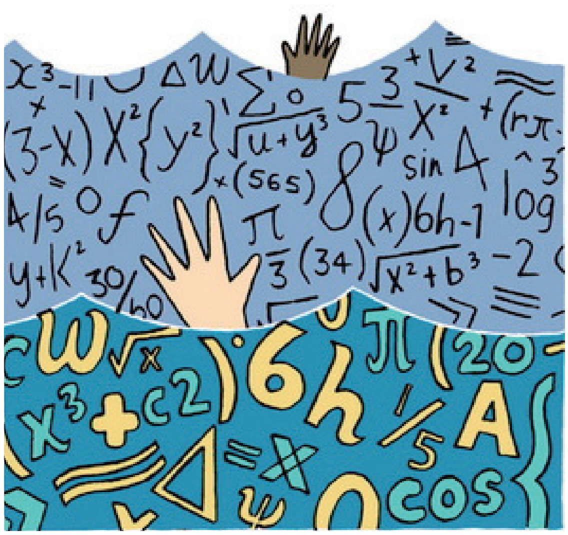
Andrew Hacker / 文　陈亦亭 / 译

在美国的学校，每天约有 600 万名高中生和 200 万名大一新生在与代数作斗争。不管是在高中还是大学，都会有大量学生代数考试不及格。我们为什么要让美国学生受这样的折磨？我发现自己越来越强烈地认为，我们不应该这么做。

我的问题其实超出代数的范畴，在更宽泛的意义上适用于所有常见数学序列，比如几何和微积分。各州教育董事会成员和立法者——还有很多公众——理所当然地认为，每个年轻人都应该掌握多项式函数和参数方程。

有很多观点支持代数及学习代数。乍听之下，多数观点似乎颇为合理；我曾经接受其中不少观点。但我越是分析这些观点，就越是清晰地觉得它们基本上（甚至完全）是错误的——没有得到任何研究或证据的支持，或只是建立在一厢情愿的逻辑基础上。（我说的并不是对“知情公民”和个人理财至关重要的定量分析技能，而是另一码事。）

这场辩论很重要。把数学列为必修课，会阻碍我们发现和培养年轻人才。名义上是培养全面人才，可实际上我们在白白耗尽我们的脑力池。我是以一名在工作中大量使用数字的作家和社会科学家的身份这么说的。我的目的不是为了让学生免于学习一门困难的科目，而是呼吁各方关注我们分配宝贵资源不当所造成的切实问题。



数学造成的危害很早就会显现。让我国感到羞愧的是，四分之一的九年级学生无法完成高中学业。根据去年发布的全国数据，2008-09 学年，南卡罗来纳州（South Carolina）有 34% 的学生辍学，而在内华达州（Nevada），辍学比例达 45%。和我交流过的教育工作者多数把代数列为学习方面的主要原因。

田纳西州的资深教师雪梨 • 巴格韦尔（Shirley Bagwell）警告说，“要求所有学生都掌握代数会导致更多学生辍学”。那些留在学校的学生经常会面临“毕业考试”，此类考试几乎都有代数题目。去年，在俄克拉荷马州，33% 的学生未能通过毕业考试，而在西弗吉尼亚州，这个比例为 35%。

不管家境是富裕还是贫穷，也不管肤色是白是黑，代数对各种背景的学生都是一个麻烦的绊脚石。在新墨西哥州（New Mexico），43% 白人学生的成绩达不到“熟练”，而在田纳西州，这一比例为 39%。即便是在那些资金充足的学校，也有一些很有天赋的学生被代数拖累，更别提微积分和三角学了。

比如，加利福尼亚州的两套大学制度都只考虑那些学过三年数学的学生的入学申请，这种做法将那些可能在艺术或历史等科目上成绩优秀的学生拒之门外。社区大学的学生也面临着同样令人畏惧的数学门槛。一项对两年制学校的研究发现，不到四分之一的入学者通过了必修的代数课考试。

“有的学生三次、四次甚至五次参加这个课程，”阿巴拉契亚州立大学（Appalachian State University）的芭芭拉 • 博纳姆（Barbara Bonham）说。她补充道，尽管有些学生最终通过了考试，但“很多人辍学了”。

另一组辍学数据同样让人气愤。在所有投入高等教育学习的学生中，只有 58% 的人最

终获得学士学位。妨碍毕业的主要因素是：大一数学。在我从 1971 年就开始执教的纽约城市大学，57% 的学生未能通过必修的代数课考试。一份教师报告得出令人沮丧的结论："数学考试不及格对学生能否继续学业的影响，在各年级都大于其他任何学习因素。"一项全国学生成绩单抽样调查发现，数学课出现 F 和 D 的频率是其他科目的两倍。

仅仅考试及格还不够。很多高校试图通过提高数学成绩的门槛来提升自己的地位。因此，它们要求学术能力评估测试（SAT）数学部分的成绩达到 700 分。而 2009 年只有 9% 的男生和 4% 的女生达到此项要求。而且不只是常春藤盟校这么做：在范德堡大学（Vanderbilt University）、赖斯大学（Rice University）和圣路易斯华盛顿大学（Washington University in St. Louis），如果申请人在 SAT 数学部分的成绩低于 700 分，那么他们最好是校友子女或运动员。

没错，芬兰、韩国和加拿大学生的数学考试分数比较好。然而，让他们适合高要求工作的是他们的毅力，而非他们在课堂里学到的代数。

再者，我们在课堂里学的数学，是否和我们工作时需要用到的数量推理有关？这一点也不很明朗。研究数学教育的密歇根州立大学教育心理学家约翰 · P · 史密斯（John P. Smith）发现，"工作场所的数学推理明显不同于学校教的算法。"即便是依赖所谓 STEM 文凭——科学（Science）、技术（Technology）、工程学（Engineering）、数学（Math）——的那些工作，大量培训也发生在受雇之后，包括所需的各类计算。比如，丰田汽车最近选择在密西西比州一个偏远的县建厂，尽管那里的大学远非有名。该公司同附近一所社区学院合作，由该学院开办专门设计的"机床数学"课。

正是这种合作长期支持着德国的学徒计划。我完全同意这样一种观点：高科技知识是维持先进工业经济所需要的。但是，如果我们认为解决办法主要在于学校，那我们就是在自欺欺人。

怀疑论者可能会说，即便我们现有的数学教育让大量学生泄气，但不应该责怪数学本身。数学这个科目难道不是教育的关键组成部分吗？它提供了定量分析工具，锻炼了不可或缺（尤其是在当今高科技时代）的概念能力。实际上，我们听到有人辩称，我们缺少拥有 STEM 文凭的毕业生。

当然，人们应该学习基本的数字技能：小数、比率和估算，打好算术基础。然而，乔治城大学教育与劳动力中心所做的权威分析预计，未来 10 年里，仅有 5% 的新员工需要在代数方面达到精通或以上的水平。如果说我们缺少具备 STEM 文凭的毕业生，那么同样关键的一个问题是，有多少岗位是面向具备这些技能的应聘者的？乔治城大学教育与劳动力中心今年 1 月的一项分析发现，工程专业毕业生有 7.5% 失业，计算机科学专业毕业生有 8.2% 失业。

伊利诺伊大学的彼得 • 布朗恩费尔德（Peter Braunfeld）告诉他的学生们："没有数学，我们的文明就会崩溃。"他说得绝对正确。

代数算法支撑着动画电影、投资策略和机票价格。我们需要有人懂得这些是如何运作的，并在人类社会的各个前沿向前推进。

显然，数量知识在衡量各项公共政策——从《平价医疗法》（Affordable Care Act）到环境监管的成本与效益，再到气候变化的影响方面很有用。很明显，有能力发现并揭示在数字背后起作用的意识形态很有用。我们正快步迈向统计时代，这对"知情公民"提出更高要求。我们所需要的不是教科书里的公式，而是对各种数字的来龙去脉以及它们实际上传达了什么意思有更深入的了解。

那么，有关数学让我们思维更敏锐、让我们无论作为个人还是公民主体在智力上更娴熟的说法呢？的确，数学要求脑力方面的投入。然而，没有证据表明，能证明就会带来更可信的政见或社会分析。

很多艰难完成了传统数学课程的人都觉得，这么做磨灭了他们的个性。这可能（也可能不）说明这样一个事实：一些机构和职业往往只是为了摆出严谨的样子而设置先决条件——这很难成为维持这么多数学要求的合理依据。针对兽医技术员的认证项目要求他们学习代数，尽管我所见过的毕业生中，没有一个曾在诊断和治疗病人时用到代数。像哈佛大学医学院和约翰 • 霍普金斯大学医学院这样的医学院要求所有申请人学过微积分，即便在临床教学大纲中根本没有微积分课程，更别提以后的行医实践了。数学被当成了一个箍、一个徽章、一个用来给局外人留下深刻印象并提升某种职业地位的图腾。

不难理解加州理工学院和麻省理工学院要求所有学生都精通数学。但想弄明白未来的诗人和哲学家为何也要面临很高的数学门槛，就没那么容易了。实际上，一刀切地要求学习代数会扭曲学生群体的构成，未必是件好事。

我想做个乐观的总结。数学——无论是纯数学还是应用数学——都是人类文明（从美学到电子领域）的有机组成部分。但就多数成年人而言，他们对数学在更大程度上是害怕和敬畏，而不是理解。很明显，要求人人学代数，并没有增进我们对数学的欣赏，尽管有人把数学视为一种召唤，称其为"宇宙的诗歌"。（有多少大学毕业生记得"费马猜想"是怎么回事？）

这门学科阻止了许多人取得非凡成就。与其把大量学术精力投入这门学科，我提议我们开始考虑替代科目。那么，各级学校的数学教师都可以创建我所称的"公民统计学"方面的引人入胜的课程。这不会是改头换面后的代数（就像跳级教学大纲里的课程那样），也不会聚焦于学者们在写给同

行看的论文中用到的方程式。相反，它会让学生熟悉那些描述和界定我们的个人与公共生活的各种数字。

比如，这门课可以告诉学生，消费价格指数（Consumer Price Index，简称 CPI）是如何计算的、包含哪些类别以及构成指数的各个类别如何分配权重，然后可以对哪些类别应该被纳入 CPI，它们分别应当获得多大权重开展讨论。

这未必意味着“弱智化”。研究数字的可靠性，可能与几何一样费神。越来越多的大学要求开设“数量推理”课程。事实上，我们应该从幼儿园开始教这门课。

我希望数学教学部门也能开设关于这门学科的历史、理念以及它在早期文化中的应用的课程。何不讲授艺术、音乐，甚至诗歌中蕴含的数学？连同数学在各个科学领域的角色？目的在于将数学当作一门人文学科，让它像雕塑或芭蕾那样容易接近、受人欢迎。如果我们重新思考这门课的构思，消息会散播出去，学习数学的人必定会增加。这只会起到帮助作用。2010 年，有 170 万毕业生被授予学士学位，但获得数学学士学位的只有 15396 人，不足 1%。

从密歇根州到密西西比州，我观察过许多高中和大学课堂。老师的认真教学以及勤奋的学生让我印象深刻。我承认，如果不惜投入资源，我们可以让很多辍学的学生重回校园，帮助他们通过二次方程的考试。然而，那样就误用了老师的授课才能和学生的努力。如果我们减轻（而非增加）年轻人的数学课负担，会好得多。（话说回来，我不提倡让那些被认为不用功的学生上职业学校。认为他们不用功几乎总是不公平的。）

是的，不管他们愿意与否，年轻人都应该学习如何读写，如何做长除法。但是，我们没有理由强迫他们掌握向量夹角和非连续函数。我们把数学当作一块巨石，让大家都使劲推，却不去评估这一切痛苦会带来什么成果。那么，我们为什么要求每个人都学那么多数学，却没有替代课程或例外安排？迄今我还没找到一个令人信服的答案。

摘自《纽约时报》。作者 Andrew Hacker 是纽约城市大学皇后学院的一名政治科学教授。他是《高等教育？大学是如何浪费我们的金钱并让孩子失败的——我们能做什么》一书的联合作者之一。

oppostion

学习代数非常必要！

Evelyn Lamb／文　袁晓明／译

在一期周日的《纽约时报》上，政治学教授 Andrew Hacker 提出“代数学是否有用”这个问题，他的答案是“没用”。事实上，不仅是代数学，还有几何学与微积分学都碰到类似问题。Hacker 并不是认为数学不重要，他是觉得需要用一些“更定量化的技巧”，比如统计学，来取代传统的方法。

很多人已经对 Hacker 的专栏文章做出了回应[1]。我强烈推荐 Rob Knop, Daniel Willingham 和 RiShawn Biddle 等人的文章。

Hacker 的文章有太多值得商榷的地方，以至于我都不

知道从哪说起。Hacker 的第一个主要论点是数学太难了，很多人都因为数学分数太低而无法完成高中或大学的学业。他第二个主要论点是我们学的数学并不是我们工作中需要用到的数学。

的确，对很多学生而言，数学很不容易学好。不过我认为，很多学生学不好数学的主要原因是我们的数学教育质量有问题。事实上，我们很多中小学的数学老师并不是数学专业出身，甚至都没修过数学课程。如果这一现状没有改进的话，那提高数学教学质量只会是一句空话。讽刺的是，一些精通“毫无用处的”代数学或其它更高级别数学知识的人更容易找到比中学数学老师薪水更高的职业。我对那些拥有数学学位却愿意接受低工资和严明纪律来从教的教师非常敬佩，不过这样的人非常少。数学教育的确需要改进，但 Hacker 在文章里的建议却太极端，不分好坏一味排斥。

那么代数学到底是什么？它涵盖的主题很多，不过其最核心的内容是研究问题间的联系。对于有某种联系的两个数量，一个量的变化是如何影响另一个量的变化的？Hacker 觉得我们需要的是算术，而不是代数。可这两者基本上是无法分开的。代数学与几何学（另一个 Hacker 也觉得没用的学科）可以帮助人们提高逻辑思考能力和抽象推理能力。有了这些能力，我们就可以理解为什么加薪 20% 再减薪 20% 后我们挣到的钱会更少（或者先减薪 20% 再加薪 20%——乘法交换律派上用场了！）。有了这些能力，我们还可以算出假定我们有 100 元现金和一张 25% 的优惠券，我们可以买到多少东西。

确实如 Hacker 所说，很少有人在他们的工作中会直接用到一些高深的数学知识。不过，我的工作从来不需要我对《老人与海》有任何了解，但如果因为文学在工作中没用就完全不去涉猎，也不试图去提高自己的欣赏能力的话，那我的生活就不会如此丰富多彩了。上中学时，我不知道（也无法知道）我今后的工作到底与数学、化学、写作或音乐会有什么关系。如果我们只选择那些可以肯定在今后工作里会用到的学科，那我真不知道还有什么课程可以选择。

Hacker 说数学之所以在很多职业上用到，“仅仅是想看上去显得严谨”，就像“一个光环、徽章或图腾”那样受到外界尊重从而让自己显得更专业。事实是不是这样？试想微积分在医生日常就诊中确实用不上，但医学院的学生通过学习微积分而培养出来的解决困难的技巧以及面对难题训练出来的持之以恒的毅力却可以帮助他们更好地理解和处理工作中碰到的大量信息，那他们还会认为数学只是听上去有用吗？

很多对冲基金公司、咨询公司和技术公司都雇佣数学家为他们工作。这些公司并不是因为数学家在雇佣伊始就已经熟知如何平衡投资组合、什么是最优策略以及如何优化用户界面，而是因为他们的数学学位充分说明了他们解决问题的能力和敏锐性。公司很容易教会有扎实数学背景的员工如何解决他们工作中碰到的具体问题，但要教会一个熟悉公司业务方面的员工去解决工作中的具体问题就困难多了。不管你喜欢不喜欢，学生要学习这些解决问题的技巧，第一步就是要学习代数学。

Hacker 也认为数学是重要的。我们日常生活中用到的科学技术都与数学有关。很多职业如今以及今后都需要精通数学的人参与。如果我们在学生早期教育阶段摒弃抽象的数学教育，或者允许年幼的学生自行选择是否参加严谨的数学课程，那么唯一的结果就是进一步扩大擅长数学与不擅长数学的学生之间的差距。数学成绩好的学生在未来职业道路上会比那些逃避数学的学生多很多选择。

如果文盲率上升的话，我们根本就不需要讨论是否将阅读课从课程表中剔除。这个道理对数学课程也一样，尽管数学教育的质量的确需要改进。

[1] http://blogs.scientificamerican.com/observations/2012/07/30/abandoning-algebra-is-not-the-answer/

摘自《科学美国人》。

神奇的模式概率与“鞅”

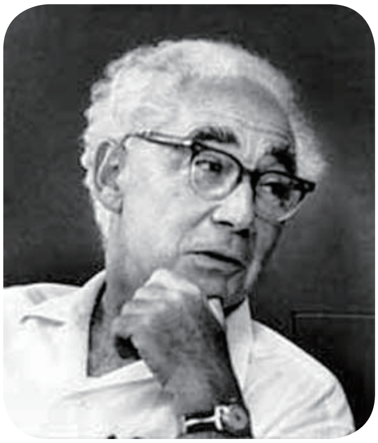
李硕彦

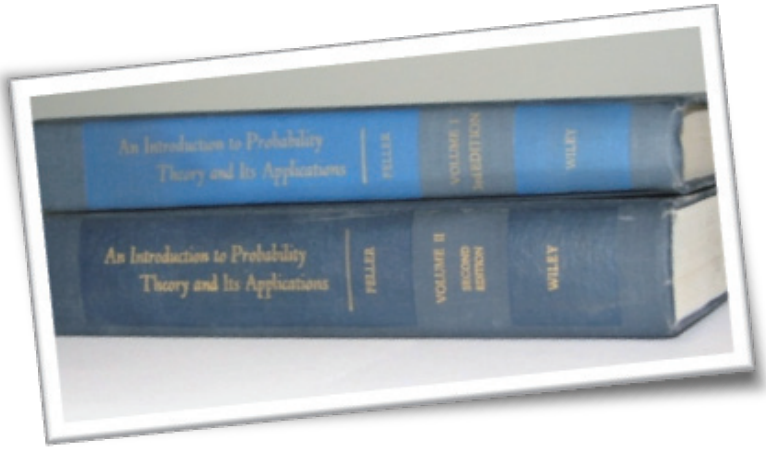
违反直觉的模式概率

William Feller 的经典教科书《概率论及其应用》提到一个试验：重复抛掷一个标准硬币，一直到连续 6 次出现人头。用 H（= Head）代表硬币的人头那面，T（= Tail）代表尾巴，连续出现 6 个 H 所构成的模式就表示为 HHHHHH。抛掷硬币的次数就叫作这个模式的“等待时间”，它是一个随机变量，最小值是 6，最大值无限。Feller 问：这个等待时间的均值有多大？

标准硬币的 H 和 T 出现的概率均等，所有 $2^6 = 64$ 个由 H 和 T 构成的长度为 6 的模式都有相同的机会出现。如果抛掷硬币 64,000,000 次，每一个模式都会出现 1,000,000 次左右。换句话说，平均来讲每掷 64 次就每一个模式都会出现一次。所以我们试着推论：

- 所有 64 个模式的平均等待时间都是 64。





William Feller 生前并没有完成这部上下两册的概率论经典。他死后，学生帮忙作最后的编辑、付印

真的可以这样推论吗？Feller 不放心，于是将这个问题直接当成马尔科夫链，细心地作了冗长的计算，结果是：

- HHHHHH 模式的平均等待时间不是 64，而是 126。

这否定了前面的推论。Feller 又尝试另一个长度为 6 的模式：

- HHTTHH 模式的平均等待时间不是 64，也不是 126，而是 70。

Feller 称自己这些计算的结果“违反直觉”。

真理和童话愉快地吻合，被冷落一旁的是直觉

当科学真理与直觉相违背的时候，问题自然是在直觉那一方。平均来说，每抛掷硬币 64 次，任何一个长度为 6 的模式都会见到一次，这是正确的。用较为严谨的数学语言来说：

- 每一个长度为 6 的模式的平均“刷新时间”都是 64。

刷新时间指的是从这个模式出现到下一次再次出现的时间，它也是一个随机变量。譬如说，抛掷硬币出现了这个序列：

…HTHHTTHHTHHTTTTHTHTTTTHHHHTTHHTTHHH…

其中三个红色的 H 代表 HHTTHH 模式完成的时候。从第一次完成这个模式之后，又掷了硬币 21 次才出现第二次，这时候，刷新时间这个随机变量就取值为 21。之后又掷了 4 次就出现第三次。这回，刷新时间取值为 4。

HHTTHH 模式的刷新时间的最小值是 4，而等待时间的最小值是 6。两个随机变量明显地不同，而等待时间只可能偏大。只要你的直觉将两者区分开来，结论就应该是：

- HHTTHH 模式的平均等待时间 > 64，其他等长模式的平均等待时间 ≥ 64。

Feller 算出 HHTTHH 的平均等待时间为 70，完全没有矛盾。

计算概率的时候，直觉是最重要的，但也是最易引入陷阱的。底下我们再用一个例子来看一般的直觉和科学真理可以相去多远。还是连续抛掷一个标准硬币，看 THTH 和 HTHH 这两个模式之间“哪一个先出现，也就是说，让这两个模式“赛跑”。从平均等待时间来看，THTH 是 20，而 HTHH 是 18。也就是说，THTH 跑得比较慢，HTHH 比较快。那么，

- 这场赛跑的胜算比 (odds) 是不是应该很接近于 9 比 10 呢？

答案是否定的，其实这是一面倒的竞赛，正确的胜算比是 9 比 5。也就是说，双方赢的概率各自是 9/14 和 5/14。看完本文之后，读者就能很容易地算出这个胜算比，当然也能立刻得出 THTH、HTHH、HHHHHH、HHTTHH 的平均等待时间，而且完全不需要马尔科夫链的冗长计算。

在解释这个一面倒的现象之前，还有一点小小的补充：

- 这个一面倒的胜算比是倒向比较慢的那个模式。平均每 14 场赛跑，THTH 赢 9 次，比较快的模式 HTHH 反倒只赢 5 次。

模式的概率就是这么神奇。有些时候，科学的真理乍听之下好像是童话故事。事实上，用童话故事来解释这个胜算比就再简单不过了：参与赛跑的 THTH 模式以 T 开头，代表乌龟（Tortoise）。另一个参赛者 HTHH 以 H 开头，代表野兔（Hare）。童话故事里，龟兔赛跑通常是乌龟胜，当然

也有说是野兔赢的，两种说法的比例大约是 9 比 5。所以真理和童话愉快地吻合了，被冷落一旁的是直觉。当然，这只是文字游戏，不是科学的解释，用来取悦小孩还可以。

参与赛跑的 THTH 模式以 T 开头，代表乌龟（Tortoise）。对手 HTHH 模式以 H 开头，代表野兔（Hare）。乌龟的平均等待时间是 20，而野兔是 18，所以乌龟跑得比较慢，野兔比较快。但是，绝大多数的时候是乌龟跑赢

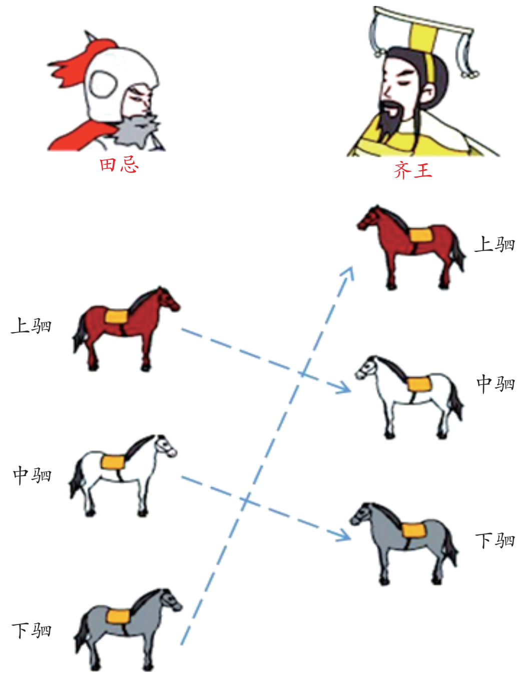
古今中外的田忌赛马

上述受冷落的直觉只是未受过训练的直觉。正确的直觉是什么？底下我们来看一个随机的长序列：

TTHTTHHTTHTHHTTHHHTTTTHTHHTHTTTHTTTTHTHHTHTT
THTHTHTTHTTHTHTHTTTHTHHTHTTTHTHHHHTHHTTHTTTHTHHT
HHTHHTHTTTHTTTTHTTTTTHTHHTHHTHHTHTTTHTHHTHTTT
THTHHTHTTTTHTHHTHHTHTTTHHTHHTHTHTTHTHTHHTHTHTHT
THTHHHHTHTHTTHTTH…

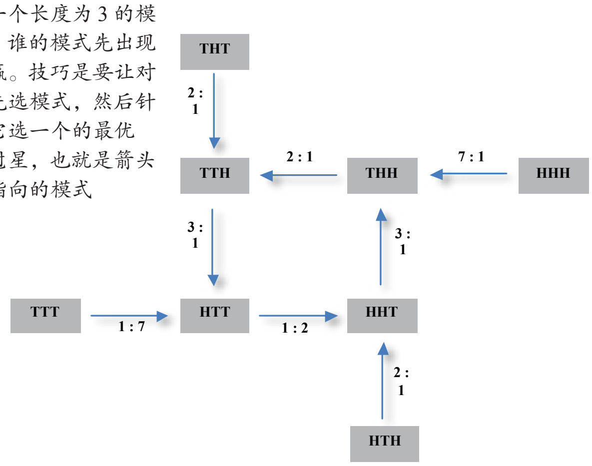
大致上，有十六分之一的字母是绿色的 H，用于表示 THTH 模式完成的时候。有十六分之一是红色的 H，用于表示 HTHH 模式完成的时候。两者的个数大致相等，但是分布的方式不同，有一半的绿 H 其后紧跟着红 H，但是在每一个红 H 之后的 3 个字母绝对不会是绿 H。所以，如果从长序列中随机取一点开始寻找有颜色的 H，第一个碰到的比较可能是绿的。如果用跑马场的语言来说，每次野兔跑赢的时候，都至少要赢一个马身，而乌龟赢的时候有一半是仅赢一个马颈。野兔赢的少，但都是大胜，乌龟赢的多，但常是小胜。合计起来，双方的实力其实相等。

战国时期，齐国的国王总是用赛马来赢公子田忌的钱。有一天，齐王又邀请田忌赛三场马，当时齐王拥有全国第 1、第 3、第 5 快马，而田忌有的是第 2、第 4、第 6。不敢拒绝国王的邀请，但是明摆的又要输三笔钱，田忌实感为难。这时，军事谋略家孙膑是田忌的座上客，他教田忌向齐王建议：加大赌注，然后三赛二胜的一方独赢。齐王欣然同意，等着收取一大笔横财，而且，即使意外地输一场也无妨，等于是买了双保险。比赛当天，田忌祭出孙膑的战略：“以上驷对中驷、中驷对下驷、下驷对上驷”。结果，齐王的上驷先胜一场，然后田忌小胜两场，从此齐王不再当田忌为自动提款机。这就是成语“田忌赛马”的由来。



THTH 常跑赢 HTHH 凭的就是孙膑的小胜多胜战略。1969 年的数学消遣杂志（J. Recreational Math）中，Walter Penney 也提到了掷硬币的赌博：两个人各选一个长度为 3 的模式，谁的模式先出现就赢。技巧是要让对手先选模式，然后针对它选一个的最优的克星。那个年代，美国有一个中学生就将这个游戏理论付诸实践，赢了同学们很多钱。只可惜，他的实践成果太过辉煌，差点被学校开除。

抛掷硬币，两个人各选一个长度为 3 的模式，谁的模式先出现就赢。技巧是要让对手先选模式，然后针对它选一个的最优的尅星，也就是箭头所指向的模式



顺便提一句，这个聪明的学生不是美国华人，更不是孙膑的后人。小胜多胜的直觉可以帮他赢钱，但仍不足以导出概率的公式。下面我们就探讨概率的公式。到目前为止，我们考虑的都是掷标准硬币的随机过程。这是一个“重复实验过程”，简称为“i.i.d. 过程”。这个特殊的 i.i.d. 过程叫作“对称的伯努利过程（symmetric Bernoulli process）”，因为它有下列的两个特性。

- 它是二元的，也就是说，过程中的随机变量只有两个可能的值。
- 它是对称的，也就是说，随机变量的两个值各占一半的概率。

但是，我们底下要计算概率的方式不受限于这两个特殊性，有它们在反而难以突出重点，所以，我们要改掷骰子，一个特殊的骰子。

理想中的公平赌场

将一个普通骰子的 6 面分别标明 a、a、a、b、b、c。这个骰子掷到 a、b、c 的概率就分别是 1/2、1/3、1/6。用数学符号来表达就是：

- $P\{a\} = 1/2$
- $P\{b\} = 1/3$
- $P\{c\} = 1/6$

重复掷这个骰子的随机过程依然是一个 i.i.d. 过程。但它既不是二元的也不是对称的，因为每次掷骰子有多于两种可能的结果，而且，$P\{a\}$、$P\{b\}$、$P\{c\}$ 不相等。

底下用 aba 这个模式为例来描述计算平均等待时间的方法，分为两个步骤。

第一步：计算所谓的“重合系数”ε_1、ε_2、ε_3。

- 拿模式的头 1 个字母与末 1 个字母相比较。如果相同，就令 $\varepsilon_1=1$，否则，$\varepsilon_1=0$。然后拿模式的头 2 个字母与末 2 个字母相比较。如果相同，就令 $\varepsilon_2=1$，否则 $\varepsilon_2=0$。再拿模式的头 3 个字母与末 3 个字母相比较。如果相同，就令 $\varepsilon_3=1$，否则 $\varepsilon_3=0$。
- 就 aba 这个模式而言，$\varepsilon_1=1$、$\varepsilon_2=0$、$\varepsilon_3=1$。

		a	b	a
a	b	a		

	a	b	a
a	b	a	

a	b	a
a	b	a

第二步：用一个繁分式求出答案：

$$\frac{\varepsilon_1+\dfrac{\varepsilon_2+\dfrac{\varepsilon_3}{P\{a\}}}{P\{b\}}}{P\{a\}}=\frac{1+\dfrac{0+\dfrac{1}{1/2}}{1/3}}{1/2}=2+12$$

这个繁分式代表 aba 模式的某种“自相关（autocorrelation）”，可以将它简写为 aba ∗ aba。迟些我们还会将它推广成两个模式之间的“互相关（crosscorrelation）”。

aba 模式的平均等待时间就是 aba ∗ aba。为什么呢？为了要解释这件事，我们需要设计一家特殊的赌场。每个赌客带 \$1 进场，按下列规则压注于 aba 这个模式：

- 骰子第一掷如果是 a，他的 \$1 就变成 $\$2 = \$1 / P\{a\}$ 并且连本带利继续压注；否则变 \$0。
- 骰子第二掷如果是 b，这 \$2 就变成 $\$6 = \$2 / P\{b\}$ 并且连本带利继续压注；否则变 \$0。
- 骰子第三掷如果是 a，这 \$6 就变成 $\$12 = \$6 / P\{a\}$；否则变 \$0。
- 一旦 aba 模式出现，整个赌场的作业就戛然终止。

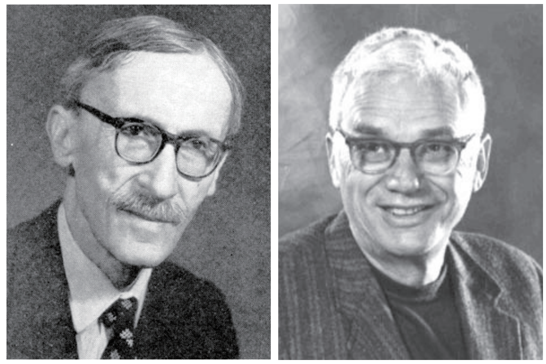
现实世界的赌场都要占赌客的便宜，一般在 5~6%。这里设计的却是个“公平赌场”，它与赌客公平对赌。

赌博团队带来的直觉

假设赌客们都同属一个团队，每掷一次骰子之前，就派一个人进场。那么，不论骰子掷出什么结果，最后整个团队台面上的钱一定是 \$14，包括最后一个队员的 \$2 和倒数第 3 个队员的 \$12。

	队员甲	队员乙	队员丙	队员丁	队员戊	队员己	队员庚
	$1						
掷出 a							
	$2	$1					
掷出 a							
	X	$2	$1				
掷出 b							
		$6	X	$1			
掷出 c							
		X		X	$1		
掷出 a							
					$2	$1	
掷出 b							
					$6	X	$1
掷出 a							
结果					$12		$2

在 7 个队员入场之后，骰子分别掷出 a、a、b、c、a、b、a。每一个人的金额的变化过程如表所列。任何情况下，aba 模式的等待时间这个随机变量，就等于入场的人数，也等于赌博团队带进场的本钱。经由鞅终止定理，就知道它的均值正好是赌博终止时台面上的 $14



左：Paul Levy 将"鞅"这个名词定义成一种随机过程，用来形容公平赌博；右：Joseph Doob 写下了严谨的"鞅终止定理"

因为是个公平赌场，所以团队净赢的金额平均为 $0。也就是说，团队带进场的本钱的均值就等于赌博终止时台面上的 $14 = $2 + $12。请注意：团队的本钱、进场的人数、aba 模式的等待时间都是同一个随机变量。结论是：

aba 模式的平均等待时间
= 2 + 12
= 上述的繁分式
= aba ∗ aba

更进一步说，繁分式里面的重合系数 $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$ 意指倒数第 1 和第 3 个队员是赢家，最后分别有 $2 和 $12。$\varepsilon_2 = 0$ 意指倒数第 2 个队员最终是输家。

以上"赌博团队"的计算技巧，建立于一个直觉之上：

- 在公平赌场净赢的金额平均为 0。

这个直觉，在概率论里面叫做"鞅终止定理（Martingale Stopping Theorem）"。鞅（martingale）是中古时期法国的一种竞赛。18 世纪时，经由赌博而联系到概率。20 世纪早期，Paul Levy 将这个名词定义成一种随机过程，用来形容公平赌博。鞅的观念和鞅终止定理在数学上用途很广。鞅终止定理虽属直观，但是数学上需要一些零碎的条件来保证"收敛性"，将这些充分条件简洁地陈述出来也是重要的工作。后来，Joseph Doob 写下了严谨的鞅终止定理。

最一般性的公式

接下来，我们要考虑一个很宽泛的问题。重复任何一个实验，实验的可能结果的个数不受限制。概率的分布也不受限制，可以是非对称的。任给 n 个模式 A_1、A_2、⋯、A_n，让这 n 个模式赛跑，它们胜出的概率分别用 p_1、p_2、⋯、p_n 来代示。各个模式的长度不受限制，而且可以各自不同。重复实验直至有一个胜者跑出，以随机变量 N 代表实验的次数，它的均值就写作 EN。我们自然地问：

- $EN = ?\ \ p_1 = ?\ \ p_2 = ?\ \cdots\ p_n = ?$

这里可以假设参赛的任何一个模式不会是另一模式的一截，否则可以剔除后者而不影响结果。

这看似宽泛而艰难的问题，却有一个极简单的答案。首先，定义模式与模式之间的一个算子（operator），以"∗"这个符号表示，用来描述两个模式之间的某种互相关或者单一模式的自相关。譬如说掷骰子产生的 aba 模式的自相关就写成 aba ∗ aba = 14。又譬如说，第一个模式是掷骰子产生的 bcaca，第二个是 acab，两者之间的互相关就定义为以下的繁分式：

$$\text{bcaca}*\text{acab}=\cfrac{\varepsilon_1+\cfrac{\varepsilon_2+\cfrac{\varepsilon_3+\cfrac{\varepsilon_4}{\mathrm{P}\{\mathrm{b}\}}}{\mathrm{P}\{\mathrm{a}\}}}{\mathrm{P}\{\mathrm{c}\}}}{\mathrm{P}\{\mathrm{a}\}}=\cfrac{1+\cfrac{0+\cfrac{1+\cfrac{0}{1/3}}{1/2}}{1/6}}{1/2}=2+24$$

其中重合系数 $\varepsilon_1 = 1$，因为 bcaca 末 1 个字母与 acab 的头 1 个字母相吻合。$\varepsilon_2 = 0$，因为 bcaca 末 2 个字母与 acab 的头 2 个字母不吻合。其余类推。

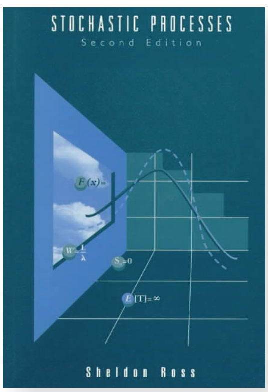
有了 ∗ 这个算子，就可以导出 n+1 个联立一次方程式来解出 EN、p_1、p_2、⋯、p_n 这 n+1 个未知数，写成矩阵形式，就是：

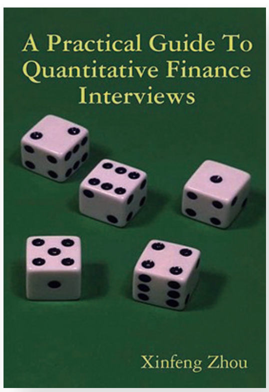
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & A_1*A_1 & A_2*A_1 & \cdots & A_n*A_1 \\ -1 & A_1*A_2 & A_2*A_2 & \cdots & A_n*A_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & A_1*A_n & A_2*A_n & \cdots & A_n*A_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} EN \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

这个方程式的证明过程不是很难。当 $n=1$，这个方程式就算出模式 A_1 的平均等待时间为 $A_1 * A_1$。当 $n=2$，这个方程式就算出模式 A_1 对 A_2 的胜算比，同时也算出 A_1 与 A_2 之间的胜者的平均等待时间。

愈是一般性的数学理论，愈是简洁清楚

本文中的数学内容，包括上述的的龟兔赛跑、公平赌场、赌博团队的计算技巧、矩阵方程式，皆取材自概率年鉴（The Annals of Probability）1980 年刊登的一篇拙作，大家简称它为“模式鞅论文（Martingale of patterns paper）”。各类文献也从该文节录类似的内容，包括 Sheldon Ross 的教科书：“Stochastic Processes”、Xinfeng Zhou 的参考书：“A Practical Guide To Quantitative Finance Interviews”，以及“数学与工程的对话”第 5 讲：Martingale of Patterns。模式鞅在数学与工程之间架起一座小桥，它可以用于基因工程、无线 Ad Hoc 网络、财经工程、信息安全等领域，也可以简化“随机行走”的计算，读者可参阅上述诸文献，皆包括于右列参考资料。





除了上述计算 HHHHHH 和 HHTTHH 的平均等待时间，Feller 也考虑过二元但非对称的概率。假设 P{H} = p，P{T} = q =1 – p，让两个模式赛跑，一边是连续 m 个 H，另一边是连续 n 个 T。Feller 花了功夫算出 m 个 H 跑赢的概率是：

$$\frac{p^{m-1}-p^{m-1}q^{n}}{p^{m-1}+q^{n-1}-p^{m-1}q^{n-1}}$$

另外，1974 年《科学美国人》杂志的“数学游戏”专栏发表了 John Conway 的结果：在抛掷标准硬币的时候，也就是二元且对称的情况下，拿 A、B 两个模式之间的重合系数串成一个二元整数 binary($\varepsilon_k\cdots\varepsilon_2\varepsilon_1$)，以 $L(A, B)$ 代表。如此，$L(A, A)$ 就会是 A 模式平均等待时间的一半，同时 A、B 两个模式赛跑的胜算比就是：

$$[L(A, A) - L(A, B)] : [L(B, B) - L(B, A)]$$

据说用了长达十数页的证明。

上述矩阵方程式是最一般性的公式，非常简洁而证明也直观，相比之下，各种极其特殊的情况给出的公式看起来反而不是那么透明。数学里头，愈是一般性的理论往往愈是简洁清楚，关键是要从新的角度来看问题。最有趣的新角度往往来自原本不相关的数学观念。

不止数学本身如此，数学在工程上的应用也常是如此。直觉上，能用于工程的数学总该包含一些计量的工具，譬如坐标、函数、向量、微分、积分等等。可是愈来愈多不需要数字的数学也和工程对起话来。愈是反直觉的搭档，其效果往往就愈神奇。

参考资料

1. J. L. Doob, Stochastic Processes, Wiley, New York, 1953.
2. M. Gardner, “Mathematical Games,” Scientific American, vol. 10, page 120-125, 1974.
3. W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1 and 2, Wiley, New York, 1966.
4. S.-Y. R. Li, ““A Martingale Approach to the Study of Occurrence of Sequence Patterns in Repeated Experiments,” The Annals of Probability, Vol. 8, No. 6, 1980.
5. S.-Y. R. Li, “数学与工程的对话，第 5 讲：Martingale of Patterns,” http://www.ie.cuhk.edu.hk/people/A_Dialogue_between_Math_and_Engineering1_016.zip, 2009.
6. W. Penney, “Problem: Penney-ante,” Journal of Recreational Mathematics, Vol. 2, Page 241, 1969.
7. S. Ross, Stochastic processes, 2nd Edition, John Wiley & Sons, New York, 1996.
8. X. Zhou, A Practical Guide To Quantitative Finance Interviews, Morrisville, 2008.

作者简介：李硕彦，英文名简称 Bob Li，香港中文大学信息工程学系讲座教授，台大数学学士、加州伯克利大学数学博士，网络编码理论创建人之一。因对博弈论的理论贡献，曾被电影《21 点》原型团队邀请参与其冒险赌博行为。

微博上的数学漫游（连载二）

歌之忆 http://weibo.com/wildmath

我们继续从笛卡尔出发的微博上的数学漫游。这些文字的中心话题是人、是与数学相关的那些有故事的人。由短短的微博连缀起来的漫游，大多是连贯的，间或有些跳跃。它近乎于随机走动，间或又有点勒维飞行的味道，但故事的焦点始终是数学家的逸事。正如建筑并不是砖头的堆砌，数学也并非只是一堆逻辑上正确的定理的堆积。想想那些创造了数学的人们，纵然不乏稀世之才，却又都是血肉之躯。在历史洪流的宏大叙事之外，品味精彩各异的数学家群体或个体，欣赏那些坎坷曲折的人生阅历与极富理趣的数学成就如影随形的景观，或许也是数学文化的独特魅力？

哈代 Hardy

哈代（G. H. Hardy, 1877-1947）

维纳在《我是一个数学家》中曾写到，佩利（Paley）对其导师里特尔伍德（Littlewood）佩服得五体投地。而里特尔伍德的许多论文是与哈代联合发表的。大学者中的“瑜亮之争”屡见不鲜，但这两位大师率先确立了论文按照姓氏字母顺序署名的游戏规则，为数学家的合作确立了良好的职业形象。省去无尽烦恼，免掉凡俗龌龊。

哈代与里特尔伍德的合作，足以令世人羡艳。丹麦数学家哈拉德•玻尔公开了这两人之间的四条“合作公理”：1、一人给另一人写信，内容正确与否无所谓。2、一人收到对方来信，读不读无所谓；3、两人是否同时想到同样深入的细节，无所谓。4、共同署名的论文中，哪怕有一人无丝毫贡献，也无所谓。

数学家玻尔曾不无妒意地说：亘古未有的这么四条烂公理，居然成就了世界上最重要、最和谐的合作！两位旗

鼓相当的高手，经年累月如切、如磋、如琢、如磨地研究学问，任何“公理”对这两位钻石王老五的合作，都十分多余。若是两个水平不济的家伙，用再完善的公理，也合作不出成果。

里特尔伍德爱好攀岩和滑雪，练就了极好的体格，再加天性幽默，一直活到 92 岁。他 70 多岁还写出了 100 页的硬分析巨作，其人生的最后一篇论文发表在 87 岁之高龄。货真价实的英国皇家学院院士，羞煞多少自命不凡之士！《数学札记》充斥了他的幽默，比如：一个精彩的数学笑话，胜过一堆烂文章。

幽默是人类智慧的化身——不分专业领域。热爱舞蹈的法国音乐家圣 - 桑，在写《动物狂欢节》时，故意把奥芬巴赫歌剧中的康康舞曲变慢来描述貌似庄重的乌龟。他还曾拉着柴可夫斯基，分别扮演伽拉特亚与皮格马利翁，让鲁宾斯坦伴奏，在莫斯科音乐学院共舞起一曲《皮格马利翁和伽拉特亚》。

高斯（C. F. Gauss, 1777-1855）

希腊神话中的塞浦路斯国王皮格马利翁，倾注全部热情和心血，将一副象牙雕刻成美伦美焕的少女伽拉特亚。他对伽拉特亚如痴如醉，令爱神阿芙洛狄特感动不已，随即赋雕像以生命，成就俩人的佳缘。其实，每一个倾注心血、专注于事业的实干家，都是痴情的皮格马利翁，都应该得到美好的人生。

虽说皮格马利翁最终还是将那位背叛爱情的伽拉特亚还原为雕像，不过心理学家罗森塔尔却看到了积极的内涵。他在一所小学随机抽出一批学生，对校长坚称这些人才华出众。而这些孩子受到激励后，果然突飞猛进。赞美带来强大的心理暗示，驱动人去奋斗。成功的学术团队，需要“皮格马利翁效应”的驱动。

或许数学最有意味之处，是追逐数学的人习惯于对完美有极致的追求。当完美走向极端，往往就是对自己或他人的苛责。从这个意义讲，数学家尤其需要皮格马利翁效应的激励。当阿贝尔把手稿寄给高斯的时候，当拉玛努金把手稿寄给剑桥的贝克和霍布森的时候，期待的是一份肯定，等来的却是漠视。

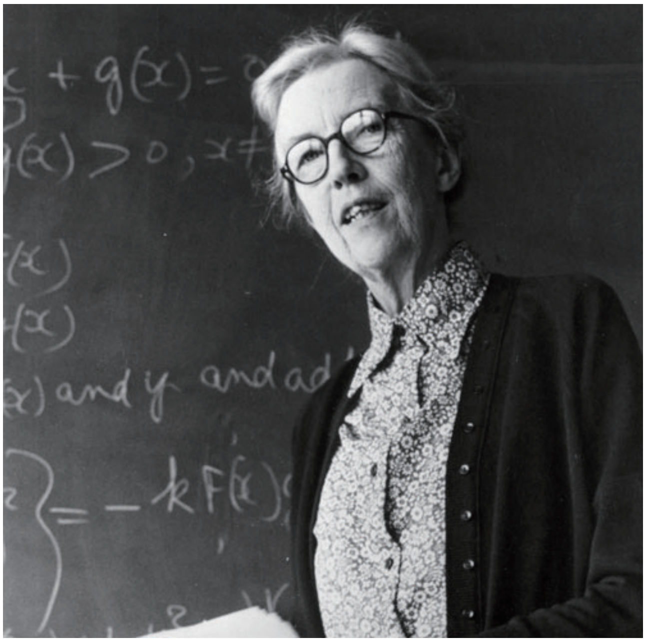
高高在上的高斯把天才阿贝尔冷落在一旁。但与贝克和霍布森同在剑桥大学的哈代，在收到拉玛努金的手稿之后，毫不掩饰地高度赞扬——“一个具有最高品质的数学家、一位具有举世无双的富有独创性的智者”。任何一个默默无闻的稀世天才，一旦得到这样的赞誉，其积蓄的能量一定会彻底爆发。

阿贝尔（N. H. Abel, 1802-1827）

哈代宽厚的待人之道、尤其是对待小人物的爱和同情心，令无数人为之动容。曾经在牛津念数学的灰姑娘卡特莱特（Cartwright），数学课程难以为继，甚至想转行改读历史，却在一次聚会上邂逅时在牛津教书的哈代，聆听指教后数学水平大为改观。毕业后事业一帆风顺，若干年后，回来继续追随哈代攻读博士学位。

当哈代看到卡特莱特在数学推导中显而易见的错误时，不是斥责，而是不紧不慢地说："我们再来想想看。其实，只要遇到难关，总会有解决之道"。这位当初在数学上并不算出类拔萃的灰姑娘，最终被哈代培养成皇家学院第一位女数学院士、伦敦数学会会长，赢得包括 Sylvester 奖等众多荣誉。

卡特莱特 Cartwright



卡特莱特（Mary Cartwright, 1900-1998）

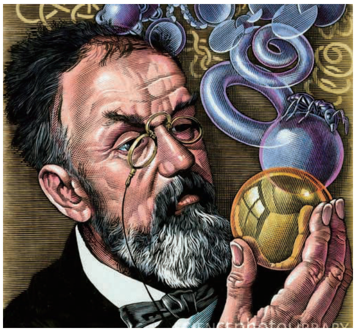
图灵破译密码可谓二战的数学奇葩，但卡特莱特立下的汗马功劳却鲜为人知。当时英军的雷达放大器在推到高功率时总是发生故障。卡特莱特分析出，罪魁祸首是放大器的微分方程的解在高功率时出现的混沌。战后，她与里特尔伍德就此发表了先驱性论文。20 年之后，才出现了洛伦兹混沌。

卡特莱特与里特尔伍德合作对雷达故障进行的研究——受迫 van der Pol 方程的解，成功地应用了庞加莱的动力系统拓扑学。从战争结束的 1945 年开始，她和里特尔伍德发表了若干篇论文，如今已成混沌学的经典文献之一。

飞临亚马逊河的一只蝴蝶，可能会引起一场沙漠风暴。在混沌大热之时，大物理学家 Dyson 呼吁关注卡特莱特的贡献，但她却申明不需要那份荣耀。她的自尊宛如简 • 爱："她不久就要超脱于尘世风雨之外了，精神已挣扎着要脱离它物质的居所，而当它终于解脱出来之后，将会飞到哪里去呢？"

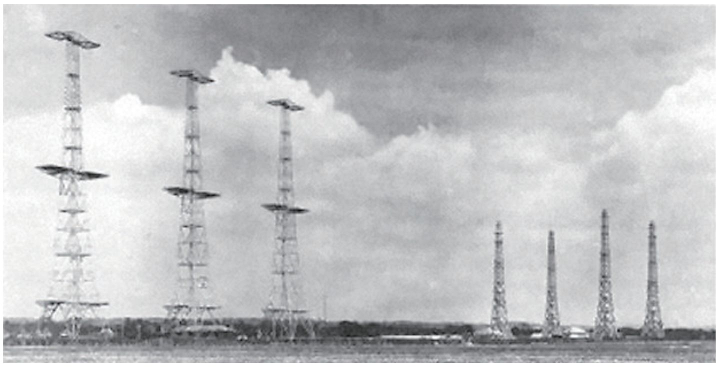
卡特莱特这只蝴蝶没有掀起混沌的热潮，就像朱利亚没有掀起分形的狂热。计算机时代改变了数学的形象：洛伦兹秀出了他的奇怪吸引子，孟德尔布罗特也潇洒地画出了分形。如今，用不了几十行程序，我们就可重复洛伦兹或孟德尔布罗特的漂亮图形，但有多少人在思考卡特莱特与朱利亚那深邃的智慧？

英国分析学派



法国数学家庞加莱(Henri Poincaré, 1854-1912)

回想我们说过的数学家朱利亚、Helly和拉都，都是第一次世界大战的下级军官。对那段历史，历史学家斯特隆伯格哀叹：伤亡最惨重的是受过良好教育的下级军官。他们当中，有的人才智可能超过了乔伊斯、爱因斯坦或爱略特，只是因为战场捐躯，而没有写出《尤利西斯》和《荒原》，也没有提出相对论！



二战期间英国的雷达

如果说第一次世界大战对数学的发展是一场浩劫，那么第二次世界大战，却史无前例地开启了人类数学化战争之先河。柯尔莫哥洛夫、图灵、维纳，伟大的数学天才们为终结法西斯的罪恶，奉献出令世人无限敬仰的智慧和才华。这场战争中涌现出卡特莱特那样的巾帼数学英雄，同样令人钦佩。

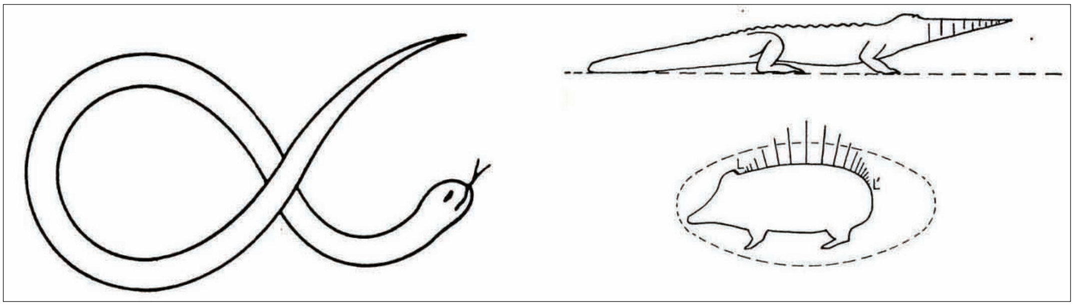
太阳、地球、月亮，构筑起大自然最富诗情画意的景观，不仅孕育了牛顿力学，也把庞加莱带到解决三体问题的极度抽象的拓扑世界。庞加莱在第一次世界大战前去世，而他那些高深的数学，却在第二次世界大战中，由于英国的雷达而被卡特莱特和里特尔伍德应用。世界上还有什么比数学更有生命力？

哈代和里特尔伍德在剑桥大学三一学院

从二体问题的简洁生动，到三体问题的困难重重、以至孕育出庞加莱的动力系统拓扑学，大自然最浪漫的诗意，却要通过最深刻的数学来领悟。面对这样心驰神往的美，哈代说：丑陋的数学没有存在的地盘。但世界上真正能鉴赏数学美的人却不多，或许这才是哈代与里特尔伍德惺惺相惜的原因？

里特尔伍德与哈代的成功合作，建立在四个“无所谓”公理之上。可他与卡特莱特，却互相从不到对方的办公室去谈事，也从没在黑板上做过计算。更有甚者，他还把一些双方的合作论文交由卡特莱特独立署名发表。某次他收到卡特莱特的一个错误证明，竟然意味深长地画了一条蛇作为回复。

里特尔伍德是个天性不羁的高手，颇有金庸笔下的老顽童周伯通的风范。老顽童与蛇有仇，但里特尔伍德对卡特莱特手稿中的论证心生不满，却别出心裁地画了条蛇来讲数学上的道理。若你读他的《数学札记》，专门有一章就叫“动物园”，蛇、鳄鱼和猪，全部被他当作数学论证的直观材料。



里特尔伍德《数学礼记》插图

老顽童周伯通一生纠结那位暗度陈仓还结出果实的瑛姑。而里特尔伍德也曾命犯桃花、闹出绯闻。不过这丝毫没有损伤他对自身学术生命的极度珍惜，他牢牢守住了学者的 reputation（名声）。他曾把自己的手稿交给合作者卡特莱特拿去独自发表，不许署他的大名，最终这两人只有区区数篇合作论文。

若将里特尔伍德比作老顽童，那么开创了剑桥分析学派的哈代便算是开创全真教的“天下五绝”之首王重阳。剑桥具有悠久的数学物理传统，但身在微积分和力学的发祥地，哈代却敏锐地看出了英国在分析数学的严密性上与欧洲大陆的巨大差距。1908 年，他以一部《纯数学教程》开启了打造人才之路。

哈代与里特尔伍德没有白费心血。小将佩利在 24 岁时，与里特尔伍德合作发表了 4 页纸的短文，开创了现代分析数学中的重量级武器：Littlewood-Paley 分解。内中的奥妙是在分析函数时，将其分解到一串类似于音乐里的八度音程上来研判。这种数学思想暗合了音律，是现代分析的关键技巧之一。

69 年前，26 岁的佩利滑雪遇难，可他已是数学上的成名英雄了。而拉玛努金，26 岁才迈进剑桥，当时他连柯西积分都不懂。哈代曾这样说：如果拉玛努金是在 16 岁而不是 26 岁就能见到现代的理论和方法，他的一生会是什么样？他由衷地佩服这位与西方世代积累的智慧孤独地抗争的印度人。

哈代如此爱才，却无法想象这位印度人与剑桥三一学院有如此不解

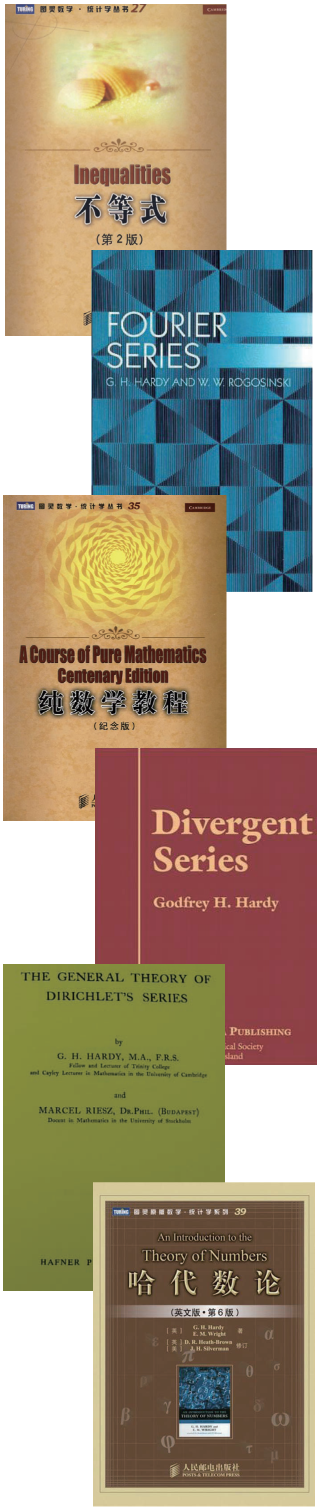
之缘：他感叹拉玛努金为何直到 26 岁才能来剑桥重启人生。他从未想到已踏入一流数学家行列的佩利，竟会年仅 26 岁就被死神夺去生命。26 岁是最灿烂的年华，26 岁时的农家子弟牛顿已是三一学院的卢卡斯数学教授了。

一个牛顿足以让三一学院独步天下，但也正是因为牛顿开创的物理充斥了实验精神，反而使英国的数学发展迅疾走向应用化的轨道。而自法国的柯西以来，欧洲大陆的分析数学走向严密化，复分析等领域成果不断，却都被英国一概漠视。19 世纪末，巴黎高工约当（Jourdan）的分析教程深深触动了哈代。

哈代以极其雅正的文笔，为英国写出第一本严格的数学分析教程，彻底改变了英国分析的面貌，影响了几代分析数学家。二十世纪电子信息最伟大的理论开创者之一的维纳，曾经跟随哈代完善了分析数学的训练。将处于落后地位的英国带上分析数学的巅峰，成就一代人的伟业，哈代功莫大焉。

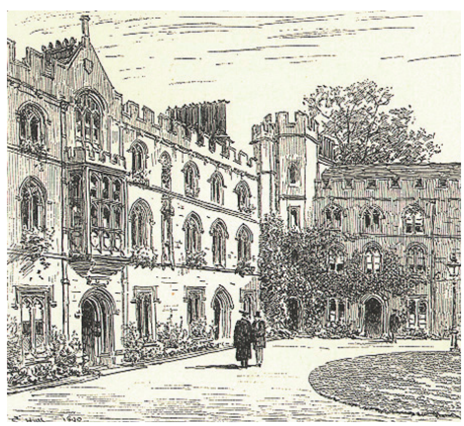
哈代生活在每个人的日常生活中。当你使用手机或 GPS 的时候，接收机会按照 I- 路和 Q- 路来接收射频信号，正是由上半平面解析函数构成的哈代空间，以及对应的解析函数边值理论，为这些技术提供了极为漂亮的数学框架。这与 Paley-Wiener 理论一样，把电子信息技术与优美而深刻的分析数学联系在了一起。

令人神往的英国分析学派，为后世留下巨大的精神遗产。而哈代和里特尔伍德亲密无间的合作，则是这个学派伟大的精神象征。哈代 - 里特尔伍德讨论班，曾经培育出无数杰出的人才——卡特莱特、佩利是我们数度提起的杰出干将，拉玛努金是人世间的一个传奇。回望历史，令人无限感慨。



哈代的部分著作

迄今已经诞生了三十多位诺贝尔奖得主的剑桥大学三一学院，无疑是思想者的天堂——它不仅出产了牛顿、迪拉克和霍金，还出产了诗人拜伦和哲学家罗素、维特根斯坦。而哈代和里特尔伍德联手打造出的学术丰碑，会使人永远铭记、感恩，更会阐发无穷的思索：究竟依靠什么才能打造出一个学派？


剑桥大学三一学院

里特尔伍德说过一个故事：曾有一位数学名家访问剑桥却刻意回避见他，令他大为困惑。事后才闻此君解释：里特尔伍德的时间都花在学生身上了，我不去打扰他的工作！此君乃芝加哥分析学派的开山大师 Zygmund。把心事花在学生身上，这才是成就伟大学派的真正原因吧？

比起 Helly 把学土木工程的拉都（Radó）调教成数学家的传奇，更精彩的是目睹过剑桥大师风采的 Zygmund。1948 年他在阿根廷讲学，把一位才华横溢的青年带回芝加哥大学攻读博士学位。那又是一位学土木工程的年轻人，他仅仅用了一年时间就拿到博士学位。之后师徒携手，打造出威名远扬的芝加哥分析学派。

肖德尔 Schauder

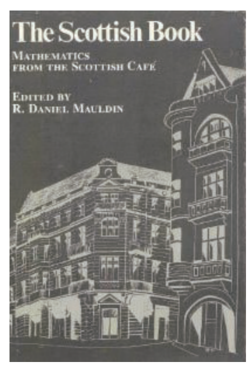
肖德尔（Juliusz Schauder, 1899-1943）

Zygmund 受教于波兰。那是一个小国、却又是一个科学与文化的大国。那里有开启了现代科学之门的哥白尼、有两获诺贝尔奖的居里夫人，肖邦是那个民族走遍天下的文化护照。奥斯威辛集中营和卡廷大屠杀记录了这个民族的苦难与不屈。在残酷的第二次世界大战期间，波兰没有出现过靖绥政府。

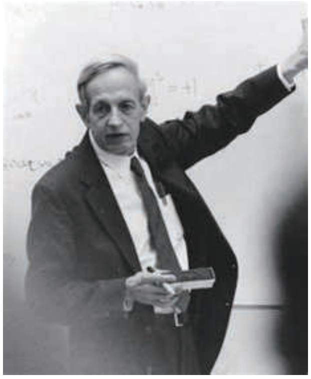
提起波兰的数学，无数人津津乐道于利沃夫大学旁著名的苏格兰咖啡馆。那是数学家的大本营，巴拿赫（Banach）带着一群数学天才在此通宵达旦地神聊数学。这里讨论的问题，最终被整理成了《来自苏格兰咖啡馆的数学问题集》。咖啡馆的常客、后来参与原子弹研制的乌拉姆（Ulam），深情地回忆了那激动人心的岁月。

经常光顾苏格兰咖啡馆的，有位犹太数学家肖德尔（Juliusz Schauder, 1899-1943）。比如你坐在热气球上游览南京，把手中的南京地图揉成一团、扔出热气球，地图上必有一点和它的垂直下方地理位置正好对应——这是荷兰数学家布劳威（Brauwer）的不动点原理。肖德尔把它发展到无穷维空间成为研究偏微分方程的利器：肖德尔不动点原理。

波兰的苏格兰咖啡馆



苏格兰咖啡馆数学问题集



美国数学家、诺贝尔经济学奖得主纳什（John Nash, 1928-）

肖德尔的方法，随后被《美丽心灵》的原型纳什（John Nash, 1928-）发展去解决更复杂的偏微分方程。不料纳什写完论文后，发现意大利的 de Giorgi 刚刚发表了类似结果。多年后获得了诺贝尔经济学奖的纳什，依旧郁闷地感慨：如果当年他或 de Giorgi 有一方失败，那剩下的人或可得到菲尔兹奖。看得出他对此十分在意。

围绕在巴拿赫周围的青年才俊马祖尔（Mazur）、乌拉姆和卡茨（Kac）们，成就了波兰利沃夫数学的黄金时光。他们之中已经作出杰出成绩的肖德尔，仅仅是个中学教师，后来才进入利沃夫大学做助教。堂堂一个数学系到 1937 年，却总共只有 Zylinski、史坦因豪斯（Steinhaus）与巴拿赫三个教授，外加包括 Schauder 在内的 5 个助手。

1899 年生于利沃夫的肖德尔，二战前夕就已经在拓扑学、泛函分析、偏微分方程与数学物理四大领域作出了出色的成绩。二战中的利沃夫先是被苏联占领，后又被纳粹德国侵占。此时的犹太数学家肖德尔，没有离开故乡，他躲在暗室继续研究数学。而且每周都秘密地去找马祖尔教授等人谈数学。

1943 年，在纳粹占领下的利沃夫街头，肖德尔遇到曾经教过的一位学生，央求学生帮他弄个假身份证，好混到华沙去见妻子。学生苦苦相劝——你这一幅犹太人的长相，到哪都会被纳粹认出！但肖德尔极度思念藏在华沙的妻女。此景此情让学生感动不已，学生通过地下组织为他办了一套假身份证。

意大利数学家（Ennio de Giorgi, 1928-1996）

以利沃夫大屠杀为背景的波兰电影《黑暗弥漫》

拿到了假身份证的数学家肖德尔，本该直接动身去华沙，却在临行前对营救者说：我最后还有一个要求——找个地方洗个澡，我好干净地去见妻子。抵抗组织找到了一个僻静的浴室。然而，就在去洗澡的路上，他被盖世太保抓到集中营。1943 年 10 月，在转移囚犯途中，肖德尔奋力逃跑，被纳粹开枪打死。

2012 年，反映南京大屠杀的《金陵十三钗》与反映波兰利沃夫屠城的《黑暗弥漫》同闯第 84 届奥斯卡最佳外语片。波兰女导演阿格涅丝卡 • 霍兰的作品入围 9 强。她的《黑暗弥漫》中犹太人躲避在利沃夫下水道的惨景，让人分外痛惜——肖德尔的妻子就是从华沙被营救到利沃夫的下水道避难，却最终死于纳粹毒手。

二战中的利沃夫 12 万犹太人被纳粹灭绝殆尽。今天，当你读到以 Auerbach、Saks、Schauder、Kolodziejczyk、Lomnicki、Bartel、Stozek, Ruziewicz、Lindenbaum、Kerner、Schreier、Wojdyslawski 等人命名的数学定理时，请记住——数学定理并非冰冷的逻辑，他们是数学家永恒的热血与生命。

巴拿赫 Banach

巴拿赫（Stefan Banach, 1892-1945）

坐镇利沃夫学派的是巴拿赫。1983 年在华沙召开的世界数学家大会期间，一群外国数学家听闻附近有条巴拿赫大街，欣喜地要去照相留念。临了一看，却见一块巨大的空地。前来探胜的人感慨：这哪里是巴拿赫大街呀！这分明就是巴拿赫空间！华沙的巴拿赫大街，就是华沙大学数学系所在地。

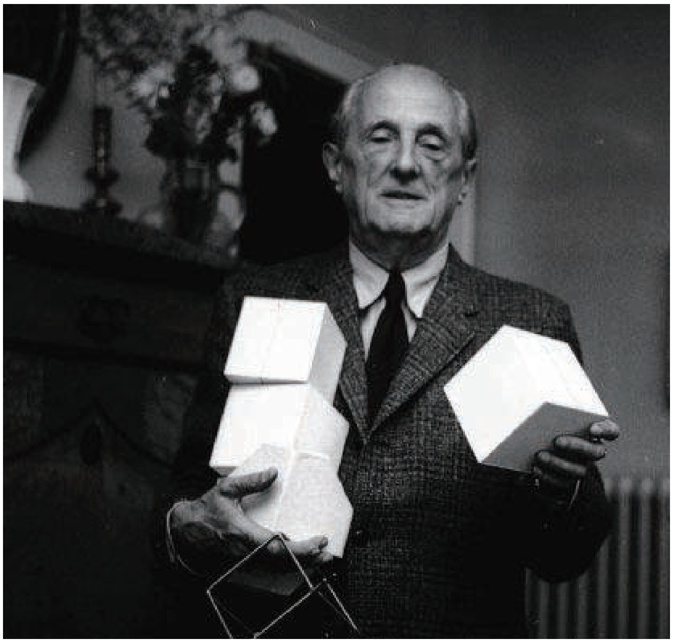
巴拿赫（Stefan Banach, 1892-1945）当之无愧是波兰数学的骄傲。只读了两年工科，没有取得大学文凭的他，酷爱数学，某晚在公园和人聊起勒贝格积分，被经过的数学家史坦因豪斯听到。他立时提了个问题给巴拿赫。几天后，巴拿赫把否定结果带来了。大喜过望的史坦因豪斯与巴拿赫发表了论文，还让巴拿赫跟他读博士。

史坦因豪斯是希尔伯特的博士。大名鼎鼎的卡茨和肖德尔都是他名下的博士。他曾自豪地宣称，他毕生最伟大的业绩，就是发现了巴拿赫。老师搞出了希尔伯特空间，学生搞出了巴拿赫空间，而史坦因豪斯自己却十分喜爱做基本的数学普及。他精心写出的数学科普著作，在全世界享有盛誉。

巴拿赫念博士不久，老师劝他抓紧写博士论文。可他总是说：等我把更好的结果做出来再写。无奈的老师心生一计。某日，巴拿赫在校园里被人拦下，说有一群人，被一堆数学难题难倒了。巴拿赫一去，三下五除二全都搞定了。原来那一群人是从华沙来参加论文答辩的数学家。答辩就这么通过了！

你是否遇到过符合逻辑却违背常识的事情？巴拿赫与波兰逻辑学家塔斯基就证明了一条奇怪的、违背了常识的数学定理：拿一个实心的金球来，可以把它分割成有限的几块，只允许对这些碎块进行平移和旋转操作，竟然可以装配出两个和原来的金球同样大小的实心金球！这就是著名的分球怪论。

史坦因豪斯 Steinhause


波兰数学家史坦因豪斯（Hugo Steinhaus, 1887-1972）

巴拿赫能把一个金球变成两个。但波兰学者最令人感动的是，不是把一个金球分割两个，而是把一个数学家复制成无数多个。史坦因豪斯曾经调侃说：和波兰比，美国还是穷多了。波兰可以造就许多出类拔萃的数学家，却不逼迫他们出成绩。在美国这肯定不行，成不了气候的数学家会把美国拖垮的！

桃李天下，岂是一挥而就。史坦因豪斯的讨论班听众寥寥，弟子卡茨曾疑惑：这么几个人，能持续下去吗？老师泰然："三人即成学院"。然而，终有一天，讨论班只剩下卡茨和史坦因豪斯两个人。卡茨问：只剩两个人了，还能算学院吗？老师正色道：你没见上帝也在这儿和我们俩讨论数学吗？

人可以不信仰宗教，却不可失去虔诚，学者孜孜不倦探究未知世界的奥妙、教师呕心沥血去培育人才、史学家皓首穷经追索千古之谜，这大千万象之后你能读到的是虔诚。先有虔诚而后执着，最终归于痴迷。像史坦因豪斯那个级别的数学家令人羡慕的"与上帝同在"的喜悦，不是宗教，胜似宗教。

传说这位"与上帝同在"的史坦因豪斯，从未把学问当作宗教教义而照本宣科。他仿佛身处古希腊的雅典学院，擅长用苏格拉底式的诘问来指导学生。"诘问"并非"诡辩"，而是通过不断地提问，把数学问题本身不断引向深入，让学生自己用堂堂正正的逻辑，挖出问题的本质，最终把问题解决掉。

史坦因豪斯不只发出苏格拉底式的诘问，他还有形而上学之问：什么是跨越一切时代的最重大的问题？史坦因豪斯的导师希尔伯特曾说：假如有一支魔杖能让自己昏睡过去 500 年，醒来之后他既不会管什么历史大事，也不会管什么社会变迁。他只会问：黎曼 Zeta 函数的零点分布问题，到底有哪些进展？

对于视学术为神圣事业的学者，俗世的万千变化，无非是过眼烟云。

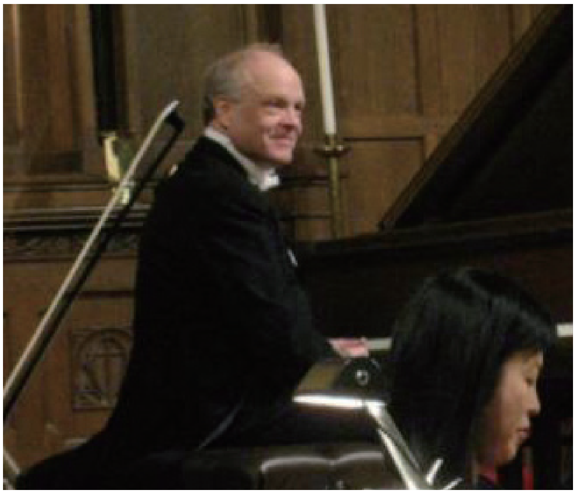
数学的美与真，让犹太数学家史坦因豪斯相信，他思考数学时上帝一定也参与在其中。他心中的“上帝”与俗世无关，他心中的“上帝”，正是爱因斯坦所说的“我信仰斯宾诺莎的、在事物的有秩序的和谐中显示出来的上帝”。

这群与上帝同在的精神贵族们，物质条件极为匮乏。史坦因豪斯要在会议上介绍学生马祖尔的论文，会前几个小时问学生：怎么还不把论文给我？学生目瞪口呆：我早就给了您呀！教授道：你只给了我四页白纸！原来，穷学生没有钱，只能买最便宜的糙纸，还往墨水里添了水，字迹隔几天已荡然无存！

艰难困苦、玉成于汝。即便是在大学教书的巴拿赫，同样收支难抵。他不得不花大量的时间和精力去写能赚点钱的中学教材。巴拿赫自幼被双亲抛弃，由一位洗衣妇抚养成人。如果不是遇到史坦因豪斯这样目光远大、且对天才毫无嫉妒之心的伯乐，恐怕其个人乃至波兰数学的历史都将是另外的面貌。

许多人回忆史坦因豪斯，都说他的个性谦虚到能和任何人愉快地共事。他对巴拿赫从未有嫉妒之心。相反，他始终把自己定位成天才成长中的旁观者而非导师。每一个伟大学派的创始期，都有一位心胸开阔、为人谦恭的长者。创立剑桥分析学派的哈代如是，缔造波兰利沃夫学派的史坦因豪斯亦如是。

恩弗洛 Enflo



Enflo 在钢琴演奏会上

除了爱泡苏格兰咖啡馆，巴拿赫喜欢静静地一边聆听管弦乐一边思考问题。或许正因为如此，抽象无比的泛函分析才饱含了华美的乐思，那艰深的问题在延绵的律动中层层推进。号称巴拿赫空间三个基本难题的基底问题、逼近问题和不变子空间问题，历经四十余年，终被数学家兼钢琴家 Enflo 突破。

瑞典数学家 Per Enflo 在巴拿赫空间的基本问题上展露出的才华令人震惊。他少年时期就以瑞典歌剧管弦乐队钢琴家身份巡回演出。在瑞典的纪念莫扎特诞辰 200 周年青少年音乐比赛中，12 岁的他一举夺得钢琴比赛冠军。著名钢琴家 Gulda 的老师 Seidlhofer 教授还劝其父母送他到维也纳学音乐。

年轻的 Enflo 醉心于钢琴，中学毕业前，再度夺得瑞典全国钢琴比赛冠军 , 并夺得瑞典第一

Mazur 奖励 Enflo（右）一只活鹅

届全国数学竞赛亚军。进入大学之后，念数学的小伙子整日里忙着和名乐团合作贝多芬钢琴协奏曲之类的。念博士时幸亏其导师慧眼识珠，直接拿希尔伯特第五问题刺激他的神经。Enflo 一试身手即大放异彩。

轰动一时的是在 1972 年，时年 28 岁、貌似终日沉迷于钢琴的 Enflo，解决了困惑人们近 40 年的、涉及到巴拿赫空间的一个基本难题。这个问题由马祖尔在 1937 年提出，列在《苏格兰咖啡馆数学问题集》第 153 号。乘 Enflo 到华沙讲学之机，马祖尔兴致勃勃跑去给 Enflo 授奖。奖品十分奇特：一只大活鹅。

巴拿赫们在苏格兰咖啡馆捣腾出一堆难题，其中有许多一时无从解决。他们便为每个难题预设了一笔奖励。Enflo 赢的鹅算是最具创意的奖品。其他问题的奖品，不过就是稀松平常的酒。史坦因豪斯算阔佬，设的奖品是鱼子酱。凑热闹的外国数学家冯 • 诺依曼给的奖品是：测度大于零的一瓶威士忌！

利沃夫学派

波兰国家银行 2012 年发行的纪念巴拿赫金币与银币的正反面

其实正宗的苏格兰咖啡，正是用闻名世界的苏格兰威士忌与咖啡调和而成。不过巴拿赫和他的伙伴们在苏格兰咖啡馆，享受的是雪茄、咖啡，还有令人流连忘返的法国干邑白兰地。埃尔迪什有段名言：数学家就是把咖啡变成定理的机器。照这么说，泛函分析真是美不胜收：她是美酒加咖啡的杰作。

咖啡益于数学容易被人理解，但美酒是数学家的最爱，似乎出人意料。以神谕的方式提出“倍立方”这一传世名题的古希腊数学家埃拉托斯特尼说过：酒能震撼人类全部的灵魂。而波斯大数学家海亚姆更是在《鲁拜集》中放歌：天上何时禁酒觞，人间甘露我偷尝。拼将飘渺三生债，换得千秋醉道场。

曾经属于波兰的利沃夫，成就了数学史上的一段美酒加咖啡的绝唱。2012 年的这个夏天，足球列强荷兰、丹麦、德国、葡萄牙在利沃夫上演了欧洲足球锦标赛死亡之组的精彩比赛。不过，今天的利沃夫已经改属乌克兰。战争改变了国家的版图，但诞生在利沃夫的数学，却永远是波兰的骄傲。

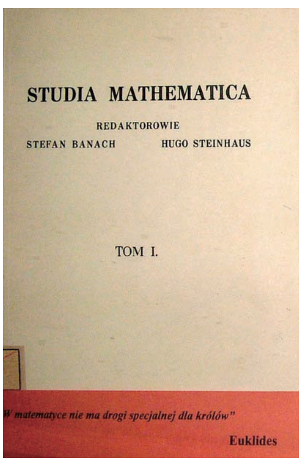
波兰数学家 Banach
(1892-1945)

挪威数学家 Lie
（1842-1899）

德国数学家 Riemann
（1826-1866）

你可以在肖邦的钢琴曲中聆听波兰民族的心声，那是花丛中的大炮；你可以在显克维支的小说中读懂波兰民族的历史，那是同仇敌忾的英雄史诗；你也可以在巴拿赫的数学中更深刻地理解波兰民族不羁的灵魂。数学家 Zygmund 曾经说过：成就利沃夫学派的，正是波兰知识分子强烈的民族独立精神。

波兰可以失去她的城市利沃夫，却永远不会失去为波兰民族带来巨大荣耀的巴拿赫。2012 年，波兰国家银行为了纪念这位伟大的数学家，特地发行了纪念巴拿赫金币和银币。金币上面有著名的巴拿赫不动点定理，而银币上则有著名的 Hahn-Banach 定理。曾经是弃儿的巴拿赫，永远铭刻在了数学史上。



波兰期刊“Studia Mathematica”

在 20 世纪数学论文标题上出现的数学家不可胜数，而名字出现最多的前三位依次是巴拿赫、李（Sophus Lie）和黎曼（Riemann），可见巴拿赫的影响力极为显赫。当然，靠传奇故事撑不起这种影响力。1929 年，巴拿赫与史坦因豪斯创立的期刊 Studia Mathematica，忠实纪录了利沃夫学派极端扎实的学术积累过程。

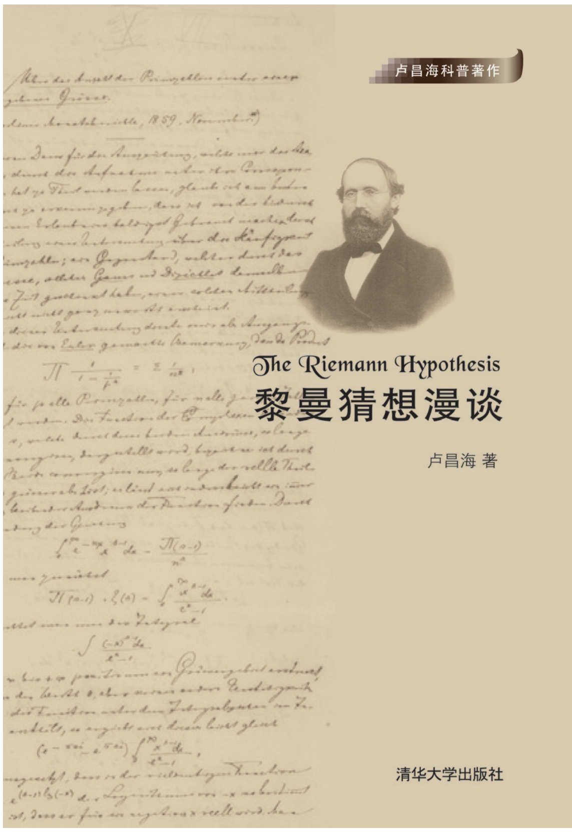
在德、奥、俄多个列强夹缝中生存的波兰，一直在为民族独立而流血牺牲。但波兰数学期刊 Studia Mathematica 却摈弃母语，采纳了德、法、英、意大利语来发表论文；二战前后，利沃夫在苏、德之间几经易手，俄语最终也被期刊采纳。正是波兰数学家的高瞻远瞩，使其数学思想得以声名远播。

未完待续

作者简介：歌之忆（笔名），生于六十年代，数学博士，任电子信息专业教授十年有余。现阶段在网络数据分析与图像识别等领域主持技术研发。

《黎曼猜想漫谈》读后感

王元



一

随着公众数学水平的逐渐提高，愈来愈多的人知道黎曼（Riemann）猜想这个问题，我们将它记为 RH。特别是 RH 曾被希尔伯特（Hilbert）列入他的二十三个问题的第八问题，现在又被列为克莱数学研究所提出的千禧年七大待解决难题之一，倍受关注。不少人已经知道 RH 是数学中第一号重要问题。

但 RH 是个什么问题？为什么重要？至今似未见一篇有相当深度的普及文章来加以解释，常常需要参见数学专业著作与文献，才能得知一些。因此，一般人恐怕仅仅只知道有这么一个问题而已。

卢昌海在《数学文化》上的六期连载文章《黎曼猜想漫谈》，对 RH 相关问题作了详细的解释。文章中关于数学的阐述是严谨的，数学概念是清晰的。文字流畅，并间夹了一些流传的故事，以增加趣味性与可读性。从这几方面来看，都是一篇很好的雅俗共赏的数学普及文章。

二

数学普及文章最要紧的是严谨性，有一些普及文章像在讲故事，不谈数学本身，从而读者在读完后，难免会觉得不知其所以然，一头雾水。

RH 发端于黎曼在 1859 年的一篇文章，其历史远比费马（Fermat）大定理（FLT）与哥德巴赫（Goldbach）猜想（GC）的历史短得多，而且不像这两个问题那样，只要有中小学数学知识的人，就知道其题意。

要了解 RH 的题意，则至少需要知道亚纯函数 $\zeta(s)$ 的含义。所谓黎曼 zeta 函数 $\zeta(s)(s=\sigma+it)$ 是一个复变函数，它在右半平面 $\sigma>1$ 上由一个绝对收敛的级数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}\quad(\sigma>1)$$

来定义的。所以，$\zeta(s)$ 在 $\sigma>1$ 上是全纯的。它在左半平面 $\sigma\le 1$ 上的情况如何呢？则需要将 $\zeta(s)$ 解析延拓至全平面，延拓后的 $\zeta(s)$ 是一个 s 平面上的亚纯函数，它只在 $s=1$ 处有一个残数为 1 的 1 阶根。$\zeta(s)$ 仅在左半平面 $s\le 1$ 上有零点 $s=-2n$（$n=1, 2, ...$）。这些零点称为 $\zeta(s)$ 的平凡零点，剩下的零点则位于狭带 $0\le\sigma\le 1$ 之中，这些零点称为 $\zeta(s)$ 的非平凡零点。所谓 RH 是说：

$\zeta(s)$ 的非平凡零点都位于直线 $\sigma=1/2$ 之上。

RH与素数在自然数中的分布密切相关。我想一般关于RH的普及文章也就讲到这里了。

卢昌海的文章从这里讲起，他介绍了$\zeta(s)$的开端，即欧拉（Euler）关于$\zeta(s)$的工作，其中s为实变数，及高斯（Gauss）关于不超过x的素数个数$\pi(x)$的猜想

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} = Li(x),$$

这是素数分布的中心问题。独立于高斯，勒让德（Legendre）也对$\pi(x)$作了猜想

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x - 1.08366}.$$

由于$Li(x) \sim \dfrac{x}{\log x - 1.08366} \sim \dfrac{x}{\log x}$，所以我们称

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

为“素数定理”。素数定理已由哈达马（Hadamard）与德•拉•瓦•布桑（de la Valee Poussin）于1896年独立地证明了。但人们期望有一个具有精密误差项的素数定理。可以证明用高斯的猜想公式比勒让德的猜想公式的误差项要精确得多。在RH之下，可以证明

$$\pi(x) = Li(x) + O(\sqrt{x}\log x).$$

反之，由这个公式也可以推出RH。所以，这个公式可以看作RH的算术等价形式。由此足见RH的极端重要性了。

然后，卢昌海的文章深入到了$\zeta(s)$较近代的重要研究：其实，黎曼的文章中还包括了几个未经严格证明的命题。除了RH之外，都被哈达马与曼戈尔特（Mangoldt）证明了，只剩下现在所谓的RH。

命$N(T)$表示$\zeta(s)$在矩形$0 \le \sigma \le 1$，$0 < t < T$中的零点个数，黎曼作了猜想

$$N(T) \sim \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}.$$

这个结果已由曼戈尔特证明。命$N_0(T)$表示在线段$\sigma=\frac{1}{2}$，$0 < t < T$上，$\zeta(s)$的零点个数，则赛尔贝格（Selberg）证明了，存在正常数c使

$$N_0(T) > cN(T).$$

这个结果是非常惊人的。它说明了$\zeta(s)$在线段$\sigma=\frac{1}{2}$，$0 < t < T$上的零点个数与它在矩形$0 \le \sigma \le 1$，$0 < t < T$上的零点个数相比，占有一个正密度。而线段的二维测度为零。卢昌海还介绍了往后数学家关于c的估计的重要工作：$c \ge \frac{1}{3}$（列文森（Levinson））与$c \ge \frac{2}{5}$（康瑞（Conrey））。

卢昌海用了相当多的篇幅介绍了 ζ (s)的非平凡零点的计算方法与大量的计算结果。

这两方面的成果，大大地加强了人们对RH正确性的可信度。

三

黎曼zeta函数$\zeta(s)$与RH都是“原型”，有不少$\zeta(s)$与RH的类似及推广。这些类似与推广都有强烈的数学背景。

卢昌海的文章中谈到了这个问题，即他所谓的RH的“山寨版”与“豪华版”。所谓山寨版，就是RH的某种类似，而豪华版则为RH的某种推广。无论是山寨版，还是豪华版，其数学背景都是极其重要的。

卢昌海介绍了有限域F_q上的平面代数曲线对应的RH，即每一条满足一定条件的代数曲线都对应于一个L函数，它们的零点都位于直线$\sigma=\frac{1}{2}$上。这一命题已由韦依（Weil）证明，而且韦依对于高维代数簇的RH也作了猜想。这个猜想已由德利涅（Deligne）证明。这些无疑都是二十世纪最伟大的数学成就之一。就我所知韦依与德利涅的结果对解析数论就有极大的推动。例如，由韦依证明的RH可以推出模素数p的克罗斯特曼（Kloosterman）和与完整三角和的最佳阶估计

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i(cx+d\bar{x})/p}\right| \le 2\sqrt{p} \qquad (p \nmid cd,\ x\bar{x} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)),$$

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i(a_k x^k + \ldots + a_1 x)/p}\right| \le k\sqrt{p} \quad (p \nmid a_k).$$

长期以来，对这两个问题都只能得到较弱的估计。又如命$n(p)$表示模p的最小二次非剩余，则由韦依的结果，布尔吉斯（Burgess）证明了

$$n(p)=O_{\varepsilon}\left(p^{\frac{1}{4\sqrt{e}}+\varepsilon}\right),$$

其中 $\varepsilon>0$ 为任意给予的正数。过去 $n(p)$ 的最佳阶为 $O_{\varepsilon}\left(p^{\frac{1}{2\sqrt{e}}+\varepsilon}\right)$。

由德利涅的结果可以推出拉马努扬（Ramanujan）的一个著名猜想。

韦依的 RH 的算术形式为代数曲线在 F_q 上的点数公式的误差为 $O(q^{1/2})$。这是最佳可能估计，称为“韦依界”。

卢昌海介绍了所谓 RH 的豪华版，指的是狄里克雷（Dirichlet）L 函数对应的 RH 类似与戴德金（Dedekind）函数的 RH 类似。由于这两个 函数均以黎曼 zeta 函数为特例，所以它们对应的 RH 称为广义黎曼猜想，记为 GRH 或 ERH。

介绍狄里克雷 L 函数时，先需要引进所谓狄里克雷特征 $\chi(n)\bmod q$。级数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^{s}}\quad(s=\sigma+it,\ \sigma>1)$$

是绝对收敛的。它也可以解析延拓至 s 全平面。它是 s 平面上的亚纯函数。这就是模 q 的狄里克雷 L 函数 $L(s,\chi)$。所谓 GRH 就是

> 所有 $L(s,\chi)$ 的非平凡零点都位于直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上。

当 χ 为主特征时，$L(s,\chi)$ 本质上就是 $\zeta(s)$，它们仅相差一个仅依赖于 q 的常数倍数。

戴德金 L 函数是在一个代数数域 K 上定义的。这里就不详细讲了。当 $K=Q$ 为有理数域时，戴德金 L 函数就是黎曼 zeta 函数。所谓 GRH 就是戴德金 L 函数的非平凡零点都位于 $\sigma=1/2$ 上。

与 RH 类似，由狄里克雷 L 函数的 GRH 可以推出：当 $(l,q)=1$ 时，命算术数列 $l+kq$（$k=0,1,2,\ldots$）中，不超过 x 的素数个数为 $\pi(x,q,l)$。则

$$\pi(x,q,l)=\frac{1}{\varphi(q)}Li(x)+O(\sqrt{x}\log x),$$

此处 $\varphi(q)$ 表示欧拉函数。当 $q=1$ 时，$\pi(x,1,1)=\pi(x)$。上式就是 RH。这是狄里克雷 L 函数的 GRH 之算术形式。

由戴德金 L 函数的 GRH 可以推出代数数域 K 中的有最佳误差主阶的素理想定理。这也是戴德金 L 函数的 GRH 的算术形式。当 $K=Q$ 时，即为 RH。

但也不是关于 $\zeta(s)$ 的结果都对 $L(s,\chi)$ 有相应的结果。例如关于 $\zeta(s)$ 的无零点区域估计，对于二次特征 χ_2 对应的狄里克雷 L 函数 $L(s,\chi_2)$ 有无这样类似区域估计就不知道了。对此，西格尔（Siegel）关于 $L(s,\chi_2)$ 的非平凡实零点的估计在解析数论中就是非常重要的。

GRH 有极强的数学背景。下面就解析数论领域再举几个例子。

二十世纪最重要的解析数论成果之一是维诺格拉朵夫（Vinogradov）证明的关于 GC 的“三素数定理”，即

> 每个充分大的奇数都是三个素数之和。

其实，这个结果最早已由哈代（Hardy）与李特伍德（Littlewood）在狄里克雷 L 函数的 GRH 之下证明了。维诺格拉朵夫的工作就是发展了以素数为变数的指数和估计方法，从而取消了三素数定理证明中的 GRH。

中国数学家的著名结果之一是关于 GC 的所谓“陈氏定理”，即

> 每个充分大的偶数都是一个素数与一个不超过两个素数的乘积之和。

其实，早于陈景润，中国在这方面已研究了十多年，总是先假定了狄里克雷 L 函数的 GRH，做出关于 GC 的结果，然后再设法取消证明中的 GRH。

再以 $n(p)$ 的估计为例。在狄里克雷 L 函数的 GRH 之下有估计

$$n(p)=O(\log^2 p),$$

这就比山寨版的 RH 的推论强得太多了。

四

卢昌海文章中用了很大篇幅谈到研究 RH 的尚未成功的（即未得到确定结果）的一些想法与尝试。

卢昌海文章中亦用了很大篇幅谈了一些关于 RH 的美丽的传说。这些传说，我本人也听过一点。例如韦依在中科院访问作的第一次报告就是讲他的山寨版

RH。报告一开始，他就说“曾经希望证明 RH，但不发表，待 RH 提出一百年时发表，现在只能希望在 RH 提出二百年时，再见到它的证明了。”赛尔贝格在访问中科院时的一次宴会上说：“FLT 与 GC 本身都没有什么用。”我说：“研究它们带动了一些新方法的产生。”他说：“那是呵。”这个观点在卢昌海的文章中也提到了。

这些传说都是非常美丽的，人们愿意津津乐道。

五

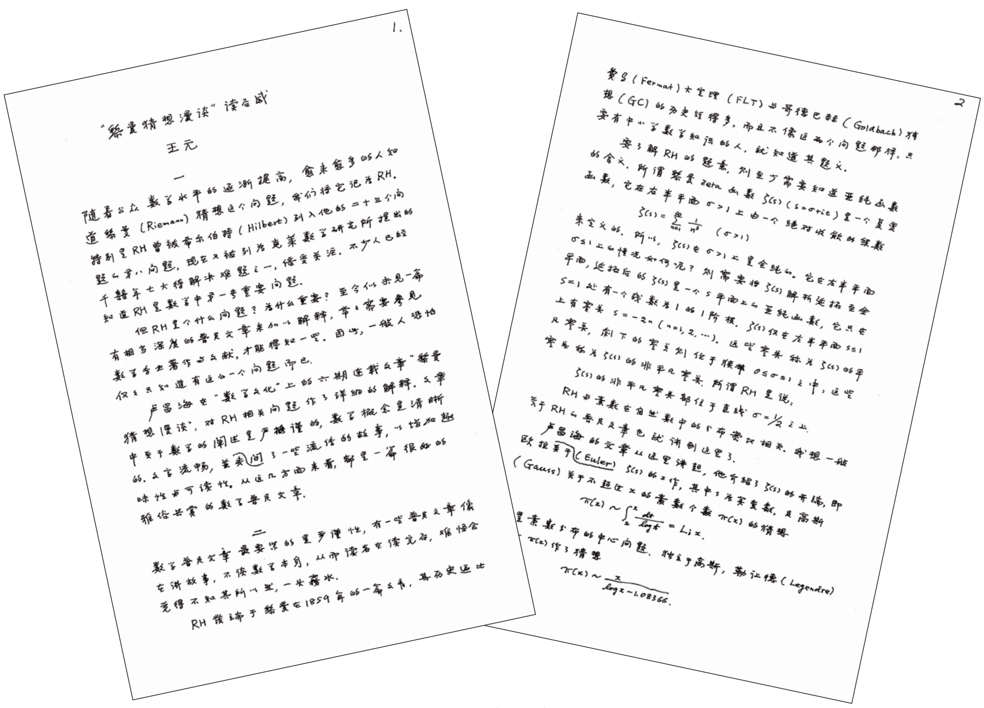
卢昌海的文章还有以下优点：在讲到一些重大结果时，作者对这些结果的重要前期成就都作了介绍。例如素数定理，赛尔贝格关于 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上的零点个数估计，及韦依关于山寨版 RH 的证明等。又为了讲清楚文章中涉及到的一些概念，作者还举例子加以说明。例如在解释戴德金 L 函数时，涉及到“理想”这个概念，作者以有理数域 Q 与二次域作为例子来说明，所以是深入浅出的。我认为数学系本科高年级学生是可以看懂这篇文章所讲的问题、结果与数学概念的含义的。对于专职数学家与教师，甚至数论学家，也值得阅读。我想他们对于 RH 的了解基本上是在学习与研究数学的过程中，零星地与积累地了解到的。如果有机会系统地了解一下 RH，也会很有好处。因此我愿意向大家推荐卢昌海的文章。

我还想谈一点意见：仅从题意表面来看，RH 只是研究一个特殊的亚纯函数 $\zeta(s)$ 的零点性质。从亚纯函数的理论来看，只是一个例子而已。就像研究 FLT 与 GC 一样，研究它们的目的主要在于发展数学中的新思想与新方法。形象地说，这两个问题都是数学中“下金蛋的母鸡”。

从过去的研究来看，RH 当然是数学中下金蛋的母鸡，但研究它的目的，远远不止此。它之所以成为数学中第一重要问题，主要是由于一系列的数学中的重大问题的解决都依赖于各种 RH 的解决。一旦这些 RH 解决了，人类就站在一个不知比现在高多少的数学平台上，看到更远得多的风景。

到底各种 RH 可以推出多少数学结果？要求弄清楚这么多东西恐怕是太难了。如果卢昌海这篇文章还要继续写下去，也许可以考虑写一些各种 RH 的推广。这会使读者更能了解到解决各种 RH 的巨大意义。

最后，我愿借此机会祝卢昌海文章的成功，并盼望见到它能够成书出版，使更多读者能读到，并从中受益。



1.

“黎曼猜想漫谈”读后感

王元

一

随着公众数学水平的逐渐提高，愈来愈多的人知道黎曼（Riemann）猜想这个问题，我们将它记为RH. 特别是RH曾被希尔伯特（Hilbert）列入他的二十三个问题的第八问题，现在又被列为克莱数学研究所提出的千禧年七大待解决难题之一，倍受关注。不少人已经知道RH是数学中第一号重要问题。

但RH是个什么问题？为什么重要？至今似未见一篇有相当深度的普及文章来加以解释，常常需要参见数学专业著作与文献，才能得知一些。因此，一般人恐怕仅仅只知道有这么一个问题而已。

卢昌海在“数学文化”上的六期连载文章“黎曼猜想漫谈”，对RH相关问题作了详细的解释。文章中关于数学的阐述是严格谨的，数学概念是清晰的。文字流畅，并夹间了一些流传的故事，以增加趣味性与可读性。从这几方面来看，都是一篇很好的雅俗共赏的数学普及文章。

二

数学普及文章最要紧的是可读性，有一些普及文章像在讲故事，不谈数学本身，从而读者在读完后，难怪会觉得不知其所以然，一头雾水。

RH发端于黎曼在1859年的一篇文章，其历史远比

2

费马（Fermat）大定理（FLT）与哥德巴赫（Goldbach）猜想（GC）的历史短得多，而且不像这两个问题那样，只要有中小学数学知识的人，就知道其题义。

要了解RH的题意，则至少需要知道亚纯函数的含义。所谓黎曼 zeta 函数 $\zeta(s)$（$s=\sigma+it$）是一个复变函数，它在右半平面 $\sigma>1$ 上由一个绝对收敛的级数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad(\sigma>1)$$

来定义的。所以，$\zeta(s)$ 在 $\sigma>1$ 上是全纯的。它在左半平面 $\sigma\le 1$ 上的情况如何呢？则需要将 $\zeta(s)$ 解析延拓至全平面，延拓后的 $\zeta(s)$ 是一个 s 平面上的亚纯函数，它只在 $s=1$ 处有一个留数为1的1阶极。$\zeta(s)$ 仅在左半平面 $s\le 1$ 上有零点 $s=-2n$ $(n=1,2,\cdots)$. 这些零点称为 $\zeta(s)$ 的平凡零点，剩下的零点则位于狭带 $0\le\sigma\le 1$ 之中，这些零点称为 $\zeta(s)$ 的非平凡零点。所谓RH是说：

$\zeta(s)$ 的非平凡零点都位于直线 $\sigma=1/2$ 之上.

RH与素数在自然数中的分布密切相关。我想一般关于RH的普及文章也就讲到这里了。

卢昌海的文章从这里讲起，他介绍了 $\zeta(s)$ 的来源，即欧拉关于（Euler）$\zeta(s)$ 的工作，其中 s 为实变数，及高斯（Gauss）关于不超过 x 的素数个数 $\pi(x)$ 的猜想

$$\pi(x)\sim\int_2^x\frac{dt}{\log t}=\mathrm{Li}\,x.$$

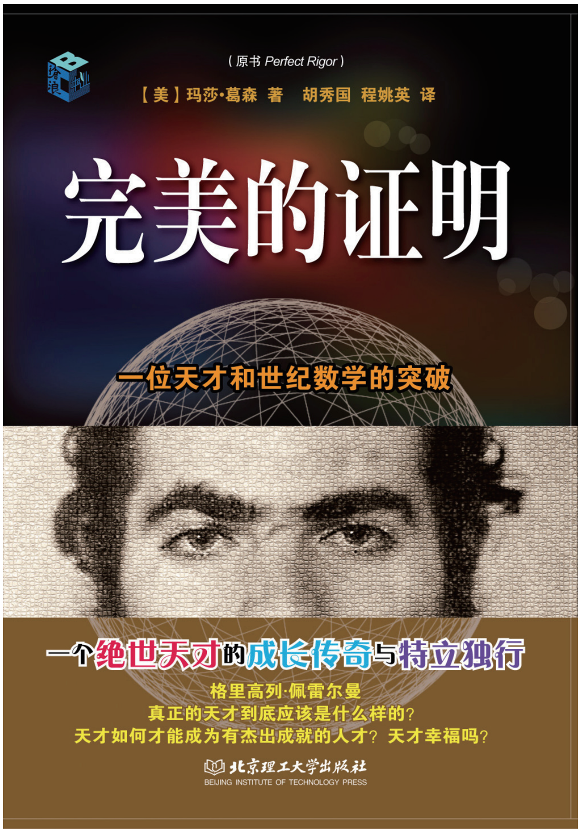
是素数分布的中心问题. 独立于高斯，勒让德（Legendre）$\pi(x)$ 作了猜想

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x-1.08366}.$$

王元先生部分手稿

《完美的证明》

丁玖



在过去的大概十年时光内，一个名叫格里高利•佩雷尔曼的俄罗斯犹太数学家成了国际数学界最引人注目的人物之一。他之所以出名是因为千禧年七大数学难题之一的“庞加莱猜想”随着新世纪的曙光最终被他的临门一脚所攻破。更令人惊讶的却是这位浓眉大胡的数学独行僧宁可呆在祖国圣彼得堡市简陋的公寓里陪伴他亲爱的母亲，也不愿意接受随之而来的、多少年轻博士数年寒窗梦寐以求的美国顶尖大学的正教授职位。他不仅拒绝了 2006 年的菲尔兹奖，而且四年后也拒绝接受位于美国波士顿的克莱数学研究所 (Clay Mathematics Institute) 为全球公开悬赏求解庞加莱猜想而设立的一百万美元的奖金。可能的理由之一是他认为美国数学家汉密尔顿也应同时受奖，因为后者 1982 年提出的用里奇流这一利器来攻破庞加莱猜想的纲领正是他成功的基础。

这样的天才数学家和特立独行者理所当然地成为记者或作家竞相描述的对象。但是，将他们拒之于千里之外是佩雷尔曼坚持的人生哲学之一。这本《完美的证明》(英文原著书名为 Perfect Rigor，意思与中文翻译名有点距离，就像纳什传记 A Beautiful Mind 被翻成《美丽心灵》一样) 的作者 Masha Gessen 较其他西方记者有个得天独厚的好条件：比佩雷尔曼小 7 个月的她也是俄罗斯的犹太人，14 岁时随父母移居美国，前几年作为《美国新闻与世界报道》驻俄罗斯记者又返回祖国，因此她英语、俄语双双精通。即便如此，这本书从头到尾都不见她和佩雷尔曼的直接对话。本书的故事全依赖于她对一部分与佩雷尔曼有关系的说俄语者和说英语者采访的内容。当然，采访的对象至少有一个是在普林斯顿大学教书的中国籍数学家，和佩雷尔曼有多年的学术交往 (你在本书中不少地方可以见到他的身影)，但她与这位受访者大概是不会用各自的母语交谈的。

这是一本比较适合一般读者的人物传记。原因是普通老百姓对名人的生活经历比他们的成就内容更感兴趣。的确，在这方面作者是相当成功的。她详细地描述了佩雷尔曼少年时代在苏联的数学俱乐部和特殊学校的生活和训练过程。1966 年出生的他从 1976 年进入列宁格勒先锋宫的数学俱乐部起，到在 1982 年的国际数学奥林匹克竞赛上以满分获得金牌，这六年他的竞赛数学生活在书中的第二到第四章一一展开，充满了他的俱乐部老师和伙伴们讲述的故事。青少年们从

这些故事中可以得知一个有数学头脑的少年怎样进化成一个献身数学者。

苏联的特殊学生教育方法和专门学校起源于柯尔莫哥洛夫的坚强信念。作为上世纪世界上最具原创性的数学家之一，他孜孜不倦地为发现和培养一些数学小天才而倾注心血，直至逝世。但是，苏联的做法与中国目前的做法不太一样，它更像50年代华罗庚等一代数学家为中学生所做的那样，也像美国对一些天才少年所引导的那样。这种做法更多地让数学早慧并真正热爱数学研究的少年儿童培养对数学的认知和品位，让他们在初等数学基础已牢固打好后尽早跳进现代数学的大海里游弋。在这本书里我们知道，佩雷尔曼十三岁就从数学俱乐部的客座讲师那里学到了拓扑学，这是在他进入列宁格勒的专门数学学校——第239学校之前一年。

佩雷尔曼的母亲在大学研究生时代曾是一位热爱数学研究的好学生，这让她的教授Garold Natanson刮目相看，甚至为其提供了一个研究职位。这位教授的父亲写的一本《实变函数论》是当年77级开始的那几届中国数学系大学生最喜欢拼命啃读的中文数学译本之一。令他感到可惜的是，她结婚了，并想生孩子。虽然苏联也许失去了一个潜在的“诺特”,但一个未来的“庞加莱”从她的腹中横空出世。懂得一定深度数学的双亲在培养孩子的数学爱好方面可能更容易做到。比如说，本书作者采访过的那位在哈佛大学拿到数学博士的中国人，他的母亲就是一位南京大学以否决苏联著名数学家、莫斯科大学的校长彼得罗夫斯基关于极限环个数猜想的成就而受人尊敬的女数学家。佩雷尔曼的母亲发现了儿子的数学细胞大大稠密于同类人，急忙去找她多年未见的老师Natanson咨询，就像近一百年前冯•诺依曼的父亲为儿子的前途咨询冯•卡门一样急切。识货的Natanson如同孔夫子所教导的那样因材施教地把他学生的儿子送给至今已训练出七十多块国际数学奥林匹克竞赛奖牌得主的“金牌教练”Sergei Rukshin。

有了竞赛数学的底子，加上愈来愈强烈的与数学为伍的劲头，拿到金牌的佩雷尔曼继续向数学的高峰进军，就像和他同时获得菲尔兹奖的华裔澳大利亚数学天才陶哲轩当年一样那么做。他免试进入了列宁格勒大学，成为通常一年只招收两位犹太人的数学力学系新生。佩雷尔曼几年的大学生活，是书中第五章的重点。那几年对他影响最大的数学家是当过列宁格勒大学校长的Alexander Danilovich Alaxandrov及其学生Viktor Zalgaller。前者教了他大一的几何学，后者指导他研究几何。这两位老人后来也全力帮助了他进入俄罗斯著名的斯捷克洛夫数学研究所读研究生。

真正把佩雷尔曼带入国际数学界的关键人物是Mikhail Gromov。他被Zalgaller称为“列宁格勒大学有史以来最好的产物”，导师为曾在Alaxandrov帮助下免遭当局迫害的著名拓扑学家Vladimir Rokhlin。Gromov很早就离开苏联移民美国，49岁就拿到了沃尔夫数学奖。后来也在法国工作的他1990年把刚刚答辩完博士论文的佩雷尔曼带到了巴黎的高等研究所，1991年又带他去美国参加了一年一度的几何学节。从此，佩雷尔曼走向了数学的国际舞台。

接下来发生的扑朔迷离的佩雷尔曼数学故事和人生经历就请读者从本书第七章起继续读吧。总之，正如作者在第六章最后一段所概括的，“佩雷尔曼的守护天使们就这样不断地接力着：卢克欣引领着他学习竞赛数学；雷日克悉心照顾他度过了高中生涯；扎尔加勒在大学里培养了他的解题技巧，并把他交给亚历山德罗夫和布拉戈以确保他能毫不中断、无所妨碍地研习数学；布拉戈又把他引荐给格罗莫夫；格罗莫夫带着他走向了世界。”佩雷尔曼是幸运的，在他事业登攀的每一程都有“贵人相助”。但是,“外因是变化的条件，内因是变化的根据”。只有顽强不已的他，才能最后摘取那颗最大的明珠。

对于想知道更多庞加莱猜想的拓扑历史、一百年来崎岖不平的破解之路和佩雷尔曼最伟大工作的思想背景的读者，不妨再看一本美国数学教授Donal O' Shea所著的科普作品《庞加莱猜想》。它的原文书名是The Poincare Conjecture: In Search of the Shape of the Universe，出版于2007年，中文翻译本2010年由湖南科学技术出版社出版。此书作者为写过几本学术著作的几何学家，他把庞加莱猜想的主题与我们的宇宙空间的拓扑形状融为一体，通俗、精确地描绘出一幅幅数学美景，并将数学与历史人文的变迁互为映照。这本书得到美国数学科普大师加德纳(Martin Gardner)的很高评价，称之为“一本真正了不起的书。”的确，当我在广州的旧书店里以原价38元的几分之一价钱买来后读之，深受启发。这里顺便说一句，在美国第一家女子学院Mount Holyoke College教了32年书并成了讲座教授及学术副校长的O'Shea刚被任命为The New College of Florida的下一任校长。

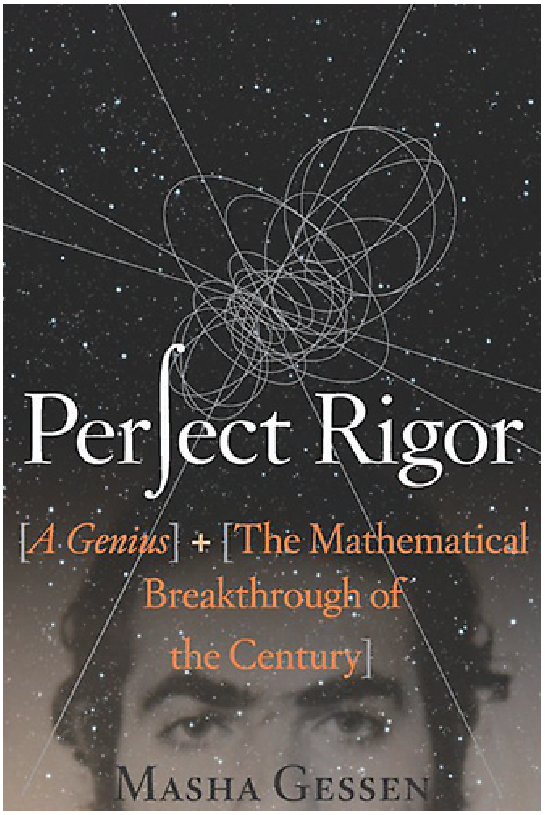
然而，这两本与佩雷尔曼有关的中文译本，都有点小毛病。比如说，第一本缺乏“索引”；一般英文著作都有索引以方便读者查阅，不知是否未将其译出。第

二本虽然译出了详细的索引，但将每个条目在英文原著中的页码照搬不误，和中文书中对应的页码“驴唇不对马嘴”，几乎失去索引的功能。《完美的证明》翻译得并不完美，尽管策划者在其“出版序言”中宣称“我们精心翻译，反复推敲，历时一年有余，精益求精，唯恐有负这本书的本来价值”。一个毛病就是一些标准的数学家人名中文翻译五花八门。比如，苏联数学家 Luzin 被译成“卢津”，但标准翻译是“鲁金”。中国的数学家都知道英国数学家爵士 Atiyah 叫“阿蒂亚”，但在这里被翻成“阿提雅”。如果译者看过中科院数学与系统科学研究院李文林的《数学史概论》或华东师范大学张奠宙的《20 世纪数学经纬》，就不会为这些人名的翻译犯愁，因为他们的书末都有详细的西方著名数学家的中英文人名索引。

如果说这些人名的翻译不标准不算太大问题的话，那么《完美的证明》将 Michael 翻成“米歇尔”则是完全错了，因为 Michael（男子名）是“迈克尔”，而“米歇尔”则是 Michelle（女子名）。美国第一夫人的英文名字就叫 Michelle Obama。另外书中把 Clay 翻成“克雷”，但《新英汉词典》的标准翻译是“克莱”，而我们把 Cray 超级计算机的牌子通常翻成“克雷”。读过 Natanson《实变函数论》中译本的人见到 Natanson 被翻成“纳坦森”会感到陌生，因为他几十年来一直被中国的数学教授标准化叫成“那汤松”。

我未读过这两本书的英文原著，无权评价它们各自翻译的质量。但就中文版而言,《庞加莱猜想》比《完美的证明》更吸引我，语言更优美。也许是原著者的写作意图、风格、学识、思想深度等不一样，也许是我更爱读富含知识性的东西，也许是我爱读数学家散文般的作品，也许是数学家的逻辑性和严谨性更能打动我。

对于佩雷尔曼拒绝接受菲尔兹奖和一百万美元的克莱奖金，不同的人会有不同的反应。但是，还是听听美国数学家、和汉密尔顿的朋友同时获得菲尔兹奖的 William Thurston 说的一番话吧：“我们真实的需求位于内心深处，然而现代社会中的我们，大多数是条件反射式地不断地追逐财富、消费品和虚荣。我们已经在数学上从佩雷尔曼那里学到了东西，或许我们也应该暂停脚步，从佩雷尔曼对生活的态度上反思自己。”（中文翻译转抄自本书“出版序言”）



书评："An Invitation to Mathematics"

丁玖

今年春节期间，曾经翻译出版过英文《组合优化》教材的南开大学组合数学中心的史永堂老师向本刊的汤涛主编推荐了匈牙利数学家 Laszlo Lovász (1948-) 去年发表的一篇学科介绍性文章。他说："最近读了 An Invitation to Mathematics 一书中 Lovász 撰写的 'Graph Theory Over 45 Years '，主要是对图论这门学科的介绍和推荐，有点科普性质的。写得非常的好，另外 Lovász 也是这个领域的专家。"

Lovász 岂止是这个领域的专家。同一年 (1999) 获得过沃尔夫奖和 Knuth 奖的他在组合数学中的地位，相当于 1974 年图灵奖得主 Knuth (1938-) 在计算机科学中所坐的交椅。有这样的大师所写的综述文章，对这领域感兴趣的，无论是教授，还是学生，谁不想看？

由于史老师的引荐，我有机会接触到包含 Lovász 上述文章的名为 An Invitation to Mathematics 的一本文集。它由德国的斯普林格出版社出版，编辑者为两位德国数学家 Dierk Schleicher 和 Malte Lackmann。

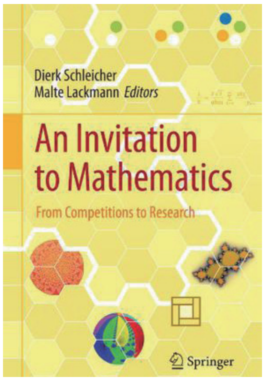
这本书的出版背景是这样的：第 50 届国际奥林匹克数学竞赛 2009 年在德国的 Bremen 市举行。组织者们邀请了六位昔日的金牌获得者、今日的大牌数学家和参赛的中学生们谈论"什么是数学"。他们当中有 1964 到 1966 连续三年获得国际奥林匹克数学竞赛金牌的 Lovász。其他五人分别为在前三届竞赛中拿到两次金牌、出生于匈牙利的英国数学家 Bela Bollobas (1943-)；1981 年金牌获得者、在 Bollobas 门下拿到博士学位的英国数学家 Timothy Gowers (1963-)；1986 和 1987 的金牌获得者、俄罗斯数学家 Stanislav Smirnov (1970-)；11 岁起从 1986 到 1988 分获铜、银、金牌的华裔数学家陶哲轩；以及 1973 和 1974 分获银、金牌的法国数学家 Jean-Christophe Yoccoz (1957-)。他们都是当今研究数学家中的响当当人物：Bollobas 和 Lovász 均为伦敦皇家学会会员，而 Gowers, Smirnov, 陶和 Yoccoz 分别为 1998、2010、2006 和 1994 年的菲尔兹奖得主。

这六人无一例外地接受了邀请，他们引人入胜的报告受到了参赛者电影明星般的欢呼。这就萌发了编者出版此书的初衷。于是，他们又邀请了其他数学家贡献了另外的八篇文章，构成了本书的主体。

这本普及性数学读物是为大、中学生而写，而不仅仅是最初的面向奥林匹克数学竞赛者。正如本届国际奥林匹克数学竞赛的组织者之一 Gunter M. Ziegler 在序言中所述，在更广的意义下，该书是为所有那些数学爱好者准备的。十四篇杰作的作者，由于他们对数学的精深理解和广博知识，用其浅显易懂的写作风格，为读者展示了有代表性的数学分支的知识现状和诱人前景。这些学科包括素数理论、丢番图方程、动力系统、图论及数值计算等。

书中有两篇文章专门讲奥林匹克数学竞赛与数学研究的异同。它们的题目非常有趣，好像彼此是主语宾语相互颠倒，分别是 "How do IMO Problems Compare with Research Problems?" 和 "How do Research Problems Compare with IMO Problems?"。IMO 就是国际奥林匹克数学竞赛 (International Mathematical Olympiad) 的简称。两篇文章的作者分别是 Gowers 和 Smirnov。由他们来告诉我们竞赛数学和研究数学的经验之谈是再合适不过的了。它们有何区别呢？就请你赶快读他们用"案例分析"来阐述观点的文章吧。

读书就会有感想。我读这本书的一个感想就是为何在欧美，许多国际奥林匹克数学竞赛的优胜者们往往能顺利地从数学竞赛之舟冲上数学研究之路并卓有成就，如上述的六位作者。在 IMO 官方网站 www.imo-official.org 上的群英谱 (Hall of Fame) 中随机地选一个获得金牌的欧美选手，他（她）现在研究型大学数学系任教或正在顶尖大学攻读数学博士的概率很大。相比之下，我国历年参赛并获优异成绩的中学生数学竞赛高手，后来献身前沿数学研究事业的寥寥无几。这说明了什么？一个原因大概是真正像陈省身那样终生视"数学好玩"的年轻学子不多，参加奥林匹克数学竞赛不完全基于对数学的热爱上，而是与一些功利的因素有了瓜葛。



我们把 "An Invitation to Mathematics"（副标题为 From Competitions to Research）这本好书推荐给立志在数学上有一番作为的学生们，让他们接受这些热诚数学家的邀请，在数学的天空中神游一番。读了本书，如果他们真的爱上了美的数学，作者们的目的也就达到了。

《中国数学会通讯》是该刊编辑委员会编辑出版的内部刊物，季刊。主要刊登国内外数学界的重要信息，报道中国数学会与各省市自治区数学会、学科分会等的活动情况。主要栏目包括：学术活动信息，数学教育与普及，数学精品文章（数学的历史、进展、价值、趣事等），人物专栏，学科介绍，书讯与书评等。

2012 年《中国数学会通讯》全年的总订费为 50 元（含邮费）。欢迎各省市自治区数学会、学科分会和有关单位以及广大数学工作者、数学爱好者订阅本刊并踊跃投稿。

订阅办法：请将订费邮汇至北京中关村东路 55 号（邮政编码：100190），中国数学会办公室；或行汇至中国数学会，同时请给中国数学会办公室来信告知（或在汇款单附言中注明）订购份数、收刊单位（或个人）详细地址及邮政编码，以便我们及时准确地投寄本刊。

开 户 行：北京工商行海淀西区支行
帐　　号：0200004509089161419
电　　邮：cms@math.ac.cn
电　　话：0086-10-62551022

2012 年第 2 期要目：

《中国数学会通讯》编辑部供稿