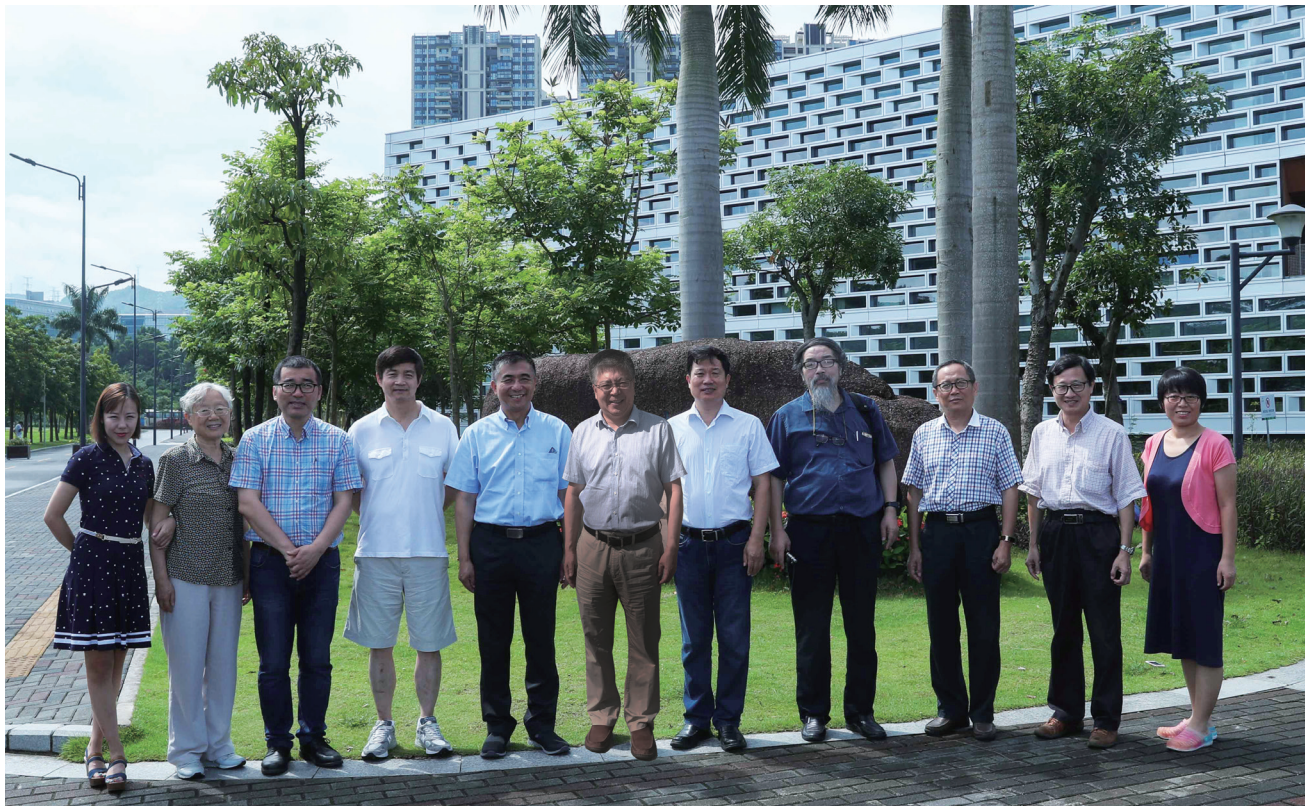


《数学文化》2017年度会议与会人员合影

左起：庄歌，张英伯，蔡天新，张智民，汤涛，刘建亚，邓明立，罗懋康，林亚南，丁玖，付晓青

主　办　香港 Global Science Press
沙田新城市中央广场第一座 1521 室

主　编　刘建亚（山东大学）
汤　涛（南方科技大学）

《数学文化》旨在发表高质量的传播数学文化的文章；主要面向广大的数学爱好者

《数学文化》欢迎投稿，来稿请寄：
Math.Cult@gmail.com

本刊网站：http://www.global-sci.org/mc/
本刊淘宝网：https://shop137795018.taobao.com/
本期出版时间：2017年8月

本刊鸣谢国家自然科学基金数学天元基金和南方科技大学的支持

Contents | 目录

吴文俊：数学是笨人学的

蔡天新

君子豹变，其文蔚也。
——《易经》

2017 年 5 月 7 日，数学家吴文俊先生在北京仙世，享年 98 岁。他是 1950 年代当选中国科学院学部委员的 190 位杰出科学家之一（另有社会科学家 64 名），也是其中最年轻的一位（38 岁）。他又有松柏之寿，自然也是最后一位辞世的，他的离去意味着一个时代的结束。在任期间两度前往吴老家中探望的前总理温家宝亲自送别先生以后，深情地撰写了纪念文章《鞠躬尽瘁，死而不已——追忆吴文俊先生》，读后令人动容。笔者虽只在 20 多年前与吴先生有过一次谋面和交往，仍记着他的风采和人格魅力。

一、上海民厚里的童年

1919 年 5 月 12 日，吴文俊出生在上海市青浦县（今青浦区）朱家角镇。青浦位于上海西南角，系江浙沪三省市交汇处。那时青浦隶属江苏省苏州市，南与浙江省嘉兴市嘉善县接壤。而吴先生的祖籍正是嘉兴，据说他的爷爷奶奶为了躲避战乱，携家迁到了青浦。朱家角镇地处偏僻，又是个小地方，因此很少有战事波及。也正因为如此，如今镇上古迹保留较多，属于中国历史文化名镇，也是上海四大古镇之一，仅次于金山区的枫泾镇，后者邻接浙江省界。

吴文俊小时候，几乎每年清明都随家人回嘉兴祭祖。但他似乎记不得具体地点，只记得要坐船，慢慢地“漂”到嘉兴。他的爷爷是个秀才，却始终没能

青浦县朱角镇

做上官，后来主要靠教私塾养家糊口。到了他父亲的少年时代，家里经济情况更加糟糕。而他母亲的家族要殷实许多，主要从事小手工业。按照中国民间的传统，一个不甚富裕家有出息的男孩，常常会得到家族或乡绅的财力支持。正是在外祖父家族的资助下，他的父亲得以进入南洋公学，读完了预科，相当于高中毕业。

南洋公学是交通大学前身，吴文俊的父亲接受的是西式教育，英文基础非常扎实。毕业以后，他一直在上海的书局、报馆做翻译工作。19 世纪末的上海便有数千老外居住，到了那会儿，上海早已成为中国最开放、最繁华的大都市了。其时肇始于上海的最有名的三家出版社——商务印书馆、中华书局、三联书店中前两家已经诞生，出版了大量好书，尤其是外国经典名著。出版人和报人家庭里通常有许多藏书，吴文俊孩提时代印象最深的便是父亲的藏书以及他们父子一起泡在书里的日子。

从吴文俊记事起，他家就住在上海哈同路（今铜仁路）民厚里。民厚里是石库门的典型代表，就像四合院是老北京的典型建筑，石库门民居是老上海的标志性建筑，也是中西合璧的典范。画家徐悲鸿和蒋碧薇夫妇、国民党元老廖仲恺和何香凝夫妇、翻译家兼教育家严复，都在民厚里居住过。那儿也是海派文人的聚集地。1922 年，戏剧家田汉从日本返回上海，即寓居民厚北里，他在上海大学的学生施蛰存和戴望舒常来探望。民厚南里则住着他创造社的社友郭沫若、郁达夫、成仿吾等人。

民厚里附近的静安寺是英商上海电车公司铺设开通的电车始发站，可沿南京路直达外滩，交通十分便捷，因此吸引租客。张爱玲也住附近，她曾坦承，“我是非得听见电车响才睡得着觉的。”遗憾的是，1996 年的旧城改造，老房子全拆掉了，只留下毛泽东 1920 年旧居（民厚里 29 号，今安义路 63 号）和匈牙利建筑师邬达克设计的“绿房子”。据埃德加 • 斯诺《西行漫记》记载，正是那次寓

2004 年吴文俊夫妇朱家角故地重游

居民厚里期间，毛泽东数度拜会陈独秀，从此有了终生服膺的共产主义信仰。

吴文俊在家中是长子，下面有一个弟弟和两个妹妹。因为家庭经济条件不是很好，也因为旧的社会观念，两个妹妹都没有接受高等教育。弟弟文杰聪明可爱，不幸幼时从楼梯上摔下，起初好像没事，后来发作，变成上海人讲的穿骨瘤子，属于皮肤结核，在那个年代是不治之症。拖延了几年，夭折了。吴文俊成了独子，受到父母的加倍关爱。这让笔者想到印度数学天才拉曼纽扬，他在吴文俊出生的第二年去世，年仅 32 岁。拉曼纽扬也是长子，下面有三个弟妹，都从小夭折了，结果他也成了受宠的独子。

四岁那年，吴文俊上了小学，就在家附近，隔着几个里弄，接送很方便，那时上海已不兴私塾了。每逢放学或假期在家，母亲只要听见里弄里小孩子们玩闹的声音略大一点，就会不放心地把儿子喊回家，生怕他出差错，后来索性把他去里弄玩的自由也给剥夺了。不过踢毽子除外，因为这项运动的冲撞轻微，以至于多年以后，他还爱玩这个游戏。这样一来，吴文俊在家中独处的时间就多了。他上的小学叫文蔚，笔者查阅过，文蔚一词出自《易经》，“君子豹变，其文蔚也。”意思是说，君子应该向小豹子一样慢慢地成长，长出好看的花纹，拥有高尚的品格。

可能是受父亲的影响，吴文俊养成了阅读的习惯，后来又爱上了电影，加之“放羊式”的家教（母亲的“管制”属于另类溺爱），他的性格比较豁达。

童年时的吴文俊爱看大人的书，尤其是林纾翻译的小说，还有李保嘉的《官场现形记》，最喜欢的是《儒林外史》，也因此不怎么喜欢知识分子。他一直记得梁启超说过的话，“中国的皇帝从来没好死的”，“英雄只在落后的国家才有”。吴文俊由此联想到德国的“数学王子”高斯，高斯出道时，德国数学还比较落后，后来德国出了许多数学家，却再也没有出现高斯了。

二、数学零分的中学生

10 岁那年，吴文俊从文蔚小学毕业，但父母觉得他还太小，又让他念了一年书。1930 年，11 岁的吴文俊上初中了。第一年是离家较近的铁华中学，学费很贵，教学质量却很差，校长为了节约开支，常常是实习期一结束就把老师给打发走了。后来吴文俊生了一场类似于伤寒的大病，病愈后进了另一所私立学校，叫民智中学，在今天的威海路。初二时还学文言文，主要是六朝开始流行的“骈文”，以初唐诗人王勃的《滕王阁序》为代表，这篇文章沿用至今，尤以“秋水共长天一色”流传后世。笔者记得，南宋数学家秦九韶也喜用这种文体。

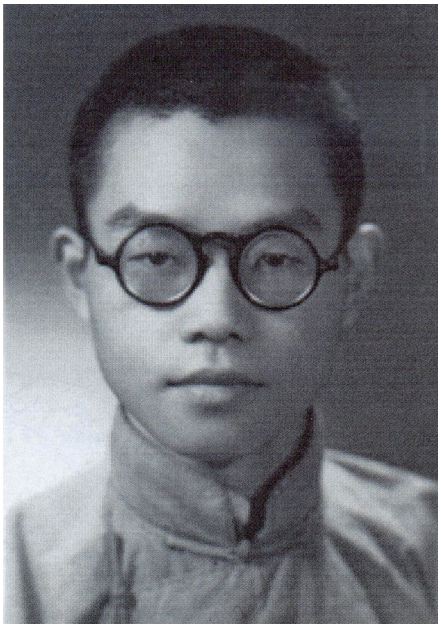
从初三开始，语文改教白话文，“五四”运动的影响日渐显著。那会儿上海已有不少新刊物，例如 1925 年创办的《生活周刊》，吴文俊对主编邹韬奋的文章印象尤为深刻。他的国文大有长进，语文老师经常表扬他的作文，认为那是他从小积累的阅读以及独立思考的习惯使然。那会儿他已懂得查找书评，了解著作的时代背景和作者的人生观，还写过分析性的文章。晚年吴文俊认为胡适提倡白话文了不起，也赞赏他说的“大胆假设，小心求证”。

初二寒假期间，日军对上海实行了大轰炸。因为担心宝贝儿子，吴家回到朱家角，躲了好几个月。可是学校并未停课，等到他们回到城里，文俊的功课落下一大截。语文还好说，数学根本听不懂了，他干脆不听，在下面看小说。结果呢，期末考试得了零分。这次考试对少年吴文俊是有警示意义的。暑假期间，学校为那些因为躲避轰炸落课的同学补课。除了补落下的课程以外，还采用“吊黑板”的形式，就是在黑板上出题，让学生上来做，老师当场评判。这种方法果然奏效，很快文俊掌握了几何的内容和方法。

1933 年秋天，吴文俊上了徐家汇的正始中学，这是一所私立高中，出资人是上海滩的大老板杜月笙，因此学费比较低廉。有一次杜老板过生日，同学们排队从徐家汇走到外滩去祝寿。校长是国民党元老陈群，早年曾留学日本，获文学士和法学士。后来他担任过黄埔军校政治教官、南京警察厅长，再后来又担任汪伪政府的考试院长、内务部长、江苏省长等职，成了十足的汉奸。但吴文俊认为当年他是很称职的校长，课程设置规范，聘请的老师学有所长，还从交通大学请来一批兼课老师。

吴先生晚年仍记得有位姓徐的交大化学老师，常在课上做实验。他的好奇心依然很足，得知徐老师有个儿子叫徐景贤（笔者小时候也知道此人），“文革”期间非常活跃，担任过上海市委书记，是“四人帮”的爪牙。后来徐景贤被判

处徒刑，刑满释放写了一本回忆录《十年一梦》，托人在香港出版了，吴先生饶有兴趣地弄到一本。徐景贤是一位文学爱好者，在位时出版过散文集、传记和报告文学。2007 年的一天，他在沙发上看书时心脏病猝发，几分钟内停止心跳。而那之前三个月，他还在《文汇读书周报》上发表了一篇书评《王蒙的“硬伤”》。



刚进交大时的吴文俊

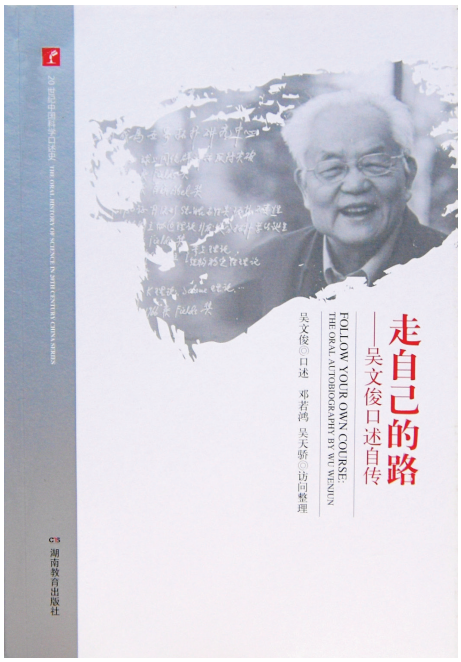
如果说初中时的吴文俊比较随性，那么高中是他真正用功学习的三年，特别是数学和英文。他尤其钟爱几何，除了初中时的那次暑假补课以外，还因为高中时一位数学老师。他的福建口音让其他同学望而却步，但对吴文俊来说并非如此。同时，他也遇到一位很认真的很会打排球的英语老师，加上父亲给他的启蒙教育和指点，他打下了良好的英文基础，不仅能看，而且会写，还阅读了不少英文小说，包括法国作家大仲马的《基督山恩仇记》《三个火枪手》等。至于听和说，则要等到他的大学时代。

值得一提的是，吴文俊念高中时还喜欢看话剧，这一爱好贯穿了他的整个大学和抗战时期，正如他所敬仰的法国数学家庞加莱少年时代喜欢各种游戏和跳舞。吴文俊那时最喜欢的演员是石挥，他演的《雷雨》中的奴才鲁贵让作者曹禺为之叹服，《秋海棠》中的名优让京剧大师梅兰芳拍案叫绝。其实，石挥只比吴文俊大四岁，因此这有点像如今追星族的孩子们。不同的是，吴文俊还喜欢看剧本，尤其是戏剧家洪深的作品，并对他的“拟真”理论颇为欣赏。

除了数学和英文，高中时吴文俊的物理成绩也不错，有一次还考了满分，他特别喜欢力学，虽说他的动手能力一直很差。与此同时，物理老师却告诉校长，说文俊之所以物理学得好，是因为数学功底好。事实上，物理学与几何学是有关联的。于是校长要求他报考交通大学数学系，且答应考上给一百大洋的奖学金。那时交大学费需要 30 多大洋，吴文俊的父亲拿不出来，于是他只好听凭学校的安排了。换句话说，当初念数学系并非他的本意。最后，他以交大理学院第二名的成绩被录取了。

三、孤岛上的大学生涯

交通大学 1921 年才正式由南洋公学改名，在中国已经算很早了。而在南洋公学时期，国人习惯把辽宁、河北、山东沿海三省称为“北洋”，把江苏和江苏以南沿海地区称为“南洋”。至于“交通”一词，据说也来源于《易经》，“天地交而万物通”，而校庆日四月八日有四通八达之意。另一方面，民国时期交大的



《走自己的路——吴文俊口述自传》

主管部门是交通部，那时候交通部的职能除了“有形之交通”，还有“无形之交通”，包括通商、外交、邮政、电信、旅游，等等，故而交通大学也为综合性大学。

说到南洋公学，中国第一个数学博士胡明复（1917，哈佛大学）便出自该校。1910 年，他与胡适、赵元任等作为庚子赔款第二届留美生，从上海乘船出发，入纽约州的康奈尔大学学习，他和赵元任念的是文理学院，而胡适起初念的是农学院，两年后也转到文理学院。回国以后，胡明复去了大哥胡敦复任首任校长的上海大同大学，创办并主持数学系，同时也在母校南洋公学兼职。不幸的是，1927 年，他在故乡无锡游泳时淹死，年仅 36 岁。否则的话，吴文俊应会结识他。

在吴先生晚年的口述自传中，曾多次提及微积分老师胡敦复。1930 年他卸任大同大学，改任交大数学系主任。1935 年，胡敦复联合北京大学的熊庆来、冯祖荀，重庆大学的何鲁，浙江大学的陈建功、苏步青等，成立了中国数学会，并被推选为首任董事局主席。而胡家老三胡刚复则是物理学家，庚子赔款首届留美生，也是哈佛大学博士（1918），他是浙江大学西迁时的理学院院长。当年竺可桢动员他出马时称，假如胡刚复不出来做院长，他这个校长也不会上任。

说到吴文俊的大学生活，笔者前不久刚读了英国哲学家伯特兰 • 罗素的传记上部《孤独的精神》，从出生写到 1921 年为止，他在大学时念的也是数学。中文版有八百多页，但是第二章《剑桥》一共才 12 页。巧合的是，《走自己的路——吴文俊口述自传》（邓若鸿、吴天骄访问整理，湖南教育出版社，2015）有四百多页，第三章《大学》也只有 12 页。本文的写作，有不少素材取自于吴先生的口述。这部自传的整理者之一吴天骄是吴老的独养儿子，现任中科院数学与系统研究院工程师。

交大的理学院开设于 1930 年，包括数理化三个系。数学系规模最小，前三届总共只招了四名学生。吴文俊是第四届，除了他还有一位宁波来的男生赵孟养，后者成了他的终生好友，有几个重要的人生机遇得益于这位赵同学的无私相助。因为人数少，三个系的同学在一起上课，吴文俊记得班上有四个女生，其中一位叫陆正的化学系女生正是那位理学院高考状元，后来她去了台湾。在理学院 1940 年届毕业照里，戴眼镜的吴文俊在第一排的角落里，显得书生气十足，而大多数同学都笑脸盈盈。

吴文俊上大一时交大在徐家汇，即如今的上海交通大学本部上课。大二时爆发了卢沟桥“七七事变”，激战三个月的“淞沪大战”后，上海沦陷了。江浙沪的大部分大学都向内地转移了，交大的主体部分也搬到了陪都重庆，但是还有一部分留在了上海的租界内。吴文俊因为是家中独子，父母让他留在了上海。吴家也搬到了租界。

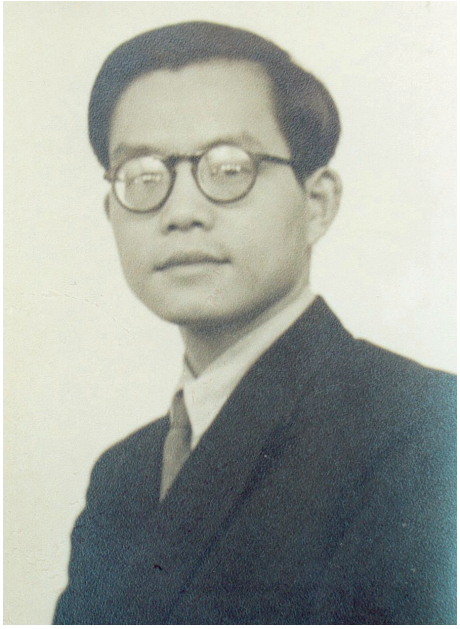
吴文俊母校上海交大校园内有条文俊路

那时上海有日租界、法租界和英租界，后面两个合称为“孤岛”。交大在法租界，吴文俊的大二下学期和三、四年级，都是在法租界度过的。

说到法租界和英租界，笔者知道一个掌故，便是如今中国的许多城市街道上都有的法国梧桐并非来自法国，或者说法国没有这个名称的树木。原来，在当时上海的法租界和英租界都栽有悬铃木，这是世界驰名的行道树，有着“行道树之王”的美誉。可是品种略有不同，英租界是二球，法租界是三球。不知是谁开的头，上海人就分别称它们为“法国梧桐”和“英国梧桐”。可能因为英租界的地盘和栽种范围不及法租界，英国梧桐渐渐被遗忘了，而法国梧桐的名称一直沿用至今，并在南北方推广传播开来。

虽说“孤岛”的教学环境艰苦、生活不安定，师资也不如以前，原本吴文俊还打算换系，但是大三开始数学系单独开课以后，他遇到一位教实变函数论的老师武崇林副教授，这门课向他开启了现代数学的大门。武老师循循善诱，还在自己家里给他开小灶，并借给他一本印度出版的英文著作《代数几何》。他终于真正喜欢上了数学，随后时光过得很快。他研读了集合论、点集拓扑和代数拓扑的经典著作，有些是德文原版。

那时候数学界流传着一句话，“打起你的背包，去到哥廷根”。事实上，在“数学王子”高斯和黎曼的母校，克莱因和希尔伯特已经建立起崭新的哥廷根学派，为此，吴文俊在交大时刻苦学习德语。对南洋公学或交通大学喜欢数学的学生来说有一个榜样，那就是浙江余姚人朱公谨（1902-1962），他小学毕业后进入了南洋公学，后来考取清华，再后来留学哥廷根，在希尔伯特的得意弟子库朗指导下完成博士论文。朱先生回国后执教交通大学等校，写过不少介绍现代数学的科普文章，吴文俊每篇必读，他对波兰学派和苏俄学派那时便有所了解。



青年吴文俊

吴文俊的学习方法是“读学懂”。所谓“读”是课本本身，“学”是指合上书自己能推导课本里的定理，而“懂”是指所有概念和定理之间的相互关系。他毕业论文的题目是《用力学方法证明帕斯卡尔定理》，多年以后，吴老写过一本名为《力学在几何中的一些应用》（中国青年出版社，1962）的小册子，便是大学毕业论文的延展。华罗庚曾赞叹，“这本书比十篇论文都好。”此书后来与华罗庚、段学复等的科普著作组成“数学小丛书”一起荣获了国家科技进步奖（2010）。等到吴文俊大学毕业，他已经有成为数学家的志向和自信心了。武老师想帮助他留校，可惜因为地位不高，又没有留过洋，说话不甚管用。

四、动荡，知遇与上路

1940 年，21 岁的吴文俊大学毕业了。接下来的六七年时间里，本可以用来继续深造或者做研究工作，却不幸遇到黑暗的岁月。他先后在两所中学任教，后来又到杭州的之江大学做代课教师。吴家在法租界只有一个大房间，因为有两个妹妹，文俊就睡在小阁楼上。日本人占领上海时，法国在欧洲已经向德国投降，因此比起英租界来，法租界相对安稳一些。

吴文俊任教的第一所中学叫育英中学，他教初一代数，每周上二十几节课，还兼教务。每天清晨他要跑到学校去点名，看同学们早自习了没有。至于教学，吴老一直觉得自己教不好“负负得正”这一基本概念，为此到了晚年仍然内疚。1941 年 12 月 7 日，发生了“珍珠港事件”。消息传来，教务室里鸦雀无声，过了许多，教务处长长叹一声“覆巢之下”。果然不久，日军占领了上海各租界，育英中学解散，吴文俊失业了。那以后，巡捕房还是照旧巡夜查房，不过换了主子而已。

有一天夜里，巡捕巡查到了吴家。他们进屋看到小阁楼，见那么狭小的空间里，还摆放着一个书架，其中一人就说，“没什么可查的，这是一个书香之家，就知道死读书。”于是，瞄了几眼就走了。那些巡夜的人本是中国人，对日本人表面上不敢违抗，可是心里还是反对他们的。而吴文俊本人因为痛恨日本人，拒绝学日语，不过后来他认为那是个错误的想法。

在家待业半年以后，吴文俊又找到一份工作，那是在培真学校，小学加初中。他还是教加减乘除，还是兼职做教务点名。那些年数学研究自然是谈不上，白天没有时间，晚上家里头挤，还要早睡，因为父亲第二天早起上班。不过在学

校里，同事们相处还比较愉快，大家无话不说。可是有一次，老师们看见他捧着一本德文书，便保持了一定的距离，因为德日同属轴心国。直到有一天，他帮助一位同事解出了一道数学难题，大伙儿又把他当成自己人了。

1945 年 8 月，日本投降了。这一年的秋学期，吴文俊在杭州的之江大学做了代课老师。之江大学是民国 13 所教会大学之一，1952 年解散。这是吴文俊第一次在大学任职，他在钱塘江畔、六和塔旁如今的浙江大学之江校区度过了四个多月的时光。他当年的宿舍是现在称为白房子的那幢可以看见钱塘江的楼房，而红房子则是外国教授的住房，曾经的主人有老校长司徒华林，他是民国最后一任美国驻华大使司徒雷登的弟弟。

1916 年，司徒华林上任之初，便下令在校内两座山坡间的山涧上架设一座独木桥，一个世纪后的今天依然存在，被浙大同学戏称为“情人桥”，有好几部电影在此拍摄。那时的校长叫李培恩，是杭州本地人，曾留学芝加哥大学和纽约大学，用英文讲授经济学。之江大学的数学估计不是太强，有一位吴文俊的同龄人张理京曾就读于之江大学，他后来翻译了不少数学名著，包括莫里茨 • 克莱因的《古今数学思想》首卷。而那会儿，之江大学校友、翻译家朱生豪已英年早逝。

虽说孕育了“陈苏学派”的浙江大学那时还没有从贵州迁回杭州，但交大同学赵孟养还是通过自己的亲戚把吴文俊的大学毕业论文呈现给了几何学权威苏步青，也许想帮助他在浙大找份工作。只是多年以后，苏步青才给吴文俊以回应，“真是篇好文章”，那会儿吴文俊早已从巴黎载誉归来。赵孟养还趁吴文俊放假回沪之际，设法把他介绍给朱公谨、周炜良两位数学家，他们分别获得德国哥廷根大学和莱比锡大学的博士学位。在看过吴文俊的一篇文章后，周炜良评论说“杀鸡焉用牛刀”。这让他明白，数学研究过程中问题的重要性。

1945 年岁末，交大总体还留在重庆，但在上海已办起了临时大学。还是那位赵同学，慷慨地把自己在母校取得的助教职位让给吴文俊。翌年春天，国民政府招考赴法留学生，也是赵孟养第一时间把消息告知老同学。那年夏天，赵孟养还介绍他去见陈省身。其实，赵同学并不认识陈省身，就像他不认识周炜良一样，而是凭着自己的交游才能和热情，委托他人代为引荐好友。这类会面有点类似于诗人，一个青年诗人拜会一个名诗人时常用这一方式。

那会儿陈省身只有 35 岁，却已经出名了，他在美国数学圣地普林斯顿做出了不起的成就，特别是给出“高斯 - 博内公式”的内蕴证明，同时引入陈省身示性类，使得“微分几何进入了新时代”。抗战胜利后他回到祖国，奉恩师姜立夫之命在上海筹建中央研究院数学研究所。陈先生住在徐家汇附近的一条小弄堂，吴文俊见到他时只回答他的提问，临别之际鼓起勇气询问数学所是否要人？答复是，“你的事我会记在心上”。果然不久，吴文俊进了数学所，地点在靠近枫林桥的岳阳路，从此他走上了数学研究的康庄大道。

筹备数学所之初，陈先生便给各大学数学系发函，希望推荐最近三年的优秀毕业生。以这种方式来数学所的有十多位，尤以浙江大学居多，此外还有西南联大、武汉大学、四川大学、中山大学和大同大学的毕业生，他们中的许多

吴文俊和恩师陈省身

人后来成为中国数学的中坚力量。在数学所，除了听陈先生讲代数拓扑外，其余时间放任自由，吴文俊的办公桌就在图书馆，他因此阅读了不少数学书。有一天，陈先生来到图书馆，他跟吴文俊说，你书看得够多了，现在应该“还债”了。

原来，陈省身说的“还债”是指写论文。吴文俊被逼出的第一篇文章是关于对称积在欧氏空间中的嵌入问题，被陈师推荐到巴黎的《法国科学院周报》（*Comptes Rendus*）上发表了。尤为重要的是，陈师把吴文俊从他擅长的点集拓扑引导到更有发展空间的代数拓扑上去了。陈省身敏锐地意识到代数拓扑在现代数学中的位置，以及即将对其他数学分支所产生的深刻影响，相信它会成为数学的主流学科。事实上，陈省身本人后来参与开创的大范围或整体微分几何，其关键性的工具正是代数拓扑里的纤维丛和示性类。

示性类理论里有一个最基本的惠特尼乘积公式，一直缺少一个严格的证明，陈先生在讲课时希望有人能够给予证明。1947 年春天，身为清华大学教授的陈省身北上讲学，他带着两个年轻人吴文俊和曹锡华一起进京。曹锡华原来就读于贵州时期的浙江大学，后留学美国密歇根大学获得博士学位，回国后曾任教浙大，随后在华东师大建立起一个新的数学据点。而吴文俊利用在清华的闲暇，证明了惠特尼公式，发表在美国最主要的数学杂志《数学年刊》上，这是他的第一个重要成就，他终于上路了。

五、法兰西的灿烂岁月

吴文俊到中央研究院以后，便把春天参加的留法选拔考试一事给忘了。没想到第二年发榜，他考中数学组第一名，另外三名是严志达、田方增和余家荣。

严志达和田方增来自西南联大，而余家荣来自中央大学（南京大学）。陈省身认为巴黎太过喧闹，建议他去法德边境的斯特拉斯堡大学师从亨利•嘉当，陈师是其父亲埃利•嘉当的学生。可是临行前，陈先生忽然想挽留他，希望他留下来一起做研究。吴文俊自然没有答应，不仅因为一切手续已办妥，更因为年轻人都向往外部世界。

在南京参加教育部两个月的培训之后，吴文俊从上海乘船出发了。航线与其他留法同学走的不完全一样，没有在马赛港上岸，而是穿越直布罗陀海峡到了伦敦，随后穿越英吉利海峡抵达法国的加来。从那里他们坐火车去巴黎，再转斯特拉斯堡。有趣的是，巴黎负责接待中法交换生的官员看到吴文俊手头有嘉当先生的邀请函，便不管专业是否对口，把其余三位也安排到斯特拉斯堡大学。其中只有严志达坚持下来，两年后他与吴文俊同时获得国家博士学位，回国后任教于南开大学，后来也晋升为院士。而田方增和余家荣次年转学巴黎大学，回国后分别任职于中科院数学所和武汉大学。

虽说吴文俊的英文和德文都很好，但他曾留学四年的法兰西的语言却没有学好。他自称自己擅长的理性思维不适合浪漫的法语，另一个可能的原因是，五年的中学教师生涯耽误了时间，到法国时他已经 28 岁了。他喜欢德语的严谨和刻板，因为那也是他的个性。不巧的是，当吴文俊来到斯特拉斯堡，亨利•嘉当受聘去了巴黎高等师范学校，把他托付给父亲的学生埃瑞斯曼。没想到阴差阳错，吴文俊因祸得福跟对了。后来的事实表明，他与嘉当之间，无论研究内容还是思想方法都存在差异，短时间内难以弥合。

在斯特拉斯堡期间，吴文俊继续研究拓扑学中的示性类问题。按照法国的习惯，导师一般不先给学生出题，而是让他们自我摸索，作出一定成果后向导师汇报。之后导师才会给学生深入的意见，甚或博士论文的题目或方向。当时，流形上是否存在复结构是大家关心的问题，而复结构存在的必要条件是近似复结构的存在。通过示性类，吴文俊证明了凡维数是四的倍数的流形均无近复结构，因此也没有复结构。这个问题的解决在拓扑学界引起的震动不小，以至于顶级权威霍普夫深表怀疑，他特意从苏黎世跑到斯特拉斯堡。结果霍普夫被吴文俊折服了，转而邀请他去苏黎世理工大学访问。

1948 年在法国斯特拉斯堡合影 (右一)

1949 年初，埃瑞斯曼认为吴文俊的成果已够博士论文了。于是，便让他着手整理。那年七月，吴文俊以《论球丛空间结构的示性类》通过了法国

1985 年吴文俊（前左一）和博士后导师亨利·嘉当合影

国家科学博士学位答辩。由于他埋头于拓扑学，离开时尚未逛过斯特拉斯堡这座城市。多年以后，他有机会重游故地，想看看当地的风土人情，可惜仍没有找到时间。笔者因为诗译者任教斯特拉斯堡大学，因此特意来玩过，还在市立图书馆做过一场朗诵会，对莱茵河畔的这座名城，尤其是中心广场四周的景色、夜晚河巷的灯火印象深刻。这里是欧洲议会所在地，而斯特拉斯堡大学是德国大诗人歌德的母校。

1949 年秋天，吴文俊来到巴黎，跟亨利·嘉当学习、工作了两年，相当于博士后。他在巴黎做了非常了不得的工作，被称为“吴方法”，成了拓扑学界名人。倒不是因为嘉当先生指导有方，这位布尔巴基学派的创始人和领导者学问自然很牛，但他做的那一套吴文俊始终不大能接受。第一次见面，嘉当拿出自己的一篇论文讲着，结果听者稀里糊涂，不知道其中的意义。嘉当讲不下去，摇摇头，“你对抽象的推理这一套不清楚，听不进去。”吴文俊猜测因为自己是陈省身推荐的，才没有被辞退。

虽然没有深入的交流和合作，但不妨碍吴文俊在巴黎做出惊人的成绩。他一面参加嘉当的讨论班，一面独立做研究。他租的旅店在第五区，即拉丁区。许多学校、研究所都在那儿，包括索邦大学、巴黎高师和庞加莱研究所。他的房间在半地下，白天很暗。好在附近有家通宵达旦的咖啡馆，叫咖啡麻油，那成了吴文俊的书房。咖啡馆对面是著名的卢森堡公园，但吴文俊没有去逛过。与许多法国同行一样，他上午睡懒觉，下午参加学术活动，夜里就到那家咖啡馆，在一个角落里思考数学问题，通常不到下半夜是不会回旅店的。

翌年春天，吴文俊已经硕果累累。他以及嘉当的另外两个学生塞尔和托姆，还有那位瑞士人霍普夫的学生 A. 波莱尔，被誉为拓扑学界的“四大天王”。他

们的工作合在一起，引起的轰动被数学界称为“拓扑地震”。其中塞尔和托姆分别于 1954 年和 1958 年获得菲尔兹奖，塞尔获奖时年仅 27 岁，迄今仍保留着最年轻获奖者的记录，他并且是新世纪设立的阿贝尔数学奖的首位得主，而托姆的获奖工作引用了吴文俊的多篇论文。晚年吴先生依然自信，在那场拓扑地震中，自己的工作震荡最为激烈。同时有一些人认为，假如吴文俊没那么早回国，他必定也能得菲尔兹奖。

那么，吴文俊在巴黎做了什么工作呢？拓扑学主要研究几何图形连续变形时保持不变的性质，也即拓扑变换下的不变量，它只考虑物体之间的位置而非距离和大小。所谓示性类，是指刻画流形和纤维丛的基本不变量，它可以不唯一，著名的有史梯费尔 - 惠特尼示性类、庞特里亚金示性类、陈省身示性类。吴文俊命名了陈类，他的工作精髓在于：其一，定义了吴示性类，用吴类表示史梯费尔 - 惠特尼示性类，计算非常容易，被称为吴（第一）公式；其二，揭示了各种示性类之间的相互关系，被称为吴（第二）公式。对此，嘉当给予高度评价，说吴的工作像是变戏法和魔术。

六、回国，荣誉与徘徊

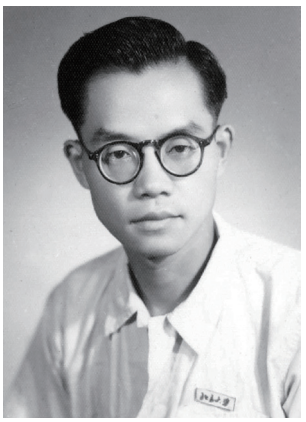
1951 年夏天，普林斯顿大学聘请吴文俊为教授。可是，当聘书寄到巴黎时，他已经在回国的轮船上了，之前他已是法国国家科学中心（CNRS）的副教授。那会儿中国已换了人间。吴文俊回国的原因应是多种多样的，笔者相信，自小接受的传统文化熏陶是主要的。那年他已经 32 岁，尚未婚娶，至于在法国的四年有没有谈过女朋友口述自传并没有交代。依照吴先生的个性，如果有的话他应该会说的。记得当年陈省身先生急着从巴黎（经美国）回国是为了娶妻，不过他那时是有通信对象的。

这次轮船是从马赛港出发，穿过地中海、红海、印度洋和马六甲海峡，原本要在香港停留，吴文俊也事先办好了英国签证。可是船到香港时，还没下船就被边防警察招呼上了另一艘小汽船，直接送到广州，从那里再坐火车回到阔别多年的故乡上海。吴文俊到北京后的第一站是北京大学，那是中国的拓扑学元老、北大数学系主任江泽涵访问斯特拉斯堡时的邀约。一年以后的 1952 年是中国大学最动荡的一年，吴文俊离开北大，到了设在清华园一幢两层小楼里的中科院数学研究所任研究员，所长是华罗庚。

1951 年吴文俊 (中) 在回国轮船上

那时数学所只有十几号人，包括远在江南的陈建功、苏步青在

吴文俊和陈丕和结婚照



佩戴北大校徽的吴文俊

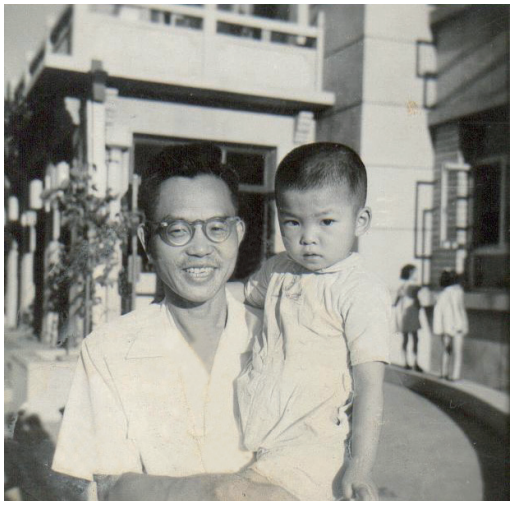
内。按照王元先生所著《华罗庚》，那时关肇直还是副研究员，冯康还是助理研究员，而陆启铿、王光寅、丁夏畦、王元、龚昇和胡和生等还只是研究实习员。吴文俊对华罗庚非常佩服，甚至超过了对恩师陈省身的佩服，认为他能在复杂的环境里做好各项工作十分不易，且很早领略到中国古代数学的优点，这也是吴文俊后来工作的出发点。

1953 年春天，34 岁的吴文俊到上海出差，经亲戚介绍，认识了在电信部门工作的姑娘陈丕和，她还会英文和法文。结果两人一见钟情，几天后（一说是半个月后）就结婚了，可谓是“闪婚”的先驱。年底陈女士调至北京，起初在六机部电信局，后换到数学所图书馆（曾任副馆长），业余时间利用她的打字技术，帮助吴文俊打印外文论文和专著。同时，接连生下了三个女儿和一个儿子，并承担了全部家务（吴先生连灯泡也不用换）。此后吴文俊过上舒坦安逸的生活，那应归功于上海女人的才德和修养。

结婚当年的吴文俊

1956 年冬天，数学所搬到动物园附近，两年后又迁至中关村。那应是 80 年代中期笔者从山东进京查阅文献资料来过数次的那幢五层楼房，如今早已经拆迁，原来的地方竖起了一幢高楼，即联想集团的“融科大厦”。但笔者无法确定，第一次到数学所图书馆时，吴夫人是否已经退休？ 1957 年以前，新中国尚有一段相对安静的时光，吴文俊继续着拓扑学研究。但由于那时只能与苏联和东欧国家交流，那里的拓扑学研究相对落后，而西欧和美国突飞猛进，因此他也感到迷惘和徘徊。

为了解决“怎样继续研究”这个问题，吴文俊做了一次对拓扑学的全面回顾和分析，并在所里做了一场学术报告。想必他想起了法国数学家、拓扑学奠基人庞加莱的名言，“如果我们想要预



左图：吴文俊喜得爱子；右图：1978 年，吴文俊先生全家福（左起：吴月明、吴文俊、吴云奇、吴天骄、吴星稀、陈丕和）

见数学的未来，适当的途径是研究这门学科的历史与现状。”在拓扑学这门“难学”里，不变量是基本研究对象，也可谓“难中之难”。于是人们降低要求，研究所谓的同伦不变量，也就是把 1—1 对应换成 n—1 对应。那是当时拓扑学界的潮流，而吴文俊却反潮流，研究非同伦性组合不变量，包括嵌入问题，建立起了示嵌类理论，成就斐然。

1957 年初，首届中国科学院科学奖公布了，这是今天国家三大奖的前身，共 34 项成果获奖，其中一等奖 3 项（二等奖 5 项），即华罗庚的“典型域上的多复变函数论”，吴文俊的“示性类和示嵌类研究”和钱学森的“工程控制论”。吴的工作被国际拓扑学界公认，一等奖无异议；华的工作比较散，有评委认为可以给三个二等奖；钱的《工程控制论》是部专著，在颁奖前一个月补上了。而钱伟长、苏步青两位前辈只获得二、三等奖。值得一提的是，吴文俊的获奖材料是八篇论文，这恰好是今天申报国家自然科学奖的论文数量。

华罗庚和钱学森那会儿已经大名鼎鼎，而吴文俊在数学界知名度也不是很高。获奖两个月以后，他便被增选为中国科学院学部委员。在此前后，他多次随科学家代表团出访社会主义国家，包括罗马尼亚、保加利亚、苏联、东德、波兰。1957 年 12 月，吴文俊结束了东德的讲学后，回到了阔别六年的巴黎，他的导师埃瑞斯曼邀请他去巴黎大学讲学，接着他应邀去里尔、布列塔尼、波尔多、格勒诺布尔等地，还回到母校斯特拉斯堡大学。

那次吴文俊去巴黎访问是有限制的，政府规定不能一个人行动，可法方又只邀请他，因此只好另想办法。刚好斯特拉斯堡有位中国留学生，就让他临时到巴黎，这样就是两个人了。吴先生在巴黎见到了老朋友安德烈·韦伊，这位数学全才也是布尔巴基学派骨干，妹妹西蒙娜·韦伊是著名哲学家。早年韦伊帮助陈省身去了普林斯顿，晚年为《陈省身文集》作序。在他自己的数论史著作扉页上，印着陈先生的书法“老马识途”。“二战”期间因为不愿当兵，韦伊坐过四个月的监狱。韦伊常约吴文俊去小饭店，其时他的兴趣已转向数论史。

1956 年，37 岁的吴文俊因其在拓扑学上的杰出成就获得当时的国家“最高科技奖”

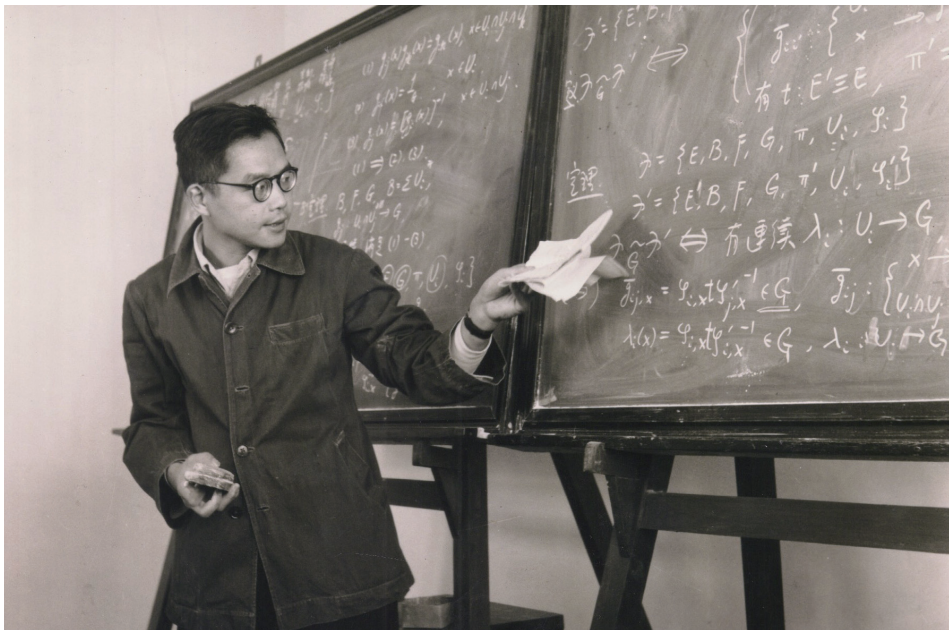
或许，吴先生后来对数学史的兴趣也与他有关。1976 年，韦伊访华期间想去大同的云冈石窟，却未被允许。

吴文俊的访问时间从原定的两个月延长到半年，他还写信申请再延长两个月，那样他就可以写成一部专著在法国出版，正好那年八月四年一度的国际数学家大会在爱丁堡召开，组委会邀请他作 45 分钟报告，他是新中国继华罗庚（1954）之后第二个被邀请的数学家。同时，吴文俊也申请让夫人到巴黎照顾他的生活。这封信除了吴先生以外，还有 12 位法国数学家的联名签署。可是，中科院外事局担心他滞留海外，不仅没有批准，反而催促其尽快回国。那会儿气氛有点紧张，数学所也以所长华罗庚的名义给塞尔和埃瑞斯曼发电报，要求其敦促吴文俊回国。

在那段时间里，吴文俊再次感到迷惘和徘徊，到底何去何从，最后还是祖国和家庭的吸引力更大。从那以后的 17 年间，吴文俊都没有出过国。1968 年初，罗马尼亚科学院来函邀请他，作为“我们科学院的客人”出席那年秋天的“代数拓扑与代数几何”会议。在数学所上报科学院的行文中这样写道，“经我所革委会研究决定：吴不去参加这个会议，并由吴本人回信婉言谢绝”，没有注明理由。院外事部门加注，“和数学所进一步了解，吴不是反动权威，……拟同意来文中的意见，请领导审批。”然后是层层加注，最后一位领导只写了两个字，“同意！”

七、“赛马”与“吴龙”

1956 年，中央提出要“向科学进军”，这才有了翌年初的首届科学奖颁发。可是不久，“反右”运动铺天盖地而来，数学所也有指标，笔者的师叔邵品琮教授就是其中的一个牺牲品。他从北京大学研究生毕业以后，分配到数学所工作，参加华罗庚、王元、潘承洞的数论小组（陈景润于 1957 年 10 月由厦门调入数学所）。因为“右派”指标没有完成，领导看他人老实听话，找他谈话，



1956 年，吴文俊在数学所作报告

请他帮个忙，先把指标完成，他爽快地答应了。没想到，帽子不是轻易能摘掉的，他被下放到曲阜师范学院，直至晚年。

吴文俊因为人缘好、成就大，没有受太大影响。接下来的大跃进，所长华罗庚也不得不提出，10 年内在 12 项数学问题上赶超美国，这则豪言刊载在《人民日报》上。可是，真正有国际水平的拓扑学等纯理论却不让搞了，又如何赶超？华老去做优选法，吴文俊也被迫研究起运筹学，经过一段时间摸索，他把目标确定为对策论，即博弈论，这是匈牙利大数学家冯•诺伊曼开创的学科。冯•诺伊曼研究的是合作对策，而纳什等诺贝尔经济学奖得主研究的是非合作对策。吴文俊感兴趣的是后者，在他的一篇科普文章里，第一次对战国时期“田忌赛马”的故事给予对策论的解释，将其归纳为“两人有限零和对策”。

到了 1961 年，时局又有了变化，多数“右派”摘帽了，中央提出“科研 14 条”，基础研究又受重视了。那年秋天，中国数学会在颐和园召开“龙王庙”会议，分别研讨数论、拓扑学和函数论三门学科。那会儿，解析数论因为有陈景润、王元和潘承洞的“哥德巴赫猜想”研究，正如火如荼，而拓扑学却是大大落后了，即便吴文俊开创的示嵌类也已经落后人家了。他果断决定，把目标对准奇点理论，并在两三年内到达了前沿，完成了两篇高质量的论文。

可是，到了 1964 年，又开始了“四清运动”（清政治、清经济、清思想、清组织），数学所的人员分批下乡，参与农村社会主义教育运动。接着，又爆发了史无前例的“文化大革命”。即便如此，1967 年数学所的一次批判会上，坐在阅览室后头角落里的吴文俊，随手翻着架子上的杂志，无意中发现一篇印刷电路的文章。印刷电路即集成电路，按在硅片（俗称芯片）上。在没有计算机的当年，布线并非易事。吴文俊发现，用他的示嵌类理论，可以很好地解决

2005 年，同 1965 年毕业的中科大数学系学生合影

这个“布线问题”。这件事又一次让他出了名，也给他提供了进一步的安全保障。

就这样，在短短的十来年时间里，吴文俊更换了四五个研究方向（犹如赛马场的马匹），那样很难做出特别重要的成就。幸好 1958 年，中国科学院效仿苏联，在北京创办了中国科学技术大学，由郭沫若院长担任校长，科学家们才纷纷做了园丁。华罗庚作为数学系主任，提出了“一头龙”教学法，即由一位教授领衔主讲带一届学生，从一年级到五年级。三条龙分别由他本人、关肇直和吴文俊领衔，后来分别称为华龙、关龙和吴龙。仅仅《微积分》这门课，华罗庚和关肇直就各自编写了一本教材，并且都正式出版了。

吴先生在科大除了教授微积分以外，还教过微分和代数几何，共七个学期。据“吴龙”班的学生、著名数学史家李文林回忆，吴先生讲课比较严谨，他一般在黑板上，首先写上讲课要点，主要内容、定理、概念和思想，然后开始推导、演绎。他的板书也是有条不紊的，从左上角到右下角，然后自己把它擦掉重来。而华先生讲课的特点是比较活，板书也比较松散，经常是东边写一块西边写一块，他还喜欢讲一些与课本无关的内容，比如“从厚到薄，从薄到厚”。

“吴龙”班最出色的学生之一是李邦河，他是温州乐清人。后来继承了吴先生的衣钵，成为他拓扑学的传人。在微分拓扑领域，李邦河发展了流形到流形的浸入理论，把浸入理论中的一个奠基性定理从最简单的流形（欧氏空间）推广到任意流形。令人惋惜的是，当初把李邦河推荐给吴先生的王启明后来不幸在美国因车祸去世，那是在 1989 年，车主是著名数学家丘成桐，拐弯时失了手，丘先生也受了伤。王启明曾在吴先生的课上指出一处错误，并指出他所依据的是哪本德文书。吴老认为，王启明成为中国数学界领袖不成问题。

等到“四清”运动开始后，教学不得不中断。数学所第一支“四清”工作

队去了吉林，第二支去了安徽，由关肇直带队，吴文俊也参加了。1965 年 7 月，他们一行抵达合肥以西六安专区的苏家埠镇，那里傍依着干涸的毖河。能做的事不多，吴文俊帮助生产队制作和填写报表，从前他当中学代课教师兼教务时干过。他似乎没做什么农活，吃饭派在老乡家里。有空他就去镇上淘旧小说，自己看也借给别人看。不料有一次走在河滩上他被人喊住，当地农民盯了他很久，还以外是“空降特务”。

将近六个月以后，数学家们被召回了北京，因为“文革”开始了。先是“破四旧”，也就是抄家。吴家也被抄过两次，第一次损失不大，只抄闲书，第二次就惨了，不过数学所的人还是不一样，被抄物品都有登记，多数书籍都还回来了。接着因为害怕，许多书信被夫人烧了，尤其是留法期间与老同学赵孟养的通信，回国时都带回来了，赵同学又把他收到的信给送来了，里面不仅记录了友谊，也有留学生活的描述。再后来，专业书籍也被遗弃了，因为“学术权威”的住房越来越小，从四室一厅到三居室再到两居室。

那时有严重腿疾的华罗庚不仅被抄家，还被多次挂牌批斗，被罚打扫数学所的厕所，这可能是因为他名气大，又喜欢批评人。而吴文俊性格温和、与世无争，头上没有戴“反动”帽子，也没有“里通外国”，虽说他在法国留学多年，还曾“滞留不归”。他也没有被关进“牛棚”，甚至可以抽身，带着九岁的独生儿子，坐火车到南方“串联”近一个月，去了许多地方，包括杭州西湖。那是在 1969 年，他们父子在杭州品尝了许多小吃，却不知有没去过知味馆或奎元馆。

八、研究中国古代数学

“文革”后期，恰逢“批林批孔”，仍不能做学术研究，否则会被说成是走资本主义道路。那会儿江青正领着搞复古倾向——穿唐装，作为数学所副所长的关肇直，适时出了个主意：研究中国古代数学。原本吴文俊对古代数学并无多大兴趣，在关先生的鼓动下，也借阅了几本书籍，首先是《九章算术》，语

吴文俊主编的国家八五重点图书规划目之一《中国数学史大系》（左），主编与四位副主编合影（右）

1988 年，李继闵与弟子曲安京在汉中望江楼前留影

言像天书。之后他读李俨、钱宝琮的书，特别是钱氏《中国数学史》。后来在旧书店里淘到元代数学家朱世杰的《四元玉鉴》。还有两位数学史家，内蒙古师大的李迪和西北大学的李继闵对吴先生帮助也很大，尤其是李继闵对《九章算术》的系列解读和阐释，让他真正领会到中国古代数学的妙处。

李继闵（1938-1993）祖籍四川新津，父亲做过川军连长。他本人出生在江西九江，青少年时身强力壮，喜欢游泳，曾横渡长江。在成都念中学时他是学生会主席，毕业时却因政审结论无法被名校录取。1958 年，他以优异成绩考入西北大学数学系，本科期间便在教授指导下，写出函数论的研究论文，经华罗庚推荐，发表在《数学学报》和《中国科学》上，成为西北地区在《中国科学》发表数学论文第一人。可是，大学毕业时，李继闵却因出身问题，留校不成，分配去了西安夜大学。

“文革”期间，夜校解散，李继闵被下放到汉中勉县插队落户。1972 年，他怀里揣着发表了的论文上访，被调回西安师范学校任教。1979 年，在方毅副总理关怀下，他终于回到母校西北大学。返回西安后，他在极端困难的情况下开始数学史研究，取得了引人注目的成就。1977 年春夏之交，吴先生偕同李文林等一干人去西安，进行为时近一个月的西北之旅，与李继闵相处多日，回北京还手绘了一幅旅行图。吴老认为李继闵是“继李俨、钱宝琮和严敦杰三老之后最有贡献者之一”，在他的支持和推荐下，西北大学拥有高校第一个数学史博士点，李继闵却不幸英年早逝。2002 年，李继闵的学生曲安京应邀在北京国际数学家大会上做 45 分报告。

吴文俊的第一次突破是复原日高公式的证明，这是三国时期的两大数学家之一——吴国赵爽（率先给出勾股定理证明，另一个是魏国刘徽）注《周髀算经》的一篇，叫《日高图说》。说的是在洛阳的平地上竖立两根有刻度的杆，高度和相距已知，然后量它们地上的影子，就可以测出太阳的高度。如果是现在，用正切函数、画平行线就可以做到，但那要用到现代数学的概念，而日高公式是在公元前秦汉初年的著作里给出的。1975 年，吴文俊复原了古代的证明，并曾以“顾今用“的笔名在《数学学报》发表文章。

之后，吴文俊又复原了刘徽《海岛算经》里“岛高”问题的证明。同时他指出了数学史研究的两条基本原理，其一是所有结论必须从侥幸流传至今的原

文革后的吴文俊再上讲坛

始文献得出，其二是所有结论应按照古人当时的知识、辅助工具和惯用的思维去推理。继《九章算术》之后，中国古代数学的另一高峰是秦九韶的《数书九章》，他的大衍求一术（中国剩余定理）和增乘开方术（秦九韶算法）是中国数学的重要创造。吴先生认为秦九韶的成就特点在于其构造性和可机械化，他用小计算器即可按照秦九韶的方法求出高次代数方程数值解，而大衍求一术的算法十分有效，远超西方人的方法，且条件较为宽松。

吴文俊认为，代数是中国古代数学中最为发达的部分，是一部算法大全，有着世界上最早的几何学、最古老的方程组和矩阵。《九章算术》中解方程的消元法比高斯更早，且已经有了正负数的概念，甚至有了实数理论。他还认为证明定理没什么意思，就是玩意儿而已。我们的祖先注重实际问题的解决，数据与数据之间必有某种联系，这种联系是通过方程式呈现的。他还认为，求最大公约数，古代中国的“更相减损术”很漂亮，比西方人的因式分解方法要强。

笔者以为，吴先生所指的中国古代数学是指 17 世纪以前。因为自从微积分诞生以后，中国数学在计算方面也明显落后于西方了。无论如何，从下文我们可以看出，吴先生正是从对中国古代数学的探究中获得启示，推动了他的数学机械化事业。也因为如此，吴先生觉得当年的回国选择正确无疑。这让笔者想起曾任北京大学副校长的化学家傅鹰先生（1902-1979）说过的话，“一门科学的历史是那门科学里最宝贵的一部分，因为科学只能给我们知识，而历史却给我们智慧。”

吴文俊还依据钱宝琮的观点，提炼出一幅“数学发展简图”，他认为西方数学有两个根源，一是从中国经由印度，二是从希腊经由阿拉伯。他认为祖先最伟大的数学发明是位值制，我们在商朝便有了正式的十进制了，就像汉字是从商朝的甲骨文开始定型。在吴先生的复原证明论文发表以后，有一天李文林

2006 年参加第九届数学机械化高级研讨班

在数学所走廊碰到他，“我看到您的文章了，很受启发。”“准备着不同意见呢。”吴先生回答说。多年以后，李先生接受访谈时指出，“对中国古代数学的看法，我想，到现在也许还是不一致的。”1986 年，在伯克利国际数学家大会上，吴文俊应邀作了《中国数学史的新研究》的特邀报告。

值得一提的是，“文革”后期，在尼克松首次访华前后，包括杨振宁、陈省身等在内的华人科学家接连回国。还有一些美国顶尖数学家也来中国讲学，其中就有普林斯顿大学和麻省理工学院的同行。在这样的形势下，数学所和北大联合举办了微分几何讨论班，吴文俊又恢复了拓扑学研究，且杀了一个漂亮的回马枪。他提出一种新的基本不变量，即 I* 度量，并引进了可计算性的概念，从而丰富了研究内容和技巧。这项成果后来由吴文俊执笔，德国斯普林格出版社于 1987 年出版，列入黄皮书“数学讲义丛书”（*Lecture Notes in Mathematics*）第 1264 号。

九、几何定理的新证明

每个人都有自己得意的事情，晚年吴先生回顾自己一生的成就，把拓扑学的工作只排在第三位，而把中国古代数学的研究排在第二位。或许有人说，这是对策论的一种应用，因为他的拓扑学研究（尤其是示性类和示嵌类方面）早已为世人所公认，而拓扑学也是数学中优雅和高深的代名词，以至于理论物理

改革开放后吴文俊再访法国

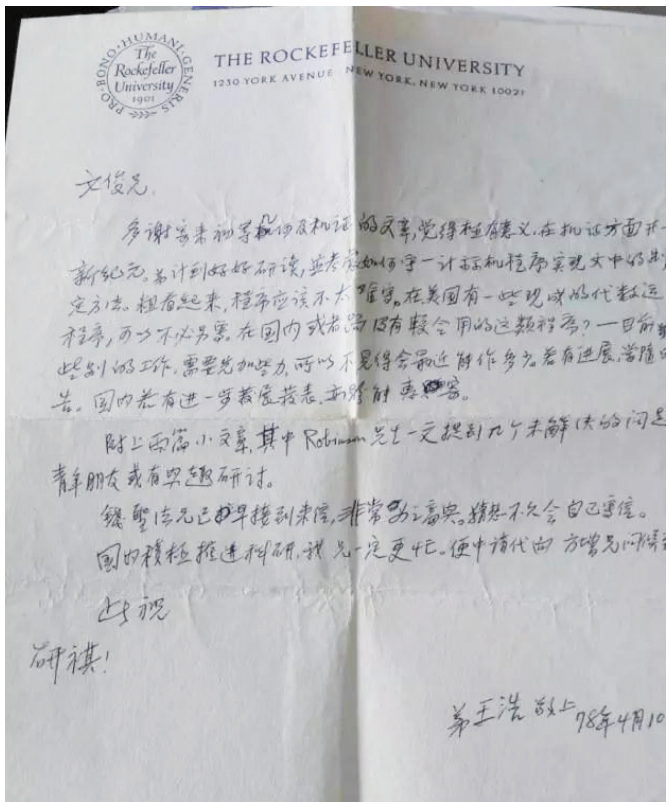
1980 年代初吴文俊和运筹学和系统工程学专家关肇直（右）、许国志（左）合影

学家们也纷纷来沾光。无论如何，大家已经猜到，吴先生最引以自豪的是他晚年的数学机械化研究，这方面的成就在他心目中是排在第一位的。

现在我必须谈到关肇直，他是吴文俊最信任的同事和领导。关老是天津人，吴老的同龄人，毕业于燕京大学，也一起到法国留学，原本他是去瑞士学哲学，结果却留在巴黎庞加莱研究所攻读数学了，他的导师是泛函分析创始人之一弗雷歇。可是，因为关肇直是地下党员，新中国成立以后，没有读完博士便启程回国。他在担任行政职务的同时，在纯粹数学、控制理论和系统科学领域都取得了重要成果。正是他，授意吴文俊发表陈景润的哥德巴赫猜想研究成果。1980 年，关肇直当选为学部委员。他长期担任数学所领导，强调科研立足国内。他在数学所成立了控制论研究室，1979 年又分出成立了系统科学研究所。

据说系统所的成立是趁数学所所长华罗庚和党委书记吴新谋出国访问期间，由钱三强副院长来宣布的，关肇直和吴文俊分别担任正副所长。华先生回国后，托人找吴文俊，希望他回到数学所，而吴新谋一直不赞成他做机器证明，认为那是“离经叛道”，希望他继续从事拓扑学研究。关肇直却支持他，放话“吴文俊想干什么就让他干什么。”显而易见，原数学所的关系有些复杂，对此王元先生在《华罗庚》里有专节描述，本文按下不表。

吴新谋是我国偏微分方程的奠基人，他与华罗庚同龄，江苏江阴人，早年毕业于中央大学，比关肇直、吴文俊更早留法。他娶了一位法国太太回国，子女众多，其中一对双胞胎男孩名文北和文中。1974 年，哥俩因在使馆区行窃被捕，公安部要求至少枪毙一个。两人各不相让，最后抽签决定文北上刑场。焦虑的母亲通过北大西洋公约组织副参谋长的兄弟，请求法国政府调解未果，


THE ROCKEFELLER UNIVERSITY
1230 YORK AVENUE NEW YORK, NEW YORK 10021

王浩 1978 年写给吴文俊的信

但文中返回了法国。作家史铁生曾以此为素材写过小说《兄弟》。80 年代，关肇直、华罗庚和吴新谋相继病故。1998 年，数学所、系统所与同宗的应用所、计算所合并，成立了今天的数学与系统科学研究院。

早在 1971 年，便有所谓的“三个面向”，即面向工厂、农村和学校。吴文俊当过中学老师，领导建议他去中学教书，但他却要求到工厂做没有做过的事。于是他去了北京无线电一厂，在那里第一次看到计算机。输几个数，按几个键，一个微分方程的解和曲线一下就出来了，吴文俊深为震惊。其实，早在计算机诞生不久，波兰数学家塔斯基就提出了机器证明的想法，那是在 1948 年。塔斯基证明了，在初等代数和几何范围内，任意命题都可以用机械方法来判定。可是，要真做起来却没那么容易。

1959 年，济南出生、西南联大毕业的美国华裔数学家王浩在 IBM 计算机上实现了怀特海和罗素《数学原理》一书中数百条逻辑命题的证明，用时仅三分种，从而首次验证了计算机进行定理证明的可行性，他并率先提出了“数学机械化”（Mathematics Mechanization）的概念。不过，几何定理的机器证明比起逻辑命题的机器证明要复杂许多。美国有很好的计算机，美国人尝试用塔斯基的方法，却一直没有成功。吴文俊受笛卡尔思想的启发，通过引入坐标，把几何问题转化为代数问题，再把它机械化。

一般来说，几何定理都是由假设推出结论。无论假设还是结论，在引入坐

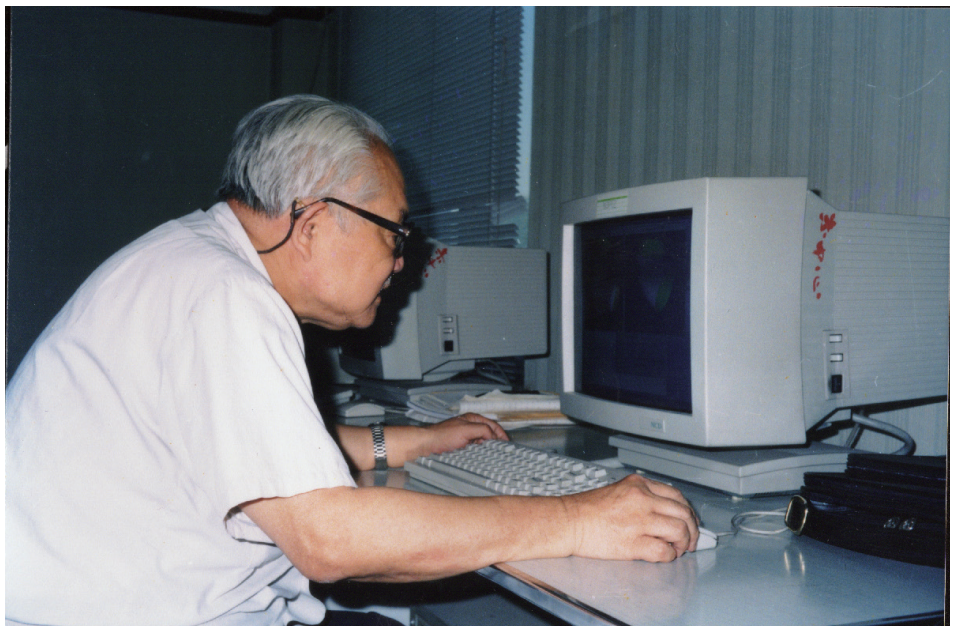
2002 年吴文俊为数学机械化 973 项目做报告

标以后，都可导出一组方程式，可分别称之为假设方程和结论方程。机器证明的要点在于，验证假设方程的每个解都是结论方程的解。然而，这一现象并不总是成立，换句话说，假设方程的解只有一部分是结论方程的解，另一部分不是。因此，必须区分假设方程解的两个部分，并作出合理的几何解释。为此，还要对假设方程进行处理，使之由杂乱无章变得井然有序，以适应机器证明的需要。

所谓几何定理机器证明的吴方法，是一种利用代数几何方法的构造性理论。代数几何是数学的一个分支，经典代数几何研究多元多项式的零点，现代代数几何则用抽象代数（主要是交换代数）的技巧来解决与零点集合相关的几何问题。在交大念书时武老师曾借给过吴文俊印度人写的《代数几何》，60 年代中期他在科大开设了这门课程，边学边教边研究。1977 年春天，没有计算机的吴文俊用手算验证了他的机器证明初等几何定理的方法！那就像医生在自个身上试验一种新发明的疗法一样，需要艰难细致的工作。第二年年底，他又把这一方法推广到微分几何的机器证明。

要证明更多的几何定理，自然需要计算机，且计算机性能越好，可以证明的几何定理就越多越深刻。吴文俊用的第一台计算机是意大利手摇计算机，随后有了一台他工作过的北京无线电一厂生产的计算机，然后是一台访问数学所的老外赠送的袖珍计算器。再后来，他终于正式拥有美国产的一台像样的计算机，那是他用二万五千美元外汇在美国买的。此事得益于早年留法的声学所所长汪德昭院士，他告诉吴先生科学院李昌副院长何时何地会出现。

有了计算机以后，还得自己学会编程序。年近花甲的吴先生开始学做程序员，他学会了各种计算机语言，从最早的 Basic，到后来的 Algol，再到



吴文俊在使用电脑

Fortran。80 年代刚有机房时，上机是要分配时间的，同时还要登记。人们发现，那几年吴先生的上机时间在系统所遥遥领先。甚至计算机汉字激光照排技术发明人王选院士也曾回忆道，有一年农历除夕晚上八点多了，他在数学楼外散步，发现吴老还在机房上机。

吴方法非常成功，许多定理一下子就证出来了。吴老给科大的博士生讲课时，既讲希尔伯特的《几何基础》，也讲机器证明的原理。有一位叫周咸青的旁听生来自计算机系，他后来去了美国德克萨斯大学奥斯汀分校攻读计算机，系里几个头头都做机器证明，可是不怎么成功。周同学就给他们介绍吴方法，一试果然灵验，于是传遍美国。之后“出口转内销”，1990 年，在国家科委和中国科学院支持下，成立了“数学机械化研究中心”，吴文俊出任主任，上头一下子批了 100 万元。后来，又以“数学机械化与自动推理平台”首批进入国家“973”项目。

十、暮年：辉煌与宁静

2001 年，吴文俊和“杂交水稻之父”袁隆平一起荣获了首届国家最高科学技术奖。一方面，这是他的成就应得；另一方面，也是他的高寿所至。那年吴老 82 岁，身体康健，也很健谈。他与袁老套近乎，“农业与数学向来关系密切，数学是起源于农业的。”的确，这是数学史的常识，牧羊人计算牲口的只数产生了数学，正如诗歌起源于丰收的祷告。吴先生透露，袁隆平多才多艺，会跳踢踏舞。在此以前，吴老曾在 90 年代先后荣获第三世界科学院奖、陈嘉庚奖、首届香港求是基金会杰出科学家奖和厄布朗自动推理杰出成就奖。

2006 年，吴文俊又在香港领取了奖金 100 万美元（这 100 万美元是与芒福德

吴文俊 2002 年与实验室部分人员合影（站立左三为高小山）

分享，2016 年起增至 120 万美元）的邵逸夫数学奖，这是最让他引以为傲的奖项之一。这个由宁波籍香港电影制作人邵逸夫先生设立的科学奖项被誉为“东方的诺贝尔奖”，三个奖项中有两项是诺贝尔奖遗漏的，即数学和天文学，还有一项是生命科学与医学。据说是杨振宁先生想出来的，他是这个奖的设计师。数学方面，2004 年的第一届和 2005 年的第二届评委会主席杨振宁都邀请吴文俊担任。

第一届评委有普林斯顿高研院院长格里菲斯和法国高研院院长博规农，中国评委由中科院院长路甬祥和台湾中研院院长李远哲推荐。路甬祥推荐的是杨乐，获奖者是陈省身；而第二届获奖者是证明费尔马大定理的英国数学家怀尔斯。第三届评委会主席是黎巴嫩出生的英国大数学家阿蒂亚，评委有北大张恭庆，格里菲斯和分别来自日本、俄国的菲尔兹奖得主广中平裕和诺维科夫。获奖人是吴文俊和美国数学家芒福德，他们都从传统的数学——代数几何和拓扑学出发，转向与计算机相关的新领域，“代表了未来数学的发展倾向，也为数学家的将来提供了一个新的行为模式”。

从 1979 年开始，吴先生又频频出访讲学，足迹遍布美国、加拿大、东西德、意大利、瑞士、韩国、新加坡、澳大利亚等国。他也曾数度返回巴黎和斯特拉斯堡，与昔日的导师、同学和朋友重聚。在吴老口述自传附录的年表中，曾提及 1993 年访问台湾，而 1996 年只记载：攀登计划“机器证明及其应用”验收通过，并获准延续，更名“数学机械化及其应用”等事项，没提那年冬天参加台湾数学年会。那次笔者也有幸受邀，与吴先生一同出席，且我们是仅有的两位大陆同行，我们常私下里聊天，并一起游览了日月潭。

翌年，笔者有机会以“数学与艺术”为题申报霍英东青年教师基金，打电话请吴老写推荐信，没想到他居然同意了。记得吴老的信是用蓝笔写的，大意是数学与艺术本有许多关联之处，但人们通常视而不见，现在申请人大胆“杀”

吴文俊在办公室

出一条路，值得支持云云。那封推荐信的副本后来找寻不到了，但吴先生的“杀”字记忆犹新。遗憾的是，那次申请以失败告终，笔者后来也没有机会见到吴老，聆听他的教诲。直到 20 年以后，教育部设立科普著作专项基金，笔者又一次申报了这个题目，终获成功，也算可以告慰吴老先生了。

1984 年，吴文俊担任了为时四年的中国数学会理事长。促成中国数学会加入国际数学联盟，同时并没有把台北的数学会驱逐出去，而是两者作为一个整体——中国，这是各方都能接受的结果。他还借中国数学会成立 50 周年之际，邀请留学巴黎时的导师嘉当访华，还陪他游览西湖，并认为自己机器证明的思想最初来自于导师，当年听他讲课时不是太听得懂，但每次讲到一定的时候，就变成“机械化”了，一步一步的，非常刻板，该怎么样就怎么样。

卸任之前，吴文俊帮助确定理事长一职不得连任，这个传统延续至今。2002 年，国际数学家大会在北京召开，吴先生担任大会主席，在开幕式上他引用了拿破仑的一句话，“数学的发展与国家的繁荣密切相关。”吴老与纳什做了公众报告（不占特邀报告名额），他演讲的题目是《中国古代数学的实数系统》。他还从他荣获的国家最高科技奖奖金中拨出 100 万元建立了“数学与天文丝路基金”，鼓励支持有潜力的年轻学者深入开展古代及中世纪中国与其他亚洲国家数学与天文学沿丝绸之路交流传播的研究。

无论是作为数学机械化中心主任，还是作为天元基金学术领导小组组长，吴先生都非常重视应用。早在 1994 年，他就力主把金融数学作为优先资助的研究领域，这方面的领军人物彭实戈教授如今已赫赫有名。在数学机械化的应用方面，则首先选择了数控机床，从并联到串联，在机床里嵌入一个核心算法，以此提高机床的效率、加工速度和质量。这一产品已在国内外得到推广。实际上，这也是计算机辅助设计（CAD）的机械化。吴先生有几位弟子做得很好，

1997 年访问澳大利亚

2000 年访问泰国

尤其是高小山，按照吴老的说法，是他的接班人。

在小山教授看来，广义的数学机械化就是把数学问题用计算机来实现，通过计算机来做数学。吴先生做的是代数机械化，虽说还有拓扑机械化、代数几何机械化等等，但是那很难。目前国际上最成功的是数论机械化，也称计算数论，后者最直接的应用是密码学。依照笔者的研究经验，计算机之于数论学家，就如同望远镜之于天文学家，可以说非常重要。于是各种程序包应运而生，美国有家著名的计算数学杂志叫 *Mathematics of Computation*，每期都会刊发计算数论方面的若干文章。

吴老拥有一颗玩童的心。1979 年，60 岁的他在美国还想坐灰狗长途巴士横穿美洲大陆；1997 年，78 岁的他在澳大利亚让一条蛇缠绕在自己身上；2000 年，81 岁的他在泰国骑在大象的鼻子上微笑。与此同时，吴老喜欢安静，他酷爱闲书和电影，看闲书是小时候跟父亲学的，看电影的爱好则是在法国养成的，它们是两种幻想的方式。有时候，他会待在影院里连续看好几部片。甚至 90 多岁了，也会趁家人不注意，独自一人坐公车去商场看电影，看完以后还跑到星巴克喝咖啡。有一次，他因为打不到出租车，便拦下所里一位年轻同事的座驾，请求带他去电影院。

与吴先生共事多年的国家基金委许忠勤教授认为，“无论做学问还是做人，吴先生都是做得最好的。他是中国数学界的榜样。”北大程民德先生讲过，“吴文俊这个人大智若愚”。对此南开胡国定教授表示赞同，“他是有大智慧的人，表面上总说自己不懂啊，不清楚。其实很多事情他清楚得很，很明白。”在笔者看来，吴先生也是很懂得感恩的人。正因为如此，他才是有福之人，每逢人生的关键时刻，总会遇到贵人指点或相助。在如此复杂多变的形势下，他安然度过了漫长的一生。而每当有人说起天才，吴先生会嗤之以鼻，说自己是个笨人，同时补充道，数学是笨人学的。

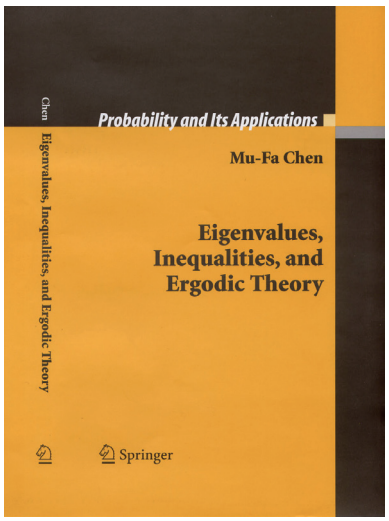
2017 年 6 月，杭州彩云居

编者注：
感谢高小山教授、吴天骄先生提供珍贵的图片。

作者简介：蔡天新，曾是少年大学生，山东大学理学博士，浙江大学数学学院教授、博士生导师。同时也是一位诗人、随笔和游记作家，新近出版《数学简史》（中信出版社，2017 年 10 月）。

陈木法访谈录

主持人：D. Khoshnevisan　E. Waymire
访谈日期：2016 年 5 月 10 日　地点：美国犹他州盐湖城犹他大学
欧阳顺湘　杨尊明 / 译



陈木法英文专著《特征值、不等式和遍历理论》于 2005 年由施普林格出版社出版

摘要

2016 年 5 月 9-11 日，作为特邀演讲者之一，陈木法教授应邀参加在犹他大学举办的“概率论前沿会议”。陈木法是中国最杰出最有影响力的在世概率论学者之一。他是中国科学院院士、第三世界科学院院士以及美国数学会会士。他和他的学生王凤雨一起，为 Ricci 曲率有正下界的流形上拉普拉斯算子的特征值的依赖于曲率下界、流形维数和直径的精确估计发展了有力的概率方法。2005 年他在施普林格出版社出版专著《特征值、不等式和遍历理论》，是他在这个深刻又有挑战性的数学领域所作卓越贡献的有力说明。陈木法教授主要在中国生活、工作，偶尔出国游历讲学。他此次行程为我们更多了解他个人以及他过去五十年来在概率论领域研究的专业历程提供了机会。下面是两位会议组织者对他的访谈。

主持人简介

Davar Khoshnevisan 是犹他大学数学教授（http://www.math.utah.edu/~davar/），Edward C. Waymire 是俄勒冈州立大学数学教授（http://www.math.oregonstate.edu/~waymire/）。Khoshnevisan 教授是研究多参数随机过程方面的专家，出版了名著 *Multiparameter Processes*（Springer, 2002）。近年主要研究随机偏微分方程，有著作 *Analysis of Stochastic Partial Differential Equations*。

Waymire 教授主要从事概率论和随机过程及其应用研究，合作出版了名著 *A Basic Course in Probability Theory*（Springer, 2007）；*Stochastic Processes with Applications*, (SIAM , 2009)。他曾担任 *Annals of Applied Probability* (2006-2010) 和 *Bernoulli* (1994-2006) 的主编，并于 2013 年至 2015 年担任国际上最主要统计概率学会 Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability 的理事长。

陈木法（左）在接受 Khoshnevisan（中）和 Waymire（右）的采访

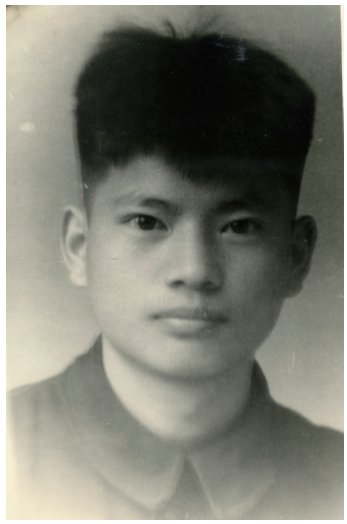
DK/EW：你是在中国农村还是在城市里长大？

陈：我出生于中国南方的一个小村庄，我离开家乡去北京上大学前，全村只有 16 户人家，大约 80 来人。在那之前我从没见过火车，也从没坐过汽车；我们那里只有自行车，那真的是个小地方。

DK/EW：你读的学校怎么样？

陈：我读的是县里最好的中学之一：惠安第一中学[1]。我特别幸运，在我读中学时，一些特别好的老师来到了我的学校教书，其中一位来自厦门大学，另一位来自清华大学，两人都是助教。清华大学是中国的顶尖大学。这两位老师对我影响都特别大。

因为我小学的算术成绩不好，刚进中学时我想要提高我的数学能力。我开始自学数学，但实际上我不知道怎么学数学，所以我只是找习题，每



陈木法（左：1965 年高中毕业照；右：2006 年中国科学院院士官方照，北京）

[1] 在中国的教育体系里，中学包括 7 年级到 12 年级。

2010 年 1 月，北京师范大学数学科学学院春节团拜会期间，陈木法（右一）与严士健、郝炳新、王梓坤、吴品三（左起）合影（马京然提供）

天练习解题。

DK/EW：当时你多少岁？

陈：14 岁。那之后我读了一些由中国著名数学家写的科普小册子，内容有如 π、排列组合、图论等。我用了一两年时间来读这些小册子。后来从清华大学来的老师告诉我说："这样不行，你不能只读这些小册子，你应该去学学微积分。"所以我就开始自学微积分了。我在中学花了几年时间学习微积分和代数学。我很幸运能遇到这样的老师。

所以就算是现在，每当我回顾往事，我仍然惊讶于我在中学时期，以及在贵州省的六年间竟能做那么多事情。在后一段时间内，我做了许多工作：学了 Loéve 的书《概率论》[2]，访问了五十多家工厂来推广数学优选法，教了中学，翻译了两本书，写了数篇研究论文。六年里我做了这么多事情。

DK/EW：你自学 Loéve 的书吗？

陈：是的，当然，我自学这本书。Loéve 的书是我的老师严士健老师推荐给我的，我当时对概率论这个大领域了解不多，不知道选什么书。我的老师是一个概率论学者，在那之前的六、七年前，他就曾建议我去读威廉·费勒（Willian Feller）的《概率论及其应用》第一卷的前半部分。那时（1966）我刚从大学一年级跳级到二年级，严老师是我的指导老师。我花了三个

[2] Michel, Loéve（1963）: *Probability Theory*, 3rd ed. Princeton, New Jersey, USA: D Van Nostrand. pp. xvi+685.

1990 年，陈木法在人民大会堂举行的霍英东教育基金会成立五周年庆祝会上发言

月来读这本书。1972 年我去贵州后发现自己需要更多训练，所以我又写信向老师寻求帮助。

在某种意义上那是非常奇怪的情况，你们可能无法理解。从 1966 年春天开始跟着严老师起，我们之间有很多交流。但是在几个月后，文化大革命就开始了，我们失去了自由，我和严老师数年无法公开交谈。

DK/EW：这时你多少岁？

陈：我想是 20 岁。三年后（1969 年），我们去一个工地参加建厂时，和其他 40 多名师生住在同一间房。全部睡地铺，我的老师就睡在我身边，但即使是这样，我们也不得交谈。我们没有交谈的自由。

DK/EW：你是说你们不能谈论数学？

陈：我们什么都不能谈。只有特别特殊的情况下，比如当四下无人的时候，我们可以互相说话。当我到贵州之后，我想加强训练，提高能力。所以我写信给他，寻求指导。我不知道他花了多少时间，去旧书店买了 15 本书给我，大概花了 2 美元。那时几乎所有的科学家都不允许做学术工作，所以他们会把自己的书贱卖给书店，因此所有的旧书都很便宜。这些书中就有一本是 Loéve 这本书的第三版。我花了两年半时间来读这本书。有段时间我每天只能自学半页，但是那是特别好的训练。有了这样的经历后，一些资深的概率论学者对我说，我已经做好做概率论研究的准备了。

DK/EW：你知道伯克利的陈省身吗？

陈：当然。有一天陈先生给侯振挺老师的信中，附了一信给我，建议我去伯克利跟随 Jack Kiefer 学习。Kiefer 是优选学（这是华罗庚先生命名的，英文名称为 Optimization Theory）中直接寻优法（华先生称之为优选法）

2015 年 6 月“马尔可夫过程和随机模型”（暨庆祝侯振挺八十寿辰）会议期间陈木法与侯振挺（右）

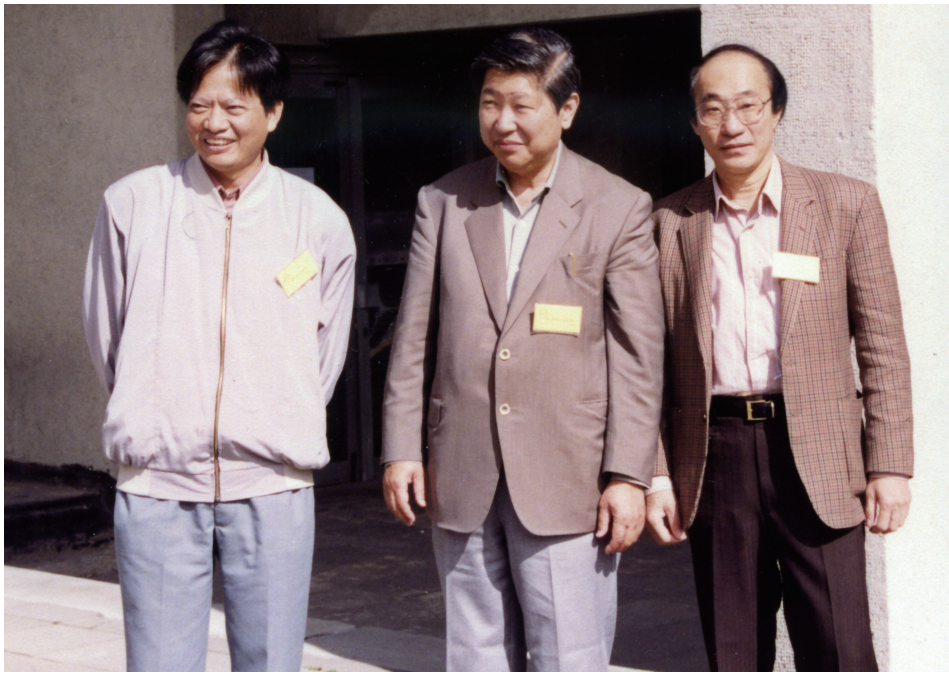
的创始人之一。陈建议我去和 Kiefer 学习优选学。但是，在那段时期，我正在概率论的道路上顺利前行，所以我不想改变方向了（笑）。没准我说得太多了（更开心的笑）。实际上，我确实花了些时间在优选学上，写了四篇相关文章。

DK/EW：你对优选学的兴趣和你在工厂里的工作是否有联系？

陈：是的。从中学到大学，我一直在自学数学。我离开北京去贵州的两个月前，我去听了中国顶尖数学家华罗庚的演讲。华罗庚在当时的环境下，很难做学术研究，所以他到工厂里作报告教工人们优选法。我的一位同学要我去听华的演讲。他是非常著名的数学家，我很幸运能听他的演讲。我受到了很大的震动。他举了很多很好的例子来说明如何用这种数学方法来改善生产条件（如配方配比）并取得显著结果等等。所以当我分配到贵州，也许第二天吧，我就急切地去找对优选法感兴趣的工厂。要知道在那个时代学校停课多年，教师不能搞业务、做学问，有些老师就花时间学习如何制作家具。工人们告诉我说他们需要数学，因此需要我的帮助。我通常步行来回，后来，因为需求多了，会开车来接我，一天工作结束后再开车把我送回家。这在那个年代是一个很感人的故事。人们需要数学，这就是我坚持做数学的原因。然而那时的社会完全不鼓励科学研究，那真的非常可怕。我想，这或许对你们来说很难想象吧。

DK/EW：那么你人生的下一个阶段是怎样的呢？

陈：我读完 Loéve 的书之后，很幸运地见了侯振挺老师的一篇新文章。侯振挺教授是一位概率论学者，他在离贵州不远的湖南工作。1974 年，侯老



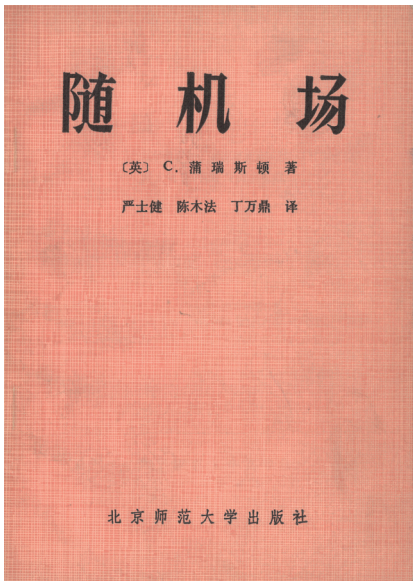
1993 年，参加维尔纽斯第 6 届概率论与数理统计国际研讨会的亚洲代表（左起：陈木法，M. Fukushima, Louis Y. Chen（陈晓云））

师发表了连续时间马氏链 Q 过程的唯一性准则，特别是非保守情形。保守情形是 G. E. H. Reuter 在 1957 年解决的。但对包括非保守情形的更一般情形有“杀死”情形，唯一性的证明就更难了，直到 1974 年才被侯老师解决。1975 年，我联系到了侯老师，开始学习马氏链。一年后我得到机会去访问他。我在湖南的省会长沙呆了两个月，非常非常有趣。每天我们研读钟开莱先生关于马氏链的书，不过不是在室内。我们是去外边的山上。因为当时不那么自由，我们每天多少有点神秘地在山上研读钟开莱先生的书。我把这本书翻译了大约一半。

Thomas Liggett

Frank Spitzer

Roland Lvovich Dobrushin



严士健、陈木法和丁万鼎译蒲瑞斯顿著《随机场》(北京师范大学出版社，1982)

2009 年，英国斯旺西大学授予陈木法荣誉教授晚宴（左起：Niels Jacob 数学系系主任，陈木法，Richard B. Davies 常务副校长）

DK/EW：钟开莱先生是在那个时期访问中国的吗？

陈：他在 1977 年前后来到中国。文化大革命结束后，人们正寻求新的研究方向，他给了我们非常重要的建议。一天他在北京的中国科学院做演讲，我的导师严士健教授参加了，钟开莱先生介绍了俄罗斯 Dobrushin 学派的新研究方向，叫做随机场。我在 1978 年从贵州回到北京，开始了近一个学期的对随机场理论的学习。后来我们看到了 Tom Liggett 的几篇文章，了解到 Spitzer 学派（我们这么称呼的），正在研究粒子系统。因为我们在做时间连续马氏链的研究，所以粒子系统和我们的联系更紧密。那是最开始的一步，从那时开始我终于有了能让自己全身心投入到数学研究中所需要的条件。

DK/EW：Frank Spitzer 学派的人去过中国吗？

陈：来过，我们之间有深厚的友谊。

DK/EW：R. L. Dobrushin 学派也是这样吗？

陈：当然，1988 年，Dobrushin 到我们那里访问交流了 45 天，我也访问了他和他的团队。我现在有很多俄语书。

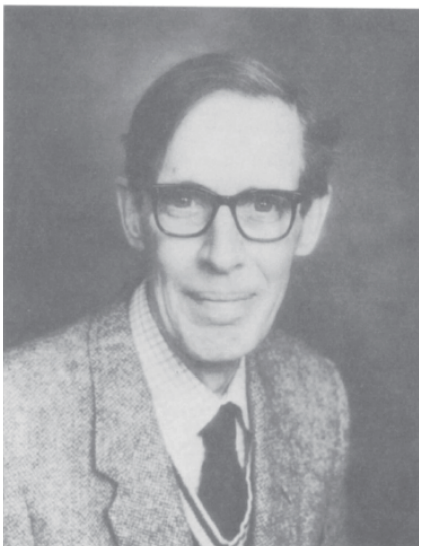
DK/EW：你也读俄语书？

陈：是的，但是现在读得不多了。我还记得我去莫斯科那年冬天下了很大的雪。Dobrushin 花了半天时间陪我去商店买了很多书。最后他带我去一家餐厅，他很自豪的说那是莫斯科第一家私营餐厅。我们还有一个由两国国家基金委员会共同资助的研究项目，团队的成员曾为此互访了二、三年。

DK/EW：你第一次去访问 Dobrushin 是 70 年代吗？

陈：实际上，是数年后，准确的说，是在 1988 年年末。我 1978 年才刚刚回到母校北师大读研究生。

关于 Spitzer 的团队，1984 年，Spitzer 到我们那里访问了 45 天。在那期间他身体不太好。该怎么说呢，或许是我们让他讲太多课了。他开玩笑说“我现在变成一个讲课机器了”。我现在对这件事仍感到十分抱歉，我们只是想向他多学点东西。



Harry Reuter（1921-1992）

DK/EW： 你提到了 G. E. H. Reuter。你也见过他吗？

陈： 是的，我在剑桥见过他。我参加了 1987 年 4 月那里举办的概率论国际会议。他对马氏链理论做出了巨大的贡献，所以我非常尊敬他。我问他，也问一位了不起的数学家 David Kendall，如何做研究。我向每一个学有所成的人请教问题，因为，你们知道，我靠自学。所以我每见一个资深的人都会寻求建议，我也寻求你们的建议。当我问 Reuter 怎么做研究的时候，他说他的导师 Littlewood（他与 Hardy 和 Polya 合著了《不等式》）告诉他，在做研究之前什么都不要看。我总觉得没听够他的指点，但是我记住了他的建议。

DK/EW： 看起来您吸取了很多经验，并将它们用在你的工作中。甚至在你今天的演讲中，我们也能看到，从优选法开始一直到马氏链、量子场论、相互作用粒子系统和随机场理论。

陈： 是的。这是因为我没在大学受过好的教育。某种意义上这使我有更多的自由四处问问题。举个例子，我从没学过计算数学（计算机）。我以前没听说过今天所讲的算法。我现在关注它的唯一原因是我想知道计算机在计算最大特征对子的时候为什么如此快速。所以我想要理解他们的算法。因此我开始尝试，我的首次实践是基于我在概率论理论上的研究，其结果让我非常激动。这促使我关注矩阵特征对子的数值计算。我进入计算机领域也就很自然了。

DK/EW： 中国是否有“大数据”概念的出现？在统计学里，在我们这，大数据是个大事件。

陈： 幸运的是，我很自豪我今天的演讲里也谈到了大数据（PageRank）。有时候我觉得“大数据”这个词太过时髦了。应当说，其内蕴和外延都不太清楚，富有挑战性。

我相信降维的思想是有用的。我们在这方面确实有一些经验。

首先，当我们研究指数遍历速率时，我们利用好的耦合与好的距离来将高维降低至一维。

其次，我们研究的相互作用粒子系统是无穷维数学，但我们只用几个参

2007 年北京师范大学概率论国家创新研究群体在北京主办第 5 届马氏过程及相关问题国际研讨会，前排居中者为 M. Fukushima

数（温度的倒数、相互作用率、格点的维数）。从这种意义上讲，我们是在低维情形。进一步我们可以将这个问题降至一维。文章《连续自旋系统的谱隙与对数 Sobolev 不等式》[3] 中描述了一个特别的例子。在这里，人们可以看到如何用一维的结果描述无穷维模型中精确的收敛速度的主阶。当然，维数的降低依赖于具体模型。我们暂时还没有降维的通用技巧。正如之前提到的，在 70 年代，我在五十多个工厂里和工人们一起做优选法试验，所以我们至少处理了五十多个项目。你们可以想象，每一个项目都有多个变量，因而都是一个高维问题。对每一个项目，我和工人讨论降维。这很依赖于工人们的经验。幸运的是，我们发现每一次到最后只要考虑一维就足够了。更幸运的是，通过最佳搜寻，对每一个项目，我们需要的实验不超过五次 。

DK/EW：你的故事非常有趣。你是否带过很多研究生呢？

陈：多年前是这样。当我回到大学读研究生的时候，发现我已经提前完成了大部分研究生需要做的工作，因为我已经研习过 Loéve 的书了。很快，尽管不是正式地，我开始负责帮我的导师指导其他研究生。后来很多年我都在

[3] Mu-Fa Chen, *Spectral gap and logarithmic Sobolev constant for continuous spin systems*，Acta Math. Sin，New Ser. 24:5，2008.

2002 年，陈木法受邀在北京国际数学家大会作 45 分钟报告（左起：王凤雨，方诗赞，Bernard Schmitt, 陈木法，毛永华，张余辉；方和 Schmitt 为来自法国的访问学者，其他为陈的同事）

做这件事。有几年我每周用两个下午参加讨论班，讨论四个研究方向，我最多时指导着 11 个访问学者、博士生和硕士生。那确实是很重的负担。但我现在年纪大了，不再带那么多学生。目前我只有两个博士生和两个硕士生。我的研究团队很幸运，我们叫概率论创新群体[4]，是国家自然科学基金委资助的数学方面的一个创新群体，被连续资助了九年，一直到 2010 年。我想你们会容许我说我的团队在我们国家是比较有实力的。

DK/EW：在中国现在就业机会好吗？

陈：是的，至少到目前为止还是。这不仅是对概率论方向的毕业生而言。对统计学专业的毕业生，大部分去工业领域工作，小部分在大学里工作。现在，大学需要很多学生——很多概率论和统计学专业的研究生。我们还没能培养足够多的学生（笑）。

DK/EW：能在这样的地方真不错（笑）。这是健康的标志。

DK/EW：在你自己的数学工作中，有没有什么对你来说最特殊的让你非常高兴的事？

陈：当然有。我给你们说两个例子。第一个例子是我们对无穷维数学的研究。我们从局部的、有限维数学开始。我们手上有许多来自非平衡统计力学的模型，至少 16 种。首先，我们需要证明局部过程的唯一性；物理学家们对这不感兴趣（笑）。接下来，比如，对于高维带跳马氏链，怎样证明

[4] 参考网页 http://math0.bnu.edu.cn/probab/

2009 年，陈木法在北京钓鱼台国宾馆出席何梁何利基金会颁奖会

唯一性呢？唯一已知的理论是我们要解一个齐次方程，当这个方程只有平凡有界解（即零解）时，这个过程就是唯一的。在高维情况，这个方程有无穷多个变量。我不晓得怎么去解这样一个方程。我在这个问题上花了五年时间，最终发现了一个强有力的充分条件，它覆盖了所有我知道的例子与模型，所以它应该是足够了。但是，数学上的，我们想知道这个条件与必要条件有多大差别。所以我又证明了相反的一边，即这个条件在所有可计算的情况下是必要的。更一般的情况我就不晓得了。

那是 1983 年，我刚从美国回到中国。所以这个故事发生在 30 多年前。我惊喜地发现，就在几个月前，荷兰的一位研究员证明了我的充分条件对于一大类马氏链都是必要的。现在我的充分条件对马氏链已变成充要条件了。这个故事还没结束，因为我的条件对抽象状态空间也是充分的，但目前为止，只对离散状态空间是必要的。虽然如此，问题也不大，因为充分条件往往比必要条件更为重要，因为充分条件更为实用。我最近，就是几个月前，刚刚发表了一篇文章，题目是《Q 过程唯一性的实用判别准则》[5]。我在这篇文章里讲了这个故事，也讲了如何对高维马氏链应用我的准则。一言以蔽之，就是“用距离”。这是一个非常好的结果（笑）。这是第一个例子。

第二个例子来自于我对第一非平凡特征值的研究。我在 1991 年发表了第

[5] Mu-Fa Chen, *Practical Criterion for Uniqueness of Q-processes*，应用概率统计，31(2): 213—224, 2015.

一篇相关文章。那时，人们只能对两三个例子精确地计算马氏链生成元的主特征值。这个结论基于刚刚提到的文章的主要定理：生灭过程遍历速率（在概率论里我们主要用之于描述指数稳定性）实际上就是生成元的第一非平凡特征值。如果你们看一下这篇文章，再和我今天讲的[6]做一下比较，你们就明白我们从那时开始已经走过了多远。在我的主页有四卷文集，记录了 25 年来我们的漫长征程。

另外，考虑几何情形，此前我或许在这里做过一个关于黎曼几何的报告。我和我以前的学生，王凤雨（现在他相当有名了），发现了在黎曼流形上拉普拉斯算子的第一非平凡特征值的一个新的变分公式。这是很令人激动的，因为人们在此类问题上努力了多年，而我们的公式包括了大多数已知结果。你们知道曾获得菲尔兹奖的几何学家丘成桐吗？他的一个成就就是特征值的估计。我们的公式幸运地涵盖并且改进了很多已有的结果。

DK/EW：你是怎样开始对那个问题感兴趣的？你当时在读丘成桐的工作吗？

陈：是的。一开始，我想用第一非平凡特征值来描述相变过程。我从 Tom Liggett 那里学到了这个想法，也从 Richard Holley 和 Daniel Stroock 那里受到了启发。我忘了说，我和他们在多年间有过很多接触。

1982 年，陈木法在美国科罗拉多州博尔德落基山上滑雪（D. W. Stroock 摄）

DK/EW：Holley 和 Stroock 也去过中国吗？

陈：Holley 好像还没有去过，但 Stroock 去过多次。Stroock 是我在美国访问时的导师。从他那里，我学到了 Malliavin 分析、大偏差和很多其他东西。他访问过中国许多次。我还安排过 Tom Liggett，Richard Durrett 和 Frank Spitzer 访问中国。1988 到 1989 年，南开大学陈省身研究所举行概率统计年特别年。在那段时间，他们之中有两人在中国。所以，我们在与美国概率论学者的交流中收获很大。或许你们该记下这句话（笑）。

DK/EW：这会被记录下来的，我希望。我们也会记住它！（更多笑）

DK/EW：特别的，在那个时期，你懂几何吗？你是否必须学几何？

陈：因为陈省身先生的缘故，当时几何在中国很流行。所以我学了几何理论

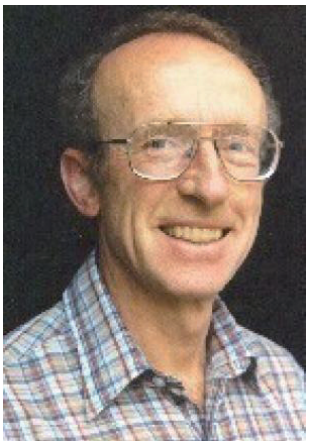
[6] 参考陈木法在“概率论前沿会议”的演讲。

中的基础要点。一个几何学家曾到我所在的学校开了一个短期课程。我去听了他的课，那是我第一次学了一些几何。第二次是当我来这里（美国）访问 Stroock 的时候。他也讲了一些几何方面的课。这些都发生在 80 年代初期。在那之后，我有选择性地学习几何。

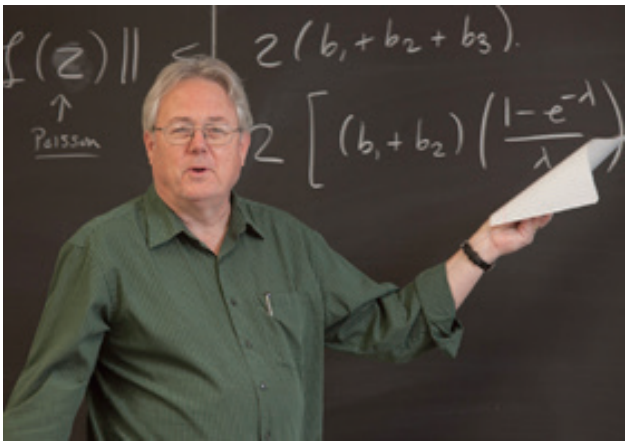
我的主要问题是解决相变问题。一开始我只有有限的工具，我不知道往哪里走。所以我转向其他数学分支。我去学习丘成桐写的一本黎曼几何的书的第三章。那一章着重讲了第一特征值，我想从那里借用一些工具。幸运的是，我们从完全相反的方向，用概率技巧重新得到了这些结果。有一些几何学家在这个问题上不同意我们（注意你写下的东西——笑），因为他们觉得他们知道所有的事实而我们的方法没有改进这些结果。所以我们有了一个数学挑战。后来我花了三年来做进一步研究。我一直在想还有什么可以改进，哪里可以进一步。但我们不知道往哪里走。这个难题一直困扰着我们，直到有一天我意识到我们可以找一个好方法来模拟特征函数。事实证明这很重要。这是我迄今为止对特征值问题的最初贡献。在我们找到特征函数的模拟方法后，故事就结束了。（笑）由于长时间不能解决这个问题，我感到疲惫，有时甚至想把我已有的结果先发表。但我不理会这种心情，出去抽烟。在那时我常抽烟，这会让我平静下来。有一天，意料之外地，当我抽完烟，突然一个新想法来了。注意，这决不代表我鼓励抽烟。实际上我已经戒烟很多年了（笑）。

在那段时期，我的学生王凤雨在英国。他回来后，我用十分钟左右的时间把这想法告诉他。有时人们称之为耦合与距离方法；我们需要理解如何选择距离。换言之，我们需要理解如何模拟特征函数，这就是关键所在。当所有事情都做完后，一切都变得很自然。我曾对我的学生讲，我现在想中断研究了，因为得到这样一个结果太不寻常了；我太兴奋了！（笑）我的一个同事（他写了一本关于半鞅的书）知道我的故事后也非常激动，以至于他告诉我，在随后的演讲中，他常常忍不住要讲耦合方法。（笑）

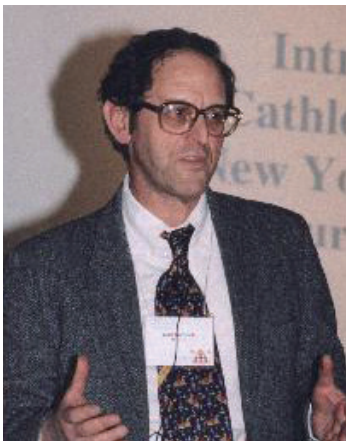
DK/EW：你有对学习几何有兴趣的概率论学生吗？



Richard Holley



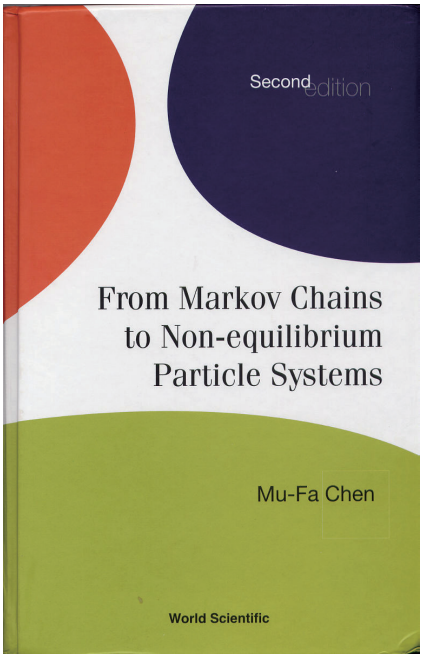
Richard Durrett



Daniel Stroock

陈：当然。我进入几何领域的原因之一是在英国有些专家，例如 Wifrid Kendall 在研究同样的课题，他将耦合方法应用到了许多情形。而且后来，我发现就在美国，（Michael）Cranston 的工作，也在研究同样的问题。我意识到我们应该做得更好（能走得更远），因为我对这个数学工具玩得很熟。所以我让我的学生开始（研究这个课题）。你们知道，从梯度估计过渡到特征值不等式不难。

但是你们知道，很多时候，我不完全满意我的研究范围。这是因为，在我的一生中，我只主要研究了两个方向。一个是相互作用粒子系统，尤其是反应扩散过程。另一个是各种稳定性的收敛速度、特征值的界等等。我多次想要离开这个领域，但都没能逃掉（笑）。



陈木法英文专著《从马尔科夫链到非平衡粒子系统》（第二版）2004 年出版

DK/EW：吸引力太强了，这是可理解的（笑）。似乎可以公平地说，无论如何，优选法总是在背后发挥作用。

陈：确实如此。例如，当我们研究特征值的估计的时候，我们需要理解什么样的耦合是最优的。我花了六年时间才真正理解。这个问题和概率测度上的各种距离都有关。把我们的耦合理论，与统计学里的“copulas”，以及 PDE 领域中的最优运输 (optimal transport) 相比较，看看它们的相似与不同，或许是有趣的。

DK/EW：你认为中国概率论在不远的将来的发展会怎样？

陈：我认为概率论在中国正在迅速发展；我看不到有什么问题。我们现在有很多人比以前更关注科学。例如，在 70 年代人们更关心吃饱的问题。现在中国的生活有了很大改善。虽然总还有一些小问题，近年来也有很大的进步。例如，十年前，北京每个人都骑自行车。现在大多数家庭有私家车……真的有很大的变化。

DK/EW: 你觉得科学的其他领域也都如此吗？你是否认为中国科学的未来是健康的？

陈：我觉得是，一切都在改进，它理应变得更好。

DK/EW：你是否有出更多书的计划，或者类似的项目？

陈：我想如果我要写书，我确实可以就我今天所讲的内容写一本书。但我还是觉得有些累了，我在 1991 年写了第一本书，92 年出版。我花了整整一年在这本书上，有十个跟我上课的学生帮我校对。第二版是 2004 年写的，

陈木法全家福：前为陈的外孙女 Audrey Su，后排左起分别为陈的女儿陈嵘嵘、夫人罗丹和女婿苏韶宇

后来出版商让我写第三版。我拒绝了（笑）……写书是一件很累的工作。

DK/EW：这取决于你有多少时间。如果没有时间压力之类的问题，写一本书还是值得的。

陈：是的，或许过几年，等我退休之后。

DK/EW：你自己排版自己的文章吗？

陈：我几乎所有的东西都是自己排版的。我曾是中国一个推广 TeX, Mathematica, Maple 和 Matlab 等新数学工具的工作小组的负责人。不幸的是，Matlab 不肯把软件低价卖给我们让大学使用。Mathematica 还好，他们对每所大学每年只要 1000 美元。Maple 很友好。实际上，我是中国最早使用 TeX 的人之一。多年前有些人是从我这里得到 TeX 软件。多年间，在我们数学系，我们有一间专门的房间用于 TeX 的排版。你们也是自己排版吗？

DK/EW：是，现在这是必须要做的。

陈：现在每一个数学家都非常感谢 D. E. Knuth 的 TeX 系统。这对我有特别的意义，因为在过去很多年里，我曾不得不手抄所有东西。我因为手抄了几本英语书，所以书写很好。我们在 1966-1976 年间无法买书或借书。例如，有一天我在北京图书馆预约了四本书。我们当地自己的图书馆把这些书给我，并让我一个月就还。一个月读完这些书是不可能的，所以我决定手抄一本。书的作者是 K. T. Parthasarathy，书名是《度量空间上的概率测度》，一本非常好的书。我决定用十天抄完这本书（笑）。十天里，我每天抄 30 页。这就是我擅长书写的原因（笑）。

DK/EW：我听说你还把很多数学书翻译成了中文。

陈：是的。但是大部分我们没有出版。我们只是油印了那些笔记，在同事中

传阅。我现在手上还有一些副本。

DK/EW：数量很大吗？

陈：当然了。这是从 1972 年到 1976 年。在接下来的几年里，大约 1978 年，甚至 80 年代初，我们仍然经常手抄文章。复印机或许是在 80 年代末才流行起来的。

DK/EW：工作量确实很大。

陈：是，但是他让我成为了一个好书写员（笑）。

DK/EW：你看起来有很好的语言能力。这是从小就培养的吗？

陈：真谈不上好能力，但下过苦功。我应该告诉你们我是自学的英语。我经历了很困难的时期。在中学和大学的前两年我只学俄语。那个年代，对整个中国而言，外语就是俄语。在一个老师的建议下我开始学习英语。我曾问我的老师，搞数学不懂英语行不行，这位老师是位急性子，他立即答道："根本不行"（笑）。我只能偷偷自学英语。一开始我借了一本英文数学书，一个单词、一个单词地查字典。因为我不知道怎么发音，只好一个字母、一个字母地背。当我记了两三百词的时候，再这样继续下去变得非常困难。所以我再去问同一个老师，学英语是否可以不讲英语。他又立刻答道"那不可能"（笑）。不懂发音就根本记不住。所以我借了一本自学英语的书。那本书教我如何用汉字发音念英语，所以每天我都用汉字拼音读英语。多年后，我在中学教书时，每天我都读 Loéve 的英文书。学校里一个英语老师很惊讶，因为除了我之外，周围没有人用英语学科学。她让我给她读一段听，我读完之后，她说她一个词都没听懂（笑）。几年后，我作为研究生进入大学，将英语作为一门外语正规地学习。有一节课，因为老师看了我的作业……我跟你们说过我书写很好……老师认为我可能英语很好。所以她问了我一个问题。问题是："What's your name?"（"你叫什么名字"）。我听不懂问题是什么（笑）。所以原谅我：在我的报告中，我的英语不是很好。

DK/EW：在你的报告中吗？你的英语很不错。

陈：谢谢。有了一些经历后就很不同了。例如，我在美国呆了 15 个月，还在英国呆了一年。在那之后，我的英语有很大提升，不过还是很有限的。

DK/EW：你曾在美国的哪里？

陈：科罗拉多州。我觉得我在美国旅行不够多。这是我第三次到犹他州，所以很感谢你们。

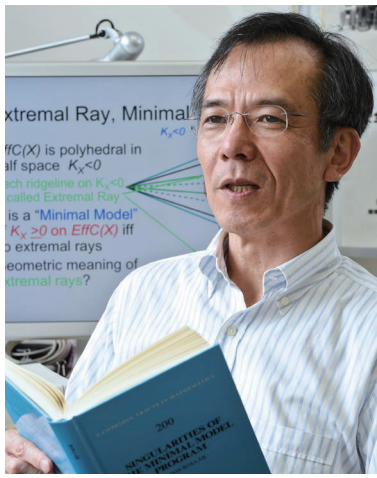
DK/EW：我们应该感谢你。我们很希望你能来访问我们更多次。

陈：谢谢。

更多内容可参考陈的主页：http://math0.bnu.edu.cn/~chenmf/，例如其中的《感谢老师》和《小传》两文。此文英文的概要以 A Conversation with Mu-Fa Chen 为名发表于美国数学会的《美国数学会记事》（*Notices of the American Mathematical Society*），2017 年 64 卷第 6 期，616-619。

致谢：
本刊感谢两位主持人以及美国数学会允许本刊转译此文。译者非常感谢陈木法院士和毛永华教授的仔细修订。

译者简介：
欧阳顺湘，北京师范大学数学系学士、硕士，德国比勒费尔德大学博士，现于南方科技大学任教。
杨尊明，南方科技大学 2015 级本科生。



以画家的方式做数学

森重文访谈录

吴 帆 / 译

编者按：森重文（MORI Shigefumi）1951 年出生于日本名古屋，1978 年获得京都大学博士，之后任教于名古屋大学，1990 年后任职于京都大学数学研究所（RIMS）。森重文自 1980 年代起因关于三维多样体的系列研究，影响了之后数十年代数几何的发展。他确立了多样体上的极小模型理论框架（minimal model program, 或称森重文纲领）。他于 1990 年获得菲尔兹奖，并于 2015-2018 年成为国际数学家联盟（IMU）的主席，这是第一位来自亚洲的国际最高数学组织的领导人。

《数学讨论班》由远山启与矢野健太郎创刊于 1962 年，是日本一本很有名的数学科普期刊，主要介绍大学数学和现代数学，面向的读者群是大学生。2012 年，为了庆祝创刊 50 周年，刊物特别推出了纪念特辑，分为“讲述数学这 50 年“和“我记忆中的过刊旧文”两部分。第一部分共有六个访谈，分别讲述代数几何、费马大定理、低维拓扑、有限群、现象与数理、函数论的半个世纪历程。本文就是六个访谈的首篇，采访森重文。

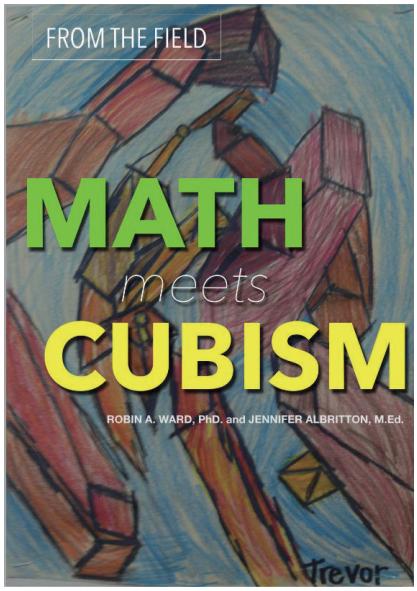
译者按：哈茨霍恩 1969 年与森重文初次相遇的时候，森重文还是刚刚从名古屋东海中学升入京都大学理学部的大一新生。哈茨霍恩初到日本时恰巧首先在名古屋落脚，尔后来到京都。9 年后森重文完全解决了断言“切丛丰富则为射影空间”的哈茨霍恩猜想（完整表述：若定义在代数闭域 k 上的 n 维非奇异射影簇 X 具有丰富切丛，则 X 同构于 k 上 n 维射影空间），取得京都大学理学博士学位。朝向完全解决的第一大步，即猜想的 3 维情形，是森重文 1977 春与隅广秀康共同作出的，合作的文章发表在京大数学杂志上。1977 年夏森重文赴哈佛访问，担任助理教授，教学工作相当紧张。次年暑假顿然松弛下来，很快就得到了关键的突破，论文《带丰富切丛的射影流形》发表在 1979 年的《数学年刊》上。森重文与哈茨霍恩终生保持了紧密的交谊。从不缺乏传奇与逸闻的森重文也说，“如果当初进了东大，大概就与菲尔兹奖无缘了”。人生的际遇如此奇妙，确实如向井茂所言：“不禁令人感到其中深厚的因缘”。

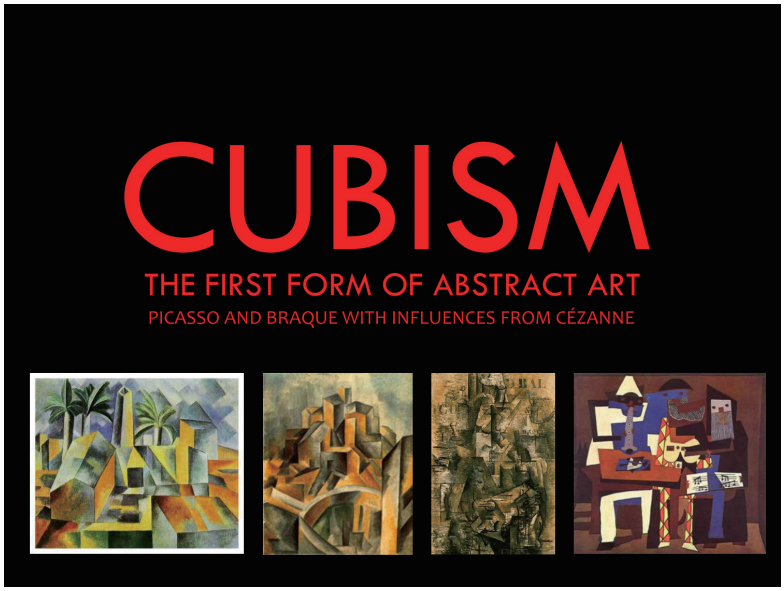
在本访谈中森重文追忆了自己一辈子治学最关键的若干片段，读者或许能从中受到启发与激励。

引言 @ 访谈正文（2012 年 8 月 6 日）

对于代数几何，人们在脑海中有怎样的形象？我们就从这个问题开始吧。

我个人的感觉，代数几何是抽象画。虽然代数几何中研究的图形称为“代数多样体”[1]，可是这并不能实际地描绘出来。因此代数几何使用文字与方程来作数字式（digitally）处理，抽出特征来研究。这样看来，与立体主义不乏相通之处。所谓立体主义，就是将对象物分解为球体、锥体等基本形状加以表现的画法。





虽说立体主义谈的是绘画，也即模拟式（analog）世界，可是就“用简单的数据表现对象”这一点说来，不仅数学，许多科学或许都在某种意义上是立体主义。就连经济学，虽然看不到整体图景，可也用各色指标来明示特征。从对象物中抽出某些东西，就变得容易理解了。在这个意义上，经济也有与立体主义相通的侧面。

与之相对，在微分几何的情形，因为具备曲率等尺度与工具，仿佛使人可以直接触摸到空间，所以能够以具象画的形式描绘对象物。我感觉微分几何真可以栩栩如生地看到。代数几何则不然，我想因为怎么都看不到整体形象，所以抽象化的必要性就更高了。

那么，代数簇可以如何表现呢？在我个人看来，虽然代数簇本身无法直接看见，但是通过“抽象化”这道滤器，可以看到像顶端尖锐的冰淇淋的锥形筒。

[1] 译者注：日语中将给人以具体形象的、引发侧重分析的联想的 manifold 与令人联想到代数侧面的、感觉抽象的 variety 都译作“多样体”。如果同汉语一样区分译为“流形”和“簇”，恐怕就不容易引起本文所述的混同观感。此处译作“代数簇”的话不能传达原文的涵义，后文一概译为“代数簇”。

也就是说，以代数簇这样看不见的事物为研究对象，将它描绘在画布上的话，我会把它画成锥形。

我想谈谈关于法诺簇的回忆。

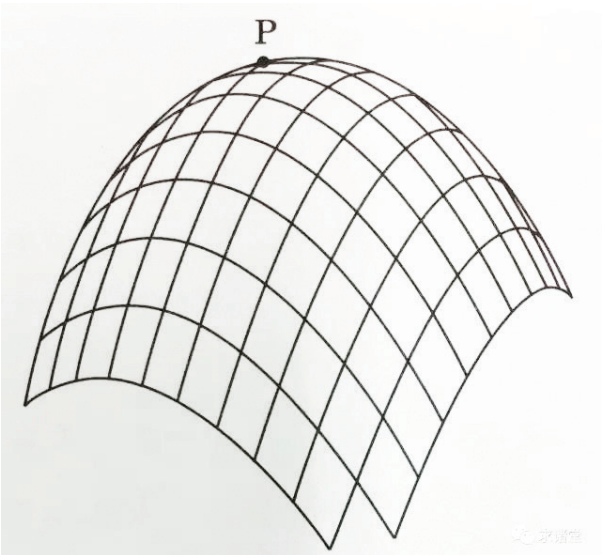


图 1-1 正的弯曲

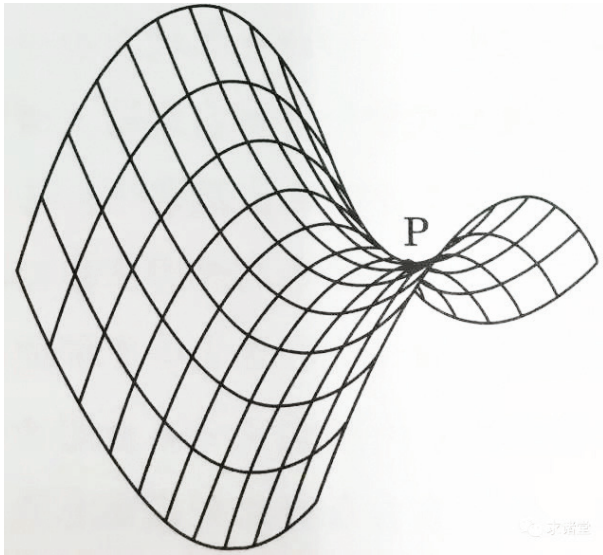


图 1-2 负的弯曲

在微分几何中若要测量曲面在点 P 的弯曲状况，那么有所谓（在点 P 处）高斯曲率的概念，其形象如图 1 所示。图 1-1 像乒乓球那样朝曲面的一个方向弯曲或者突出，此时高斯曲率为正；反之，图 1-2 如鞍形那样弯曲，高斯曲率为负。一般型代数簇是上图 1[2] 在某种意义上的高维版本，包括众多代数簇，多到分不完类。

图 1-1 的高维版本是法诺簇，法诺簇没有那么多，有分类的可能性。其在 3 维情形的分类，我与向井茂一道完成了。那时出现了形形色色复杂的锥形，“这里的边缘是什么？”带着这样的疑问，得到了立方体削去一个角那样的图形，那时我总是感觉触摸到了法诺簇一样[3]。

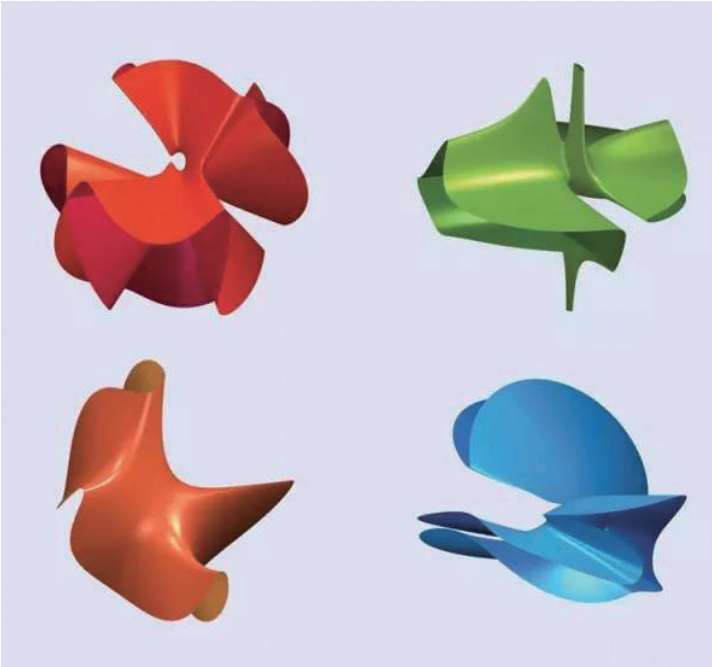
1. 从解决哈茨霍恩猜想开始

所谓哈茨霍恩猜想，是说若某代数簇处处都如图 1-1 那样有正弯曲，则其必为射影空间。法诺簇本身就很特殊了，其中更特殊的是射影空间。哈茨霍恩猜想就是如何刻画射影空间的问题。

哈茨霍恩猜想起初是由哈茨霍恩在 1969 年作出的，并且他本人证明了维

[2] 译者注：作者是指图 1-2，也即负曲率情形。

[3] 译者注：尽管森在竭力传达他做研究时的直观感受，可毕竟是相当抽象的学问，我也不得要领。



代数几何界网红，妖娆多姿的法诺簇[4]

哈茨霍恩（Robin Hartshorn, 1938-）于 70 岁生日会议上

数不大于 2 的情形[5]。

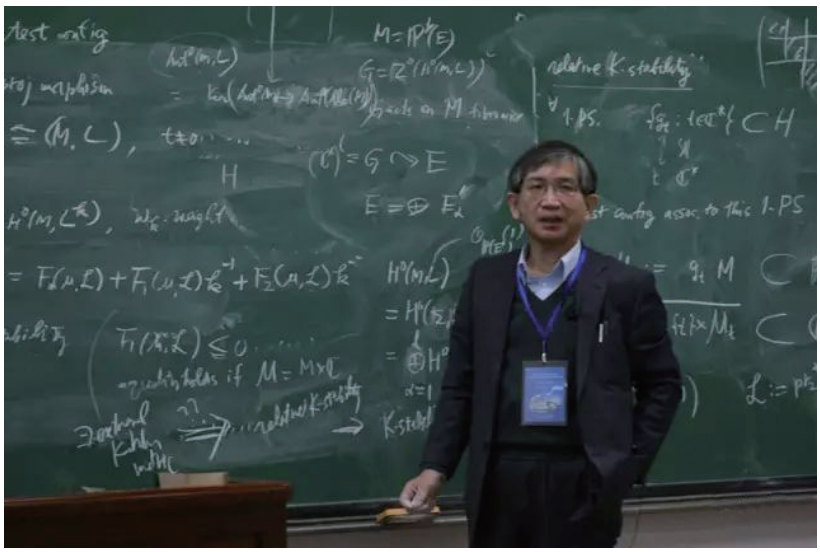
所谓维数，就是独立变量的个数。在这种情况下是 $n-1$。任意代数簇都可以通过双有理[6]的变量替换，变换成超曲面。原先代数簇的维数就规定为这个超曲面的维数。通常把 1 维代数簇叫做代数曲线，把 2 维代数簇叫做代数曲面。

我得知哈茨霍恩猜想的缘起是通过满浏俊树的论文，该文证明了比哈茨霍

[4] 译者注：以微分几何中曲率的观念来看，对应于零曲率的卡拉比 - 丘流形，法诺簇相当于正曲率的情形。由于弦论认为这些形状是组成宇宙的基本构件，Kollár 的徒弟、意大利数学家 Corti 提出了雄心勃勃的法诺簇周期表计划，企图将 3、4、5 维法诺簇一网打尽——1 维法诺簇双有理等价于射影直线，2 维法诺簇双有理等价于两条射影直线的乘积或射影平面。附带提及，“法诺曲面”一词有两个几乎矛盾的含义：当它指二维法诺簇时，常被称为德佩左曲面；也可以指称光滑三次三维簇中直线的模空间，一张一般型曲面。

[5] 原注 1: 代数簇的维数容易解释的情形是超曲面。所谓超曲面，就是由一个多项式定义的代数簇，比如 $x^2_1+\cdots+x^2_n=0$.

[6] 原注 2：在图形上积分的时候常常要做变量替换（例如通过变换 $x=u$，$y=uv$，$z=uw$ 将变量 x, y, z 替换为变量 u, v, w）。当变换及其逆变换（在本例中即为 $u=x$, $v=y/x$, $w=z/x$）都是由有理式给出时，在几乎所有点处都是一对一的，即便存在无法定义变换或逆变换的点，也不影响积分的结果。像这样在两个方向上都是有理的变换称为双有理变换。



满浏俊树在南开

恩猜想稍弱的 Frankel 猜想的 3 维情形[7]。

读到文章时灵光一闪，就与隅广（秀康）先生一道证出了 3 维情形的哈茨霍恩猜想，那是 1977 年的春天。然而决定更高维数的分类与构造困难重重，虽说有兴趣，可那时一筹莫展。得不出更进一步的结果，就搁置下来。1977 年夏季去了美国哈佛大学，次年夏天终于完成了剩余情形的证明。

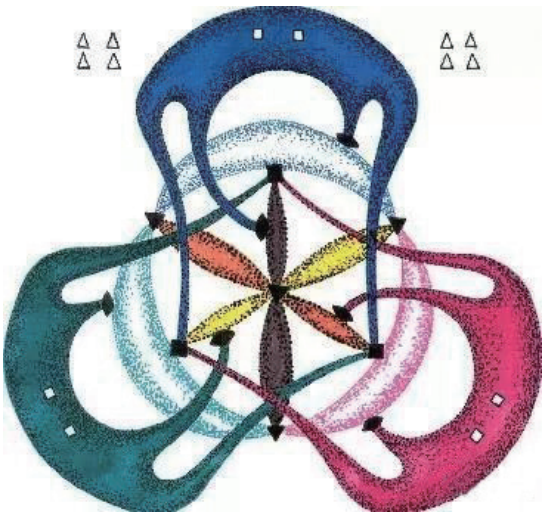
这问题怎么解呢？直接一下子解出来不太现实。于是先以解出中间阶段的问题为目标，也即基于哈茨霍恩猜想的假定[8]，即使一时证不出是射影空间，也可以先证明稍微弱一些的主张。起初以为这个中间结果已经做出来了，尔后又发现了错误。在研究哪里出错了的时候发现了更加有趣的结果。这就是有理曲线[9]的存在定理。

[7] 译者注：Frankel 猜想是说截面曲率为正的紧凯勒流形算全纯同构于复射影空间。哈茨霍恩猜想是说代数闭域上带有丰富切丛的非奇异射影簇双正则同构于射影空间。从哈茨霍恩猜想不难导出 Frankel 猜想。满浏的学位论文在假设第二贝蒂数等于 1 的条件下证明了 3 维的哈茨霍恩猜想。如下文所述，森读到论文之后与隅广合作，很快成功去除了对第二贝蒂数的限制，得到特征为零的 3 维哈茨霍恩猜想的完全证明。之后森在哈佛访问期间得到任意维数的哈茨霍恩猜想的证明。

[8] 译者注：丰富切丛。

[9] 原注 3：有理曲线（面） 在复杂图形上积分的时候，如果图形内的点可以用有理参数化漂亮地表示出来，那么就可以通过变量替换来把积分变换成更简单的形式。像这样，如果代数簇 X 内几乎所有的点都可以用 m 个变量的有理参数化一对一地表示出来，那么 X 就称为有理簇。特别地，独立变量的个数 m 为 1 的时候称为有理曲线，2 的时候称为有理曲面。

为说话方便，我来解释这条定理的改良版。设代数簇 X 的典范除子[10]为 K。所谓有理曲线的存在定理是说，对于包含在 X 中的某条曲线 C，若 $K\cdot C<0$，则 X 中包含有理曲线。



一旦留意到这个事实，大约一个礼拜的工夫就解出了哈茨霍恩猜想。理论有了足够蓄积之时加上一点机缘，就恍然大悟。

受 1968-69 年的东京大学事件影响，东大入学考试取消[11]。我是那一年参加高考，于是升读京都大学。一入学，京大就因学潮而关闭了教养学部[12]，整整半年没有上课。开始上课的下半学年中强行安排了一学年的修课量。就是那么个年代。我个人倒是通过自主讨论班学会了微积分与线性代数等等。当上助教之后也只不过承担习题解答。结果一到美国立刻就要上讲台。要是当初扎扎实实听上一学年授课，那直接用听课笔记就可以对付了吧。可我连听课笔记都没有，只好摸着石头过河。当然是用英语。听讲的人想来也很辛苦吧（笑）。

就这样，哈佛在学期中授课紧张而忙碌，可一到暑假就一个人都没有了。一张一弛的节奏交替兴许也对猜想的解决产生了效果。

2. 从乒乓球到冰淇淋锥

刚才说到，根据有理曲线的存在定理，若存在一条与 X 的典范除子相交数为负的曲线，则 X 含有某条有理曲线。

[10] 原注 4：代数簇 X 的除子 D 是指比 X 低 1 维的子簇的线性组合。（关于 D 假定适当的条件）对于任意曲线 C 可以定义“相交数”，记为 $D\cdot C$。X 的典范除子 K 是指具有如下几何学性质的特殊除子。假如对于任意曲线 C 可以定义相交数 $K\cdot C$，那么其负值恰好给出当点 P 沿着曲线 C 移动时 X 在点 P 处弯曲状况（第 50 页图所示高斯曲率的高维版本）的平均值。

[11] 译者注：1968 年初到 1969 年初在东京大学学生运动持续了约一年的时间，学生与校方、政府之间关系紧张，冲突不断。文部省命令东大 1969 年停止招生。这次学生运动是受中国文革激发的全球学潮的一部分。

[12] 译者注：在森读大学的年代，教养学部承担通识教育任务。京都大学的大一大二学生全部在教养学部上课，大三大四分别进入各专业学习。

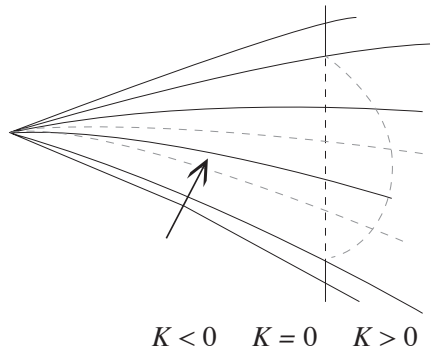


图 2. 锥定理示意图

一般说来，包含在 X 中的任意曲线 C 都确定了某个向量空间中的向量 $[C]$，$[C]$ 称为 C 的类 [13]。

所谓“X 的曲线锥”，即是 X 中所有曲线的类张成的锥。因此，任意有理曲线的类包含在曲线锥中 [14]。

曲线锥会形成什么样的图形呢？在哈茨霍恩猜想中只要找出一条有理曲线所在的类探索下去就足够了，还算简单。不过在一般的情形，就有必要考虑各种有理曲线所在的类。这样一来就可以明白，在 K 取负值的半空间中 [15]，任意一条棱都是由某个有理曲线的类生成的。这就是锥定理的主张（图 2）。这里的棱称为极端边线（extremal ray）[16]。

在此，代数簇的维数不影响讨论。首先重要的是曲线确定的向量所在空间的维数（Picard 数）。对于高维代数簇也有不少 Picard 数等于 1 的情形。比方说，射影空间的维数就等于 1。也即，所谓 Picard 数就是曲线锥居住的空间的维数，或者说画出那个锥形的画布的维数。

3. 森纲领——通向 3 维代数簇的分类

说来为何要分类呢？那是因为给为数众多的代数簇建立成系统的分类之后便于对各个情形做详细的研究，而这是我们的目标。那么我们来看看代数簇的

[13] 译者注：若 X 上两条曲线与任意 Cartier 除子的相交数相等，则这两条曲线称为数值等价。所谓曲线 C 的类 $[C]$，即其数值等价类。

[14] 译者注：“曲线锥”是代数簇的极小模型理论中最基本的研究对象。

[15] 原注 5：K 典范除子标记为 K，不过这里的 K 是个线性映射。对于曲线 C，可以确定其与典范除子 K 的相交数，这个操作可以线性扩张为 $[C]$ 所在线性空间上的一个线性映射，这个线性映射同样记为 K。

[16] 译者注：锥定理是关于曲线锥结构的第一条基本定理，对于光滑射影簇的情形首先由森得到证明。此后双有理几何领域的一些巨头对其做了各种推广。如森所述，对 K 取负值的那半边锥体，有了一些基本的了解。不过对 K 取正值的那半边锥体，几乎一无所知。

双有理分类（彼此之间可以通过双有理变换联系起来的代数簇视为相同）。

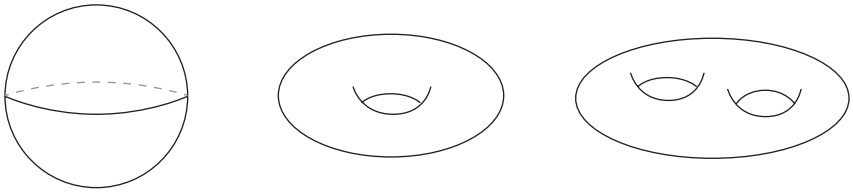
1 维代数簇（曲线）在 19 世纪已经由黎曼通过亏格来分类[17]。

2 维（曲面）又是如何？这是 20 世纪初期由意大利学派研究的。有理曲面及其推广、直纹曲面（ruled surface）另当别论，在其他曲面的情形，从给定代数曲面开始，如果有能够收缩的有理曲线就将其收缩成一点，如此反复施行，就可以得到一个称为极小模型的曲面[18]。

然而这种做法在 3 维情形行不通。为何？因为在 3 维情形，仅靠收缩已经无济于事，那时也不清楚有什么可以替代的办法。而且，就

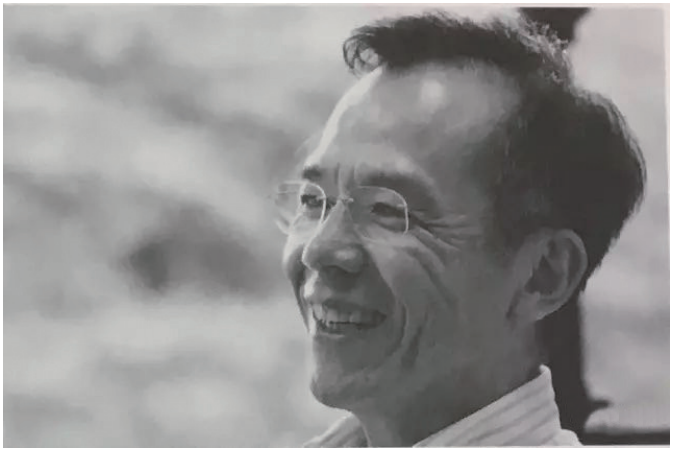
在簇上挑出一条有理曲线可不容易，可代数几何学家硬是能一条一条全部拎出来！

[17] 译者注：曲线的双有理几何看起来特别简明，因为任意代数曲线都双有理等价于一条光滑射影曲线，也双有理等价于一条平面仿射曲线，代数曲线的双有理等价就是同构，同构分类就是超越次数为 1 的有限生成域扩张分类。然而单用亏格这一个指标不能完成曲线的双有理分类——亏格 0 的情形除外。



genus 0　　genus 1　　genus2

[18] 译者注：更准确一些，是收缩曲面上自相交数为−1 的光滑有理曲线——所谓−1 曲线者——为一个光滑点。这个理论的基础是意大利代数几何学派中心人物之一 Castelnuovo 的收缩定理。该定理断言：一方面，给定两个曲面 X 与 Y，从 X 到 Y 的双有理态射必然将 X 上的−1 曲线映射到 Y 上的一点；另一方面，对于任意的光滑复射影曲面 X 及其上一条−1 曲线 C，必定存在 X 到另一个光滑射影曲面 Y 的双有理态射，使得 X 上给定的−1 曲线 C 收缩为 Y 上一点 P，并且在 X 和 Y 上除去 C 与 P 的话，该态射是一个同构。定理后半部分所述双有理态射非常重要，称为“坍缩（blow down）”或“收缩（contraction）”。于是定理前半部分可以华丽地表述为“曲面间双有理态射的结构定理”：光滑射影曲面间的双有理态射是有限多个坍缩的复合。



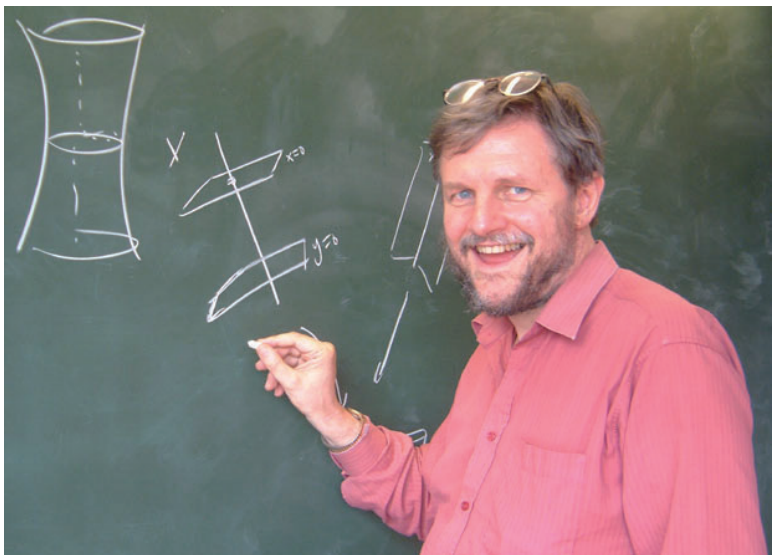
森重文微笑着开始了长征

连什么是合适的收缩方式，尺度何在，也并不明白。

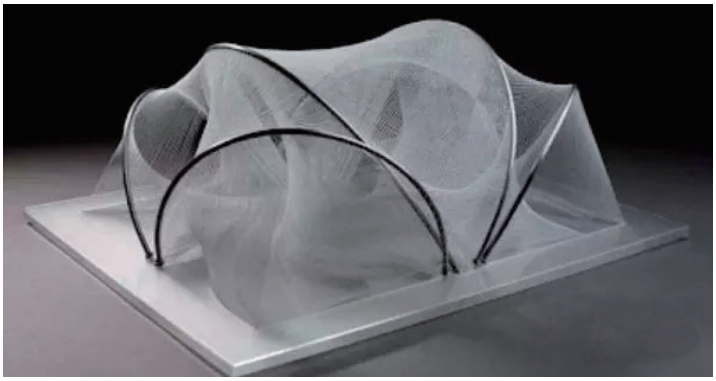
事实上，虽然代数簇是射影的这条假设很重要，可是如果做不恰当的收缩，簇就不再是射影的了。例如，用某种收缩方式虽然不会出现奇点，可是变成了非射影的。用另一种收缩方式，虽然出来了奇点，可是保持了射影性。这类情况也会出现。在理论建设尚不严整的阶段，哪种收缩方式更好也不明白。3 维的理论当时就处于这种状态。这就是 3 维的难处。

作为结论，我们最后明白了，按照将位于极端边线 R（图 2）上的曲线类 $[C]$ 中所有曲线尽数收缩的方针，就有可能顺利地进行。这样操作得到 R 的收缩映射 $\varphi: X \to X'$。

如此这般，我展示了看到曲线锥就明白应当如何做收缩。此后 Miles Reid 引入了终端奇点（terminal singularity）与典范奇点（canonical singularity）的



引入终端奇点和典范奇点概念的 Miles Reid



一（数？）张销魂的直纹曲面。直纹曲面在建筑中应用广泛

概念，理论框架臻于完善。更有川又雄二郎、V. V. Shokurov、János Kollár 等人将理论进一步发展到任意维数。

设 X 的维数为 n。在极端边线 R 的收缩映射 $\varphi: X \to X'$ 中，X' 的点的原像（φ 的纤维）中的点与点之间是通过一些曲线的链条连接起来的，这些曲线所属的（数值等价）类位于 R 上[19]。纤维的维数从 0 到 n 都有可能。φ 的一般纤维是法诺簇。同样地，X' 的维数也是从 0 到 n 都有可能。

如果 X' 的维数不超过 $n-1$，那么要研究 X 只需要弄清楚由 φ 确定的纤维构造即可。X 为 2 维，也就是 $n=2$ 的时候，这就相当于 X 是射影平面或者直纹曲面的情形。

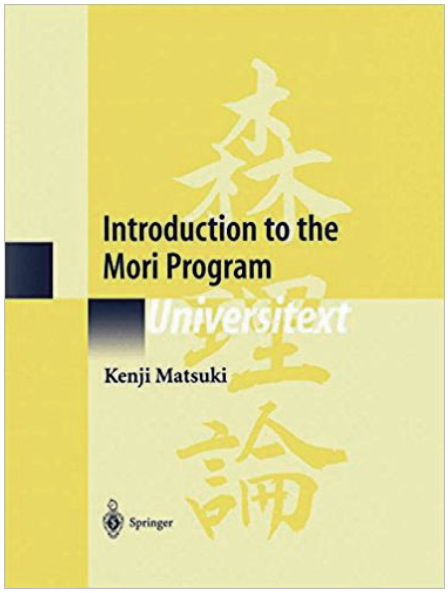
如果 X' 的维数也是 n，并且 φ 将（X 的）某个 $n-1$ 维子簇收缩到（$n-2$ 维以下），那么 φ 称为除子收缩映射；与 $n=2$ 的时候一样，X' 与 X 具有同样良好的性质，因此可用 X' 代替 X 继续研究。

接下来只剩下 X' 的维数是 n，并且 φ 将 n-2 维以下的子簇收缩的情形，此时 φ 称为 flip 收缩映射[20]。这种情况下的 X' 具有性状很差的奇点，无法定义其典范除子与曲线的相交数，因此不可能用与处理 X 一样的方法继续研究。此时用后面会谈到的 flip 操作可以得到 X^+（称为 X 的 flip），继续研究 X^+ 就可以了。如果这个操作可能实施，并且可以有限回终止的话，那么 X 或者满足 $K \cdot C$ 恒为非负（即 X 为极小模型），或者具有可以确定纤维构造的极端边线。这就是极小模型纲领（Minimal Model Program，简称 MMP）。在 3 维情形，当年只剩下“flip 是可能的”这个证明（flip 的存在性证明）没有解决[21]。

[19] 译者注：准确地说，这里谈的是非平凡纤维，即发生了收缩的那些纤维。

[20] 译者注：有人将 flip 译为翻转，我觉得不太妥当，又没想出更合适的来。

[21] 译者注：森在此看似轻描淡写地提过 flip 的问题，事实上 flip 的存在性与有限终止性正是极小模型理论的最大难关。在 3 维情形完全肯定地解决这两个问题是森获得 1990 年菲尔兹奖的主要业绩。3 维以上情形 flip 是否有限终止，迄今未知。对于详情感兴趣的读者不妨参考藤野修或 Kollár 于大约 10 年前写的精彩综述。森在本文的下一节将谈及他如何彻底解决 3 维的 flip 问题。



4. 森纲领是怎样创造出来的？

关于曲线锥，从有想法到写成论文是比较快的。证明哈茨霍恩猜想之后到锥定理为止花了半年还是一年，不过这已经算是快的了。之后关于 flip 的存在性，不清楚究竟如何证明才好，很是花了一些时间。82 年出版的关于锥定理的论文其实 79 年前后就写好了，算来从那以后大概 7 年的光景一直在计算 flip 收缩映射。因为当年还没有备齐各种理论工具，所以不管三七二十一强行用蛮力进行彻底检证[22]。

施行 flip 收缩映射 $\varphi: X \dashrightarrow X'$，$X'$ 就有性状很差的奇点，在 X' 上就不能计算典范除子与曲线的相交数了。

所谓（将曲线 C）flip，是指把代数簇 X 上的曲线 C 用新的曲线 C^+ 代替，从而造出一个 X^+，而且 X^+ 沿着 C^+ 的弯曲方式与 X 沿着 C 的弯曲方式正负号相反。这个操作可以实现，也就是说 3 维情形存在 flip，我证明了这件事。

于是极小模型理论首次在 3 维情形得以完成。

因此，若给定任意 3 维代数簇，首先用广中（平祐）先生的奇点解消消去奇点。从此出发施行 MMP，最终就得到极小模型或者以法诺簇为一般纤维的纤维空间。

到了这一步，就与曲面理论的状况类似了，可以研究整体的构造。这就是那时的极小模型理论。世人也有把极小模型理论称为森理论的。在我看来，所谓森理论，更粗略一些说来，就是以极端边线的视角来研究代数簇的理论。

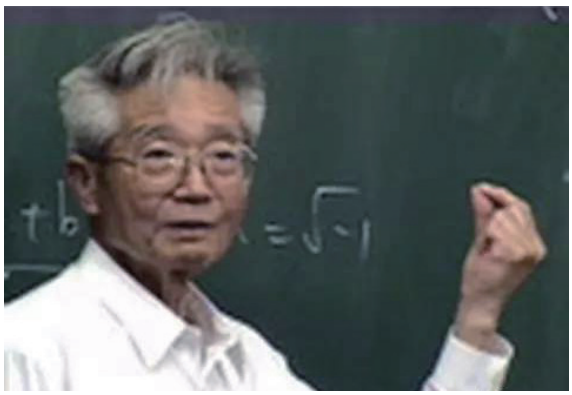
[22] 译者注：森关于 3 维 flip 存在性的证明是 1988 年发表的。

5. 以前不是分类理论的专家

我自己以前不是分类理论的专门家，我想就是现在也不是专门家。因为是在秋月（康夫）先生和永田（雅宜）先生的带领下进入数学世界的，所以当时的出发点是环论。

前头也提到了，受学潮影响，我在教养学部做大学 2 回生的时候就可以听理学部专业课了[23]。

2 回生时的代数学习题课是我师从永田先生的开始。同调代数用的是容易的教材，对永田先生来说，我想这是个异数[24]。专攻数论的土井（公二）先生讲授代数学。我兴冲冲地去研究室请教时，得到的回复是“有这方面的书，读就好了”。说是数论，其实最初与代数几何做的是同样的事情。首先研究代数的图形与代数簇的几何，然后用这些知识来研究数论。土井先生为我推荐的是 André Weil 的《代数几何基础》（*Foundations of Algebraic Geometry*）。那本书读完之后再去土井先生那儿，先生说：“接下来是这一本”，还是推荐了 Weil 的书，讲曲线的。这本读完了，下次又是阿贝尔簇的。就这样，先生推荐的书我一本接一本地读完了[25]。



永田雅宜

[23] 译者注：“*N* 回生”是以京大为首的日本关西地区大学常用语，指在籍第 *N* 年；与之相对，以东大为首的日本关东地区大学多用“*N* 年生”一语。二者的差别，譬如，某在籍第六年在修大四课程的学生，关西多称为“六回生”，关东多称为“四年生”。截至 1993 年，京大一二回生按规定都在教养学部修读通识课程，三回生以上始可参加专业课。因此森要强调他 2 回生时就开始参与专业课。不过至于如何受学潮影响可以“跳级”，译者不得而知。

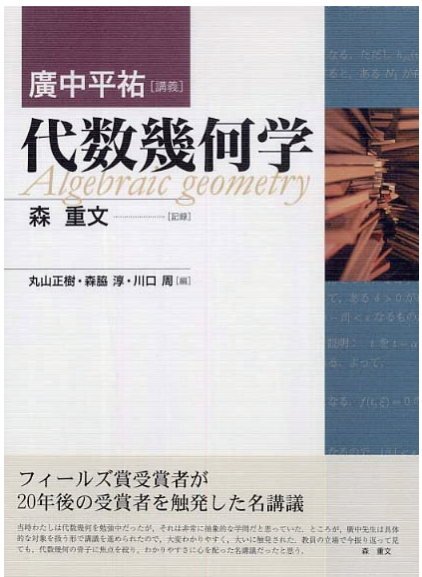
[24] 译者注：此处作者本意不甚明白。因为永田雅宜写过很多通俗易懂的课本和数学传播著作。

[25] 译者注：森读书速度惊人，这种段子在京大传得很久。起初传出的版本是老师不过随口一说，并没有抱着学生会读完的期望。孰料森很快报告读完了，而且对答如流。于是感到惊奇的老师就开始像训练小白鼠一样一个接一个任务扔出去了。本节所述也许是森首次亲口证实这段往事。

这是大学 2、3 回生时的往事。之后从 3 回生开始有名为“数学讲究”的毕业研究[26]，在此我开始学习代数几何。课程之初代数几何与数论二者我都在用功，不过我感到随着课程进展不知不觉间就偏向了代数几何的领域。

而今回想起来，可以像画一样看见的东西更符合我的天性吧。说来从这个方向进入代数几何，对于解哈茨霍恩猜想是最好不过了。就是说，虽然哈茨霍恩猜想是关于复数域上的，Frankel 猜想也完全是复数域上的微分几何，可是使用正特征 p 的算术几何方法得以解决。多少也因为我原本就是从环论开始念的，对于环论和数论心理上没有抗拒，所以处理特征 p 的工作很自然就能做。也可以说正因为在京大的环境里念书才能做到如此吧。

4 回生的时候，在“数学讲究”之外，永田先生出了有关仿射平面自同构的问题，也出了“造一个带有趣构造的 3 维有理簇”这样的问题。前者解决了，刊登在数理研（数理解析研究所）的报告集上。后者虽然当时没能解决，对我来说这成了对有理簇后续的 3 维法诺簇引起兴趣的开端[27]。



[26] 译者注：“数学讲究”就是国内的本科毕业设计 / 论文。与国内设置一样当作一门有学分和学时规定的必修课。不同之处是往往以读书报告会的形式完成导师规定的读书任务，而不是“做科研”。事实上，在京大哪怕是读书报告，也依照能力与兴趣的差异分了三个等级。第 1 组读的书通常很难，能为前沿研究打下扎实基础。第 3 组会读比较简单的材料，基本上只是对大学数学主要内容加深理解有帮助的辅助读物。为了与国内传统的毕业论文相区分，译者保留了“数学讲究”的日语名称。

[27] 译者注：如开篇译者注中所说的那样，以微分几何中曲率的观念比附之，则法诺簇相当于具有正曲率；其第一陈类是正定的。使用代数语言，法诺簇是反典范丛丰富的完备簇。一维和二维的法诺簇都是有理的，并且复数域上任意维数的法诺簇其全部多亏格都是 0。这就不由得使人推测法诺簇是否总是有理的。实际上对于大于 2 的每个维数，都存在大量非有理法诺簇。Iskovskih、Manin、森重文、向井茂给出了很多系列非有理 3 维法诺簇的例子，这最终带来了光滑 3 维法诺簇的双有理分类。

大三时广中先生回国，我也受到了他主讲的代数几何入门课程的影响[28]。

到哈茨霍恩猜想为止的工作是其余绪。解出哈茨霍恩猜想之后停下来环顾周边的问题，就明白了锥定理，不断做收缩，就会到达必须做 flip 的状况。想要弄明白“这是什么”的话，最终就引向分类论。大体上就是这么一回事吧。

[28] 译者注：广中 1971 年的讲义由森记录整理，十分漂亮，几乎立即达到出版标准。该讲义 77 年由数理研油印内部发行，04 年由丸山等三位 TeX 化，京大学术出版会正式公开发行。

译者简介：吴帆，对语言重度痴迷的 A level 数学教师，迄今教龄 14 年，且关注数学传播垂二十年。个人微信公众号“求诸堂”（inveni_zaq）不定期发布独家数学传播与语言学习内容。

《中国数学会通讯》是该刊编辑委员会编辑出版的内部刊物，季刊。主要刊登国内外数学界的重要信息，报道中国数学会与各省市自治区数学会、学科分会等的活动情况。主要栏目有学术活动信息，数学教育与普及，数学精品文章（数学的历史、进展、价值、趣事等），人物专栏，学科介绍，书讯与书评等。

2017 年《中国数学会通讯》全年的总订费为 50 元（含邮费）。欢迎各省市自治区数学会、学科分会和有关单位以及广大数学工作者、数学爱好者订阅本刊并踊跃投稿。

订阅办法：请将订费邮汇至北京中关村东路 55 号（邮政编码：100190），中国数学会办公室；或行汇至中国数学会，同时请给中国数学会办公室来信告知（或在汇款单附言中注明）订购份数、收刊单位（或个人）详细地址及邮政编码，以便我们及时准确地投寄本刊。

开 户 行：中国工商银行海淀西区支行
帐　　号：0200004509089161419
电　　邮：cms@math.ac.cn
电　　话：0086-10-82541197，0086-10-82541448

2017 年第 2 期要目：

《中国数学会通讯》编辑部供稿

鞠躬尽瘁，死而不已

——追忆吴文俊先生

温家宝

感谢《中国科学报》授权本刊转载此文

5 月 8 日早上，突然看到吴文俊先生 7 日不幸逝世的消息，我感到十分震惊和悲痛。我一时难以接受这位对数学充满激情、饱含智慧、乐观向上的著名科学家离开了我们。

这几天，我经常思念吴先生，夜里常常辗转反侧，久不成寐，和吴先生交往的往事不时涌上心头。

今年 3 月初，我因一篇回忆科技工作往事的文章送请吴先生指教。吴先生不仅及时核正，而且在退回文章时，亲笔给我写了一信：

总理，您好！

最近一段时间杂七杂八的事特别多，一时没有写信给您，请多原谅。

我觉得，中国的古代数学成果集中表现在《九章算术》一书，该书可能成于汉初，但其材料应是长时期的积累，其中有些成果的取得有些不可思议。

以后有机会再向您请教。

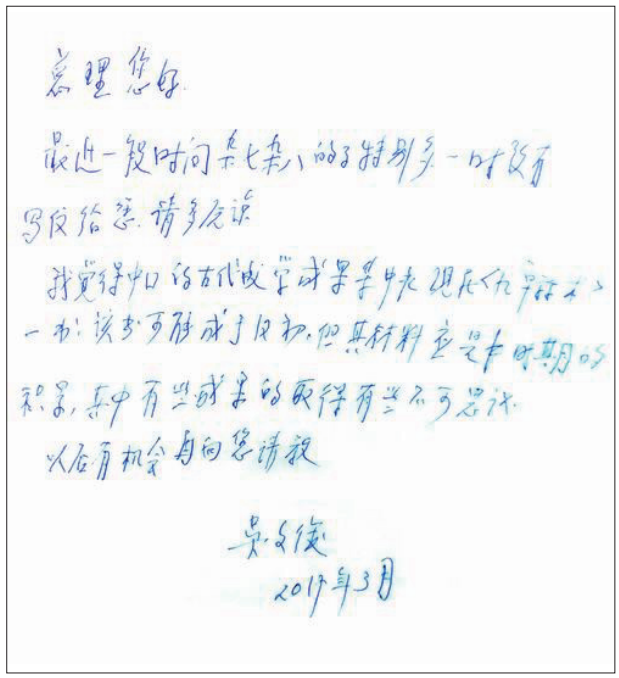
吴文俊

2017 年 3 月

接到吴先生的信，我既兴奋又感动。先生虽九十八岁高龄，但思维清晰，对中国数学史细推不断，总有新见解，让我感佩不已。我想尽快择机看望先生，当面聆听教益。

4 月初，泰国公主诗琳通访问中国期间，赠送我一些芒果。我立即想到吴先生。4 月 8 日，我派工作人员将芒果转送给吴先生。在联系过程中才知道先生于 3 月下旬因病住院，工作人员将芒果又送到医院，并转达了我的问候。

谁知这竟然成为我对先生的最后一次问候。事后我得知，在吴先生神志清


总理您好

最近一段时间杂七杂八的事特别多，一时没有写信给您，请多见谅。

我觉得中国古代数学成果是光辉灿烂的，现在仍应该大力研究，该书可能成了良初，但其材料主要是中世纪时期的积累，其中有些成果的取得有些不可思议。

以后有机会再向您请教。

吴文俊

2017年3月

吴文俊给温家宝信的影印件

醒时，家人向他转达了我的问候，老人还说“谢谢”。但没能再见上先生一面，是我终生的遗憾。

吴文俊先生是我国最具国际影响的著名数学家之一。他1940年毕业于上海交通大学，1949年获法国国家科学博士学位，1951年回国工作，是中科院资深院士。他长期从事数学前沿研究，对数学的核心领域拓扑学做出了重大贡献，开创了数学机械化新领域，对数学和计算机科学研究影响深远，获得国内外多项荣誉桂冠。1956年他获国家自然科学奖一等奖，2000年获首届国家最高科学技术奖。

从上世纪八十年代，我就开始联系科技工作，经常在一些会议或活动场合见到吴先生。他谦虚儒雅的风格、敏捷的思维、开朗乐观的谈吐、锐意创新的精神始终为人们所称道。有时，他的寥寥数语经常给我以启发和思考。1992年8月，我到中科院数学所、应用数学所和系统科学所调研时，比较系统地了解了吴文俊先生和他从事的研究领域。那次调研使我深切地体会到，数学是整个自然科学的基础。数学的思维在于创造。数学等基础科学研究应该为我们国家在高科技领域占有一席之地作出贡献。

我印象还深的一件事是：2002年8月，第24届国际数学家大会在北京召开，我出席了大会开幕式。会议期间，作为大会主席的吴先生呼吁中国数学工作者不仅要振兴、更要“复兴中国数学”。他说：“中国古代的实数系统是世界上最早的，是中国的独特创造，这一创造在人类文明史上居于显赫的地位。欧洲直到19世纪才发现这个问题，而且引进的实数系统，比我们中国古代当时的实数系统还要差多了。我们的数学不光是要振兴，还要‘复兴’。”他说，这对弘扬中国古代的数学研究成果，启发中国数学未来的发展有至关重要的作用。

我到国务院工作后，还曾两次到吴先生家登门拜访。言谈话语间，他所流露出的爱国情怀和严谨治学的态度给我留下深刻的印象。

2004年10月31日，我到中关村看望吴先生。在简朴的小客厅里，我握着吴老的手说：“我是来看望您的，也是来充电学习的。”

我问吴老最近在研究什么？

已经85岁的吴先生思想十分活跃，他兴致勃勃地谈起科技发展的观点和

2002 年 8 月，吴文俊在北京举行的第 24 届国际数学家大会开幕式上讲话

数学的研究方向。

他说："从'文化大革命'以后，我的研究方向有一个很大的转变，这是受中国数学的启发。中国传统科学中，也有珍贵的宝藏。要把东西方优秀的成果结合起来，为我所用。学习中国数学的历史，我发现中国数学发展的途径、思想方法和现在的科学理论是相反的，是根本不相同的。中国是算法式的。算法是你做了第一步，就知道第二步该怎么做，做了第二步就知道第三步该怎么做。而西方的现代数学，每一步的证明都要经过思考，走了第一步不知道第二步怎么做。我受了这个启发，就想是不是在数学的许多领域也可以按照中国这种算法的方式。这在现在的实现条件，就是我们有计算机。"

我说："有人这么概括说，计算机和数学的结合是思维和工具的结合，是科学和机械的结合。"

吴先生说："对。纯数学和应用数学也能结合在一起。这两者之间没有鸿沟。我主张基础科学也要面向现实、面向社会，要力争为社会经济生活服务。这 20 多年差不多都是沿着这条路在走。突破就是要找到一个能用算法实现的途径。"

在这次拜访吴先生回来的路上，我回味着他的话时在想："不断探索、寻求突破"不正是吴先生学术生涯的写照吗？在多个研究领域中，他正是凭借锲而不舍的精神，以卓越的研究成果树立了推进拓扑学发展和实现数学机械化这两座学术丰碑。

上世纪五十年代，由于吴先生在拓扑学研究中承前启后的独特贡献，拓扑学和数学的其他分支结合得更加紧密，许多新的研究领域应用而生。许多著名数学家从他的工作中受到启发或直接为研究的起始点，获得一系列重大成果。

受计算机与古代传统数学的启发，1977 年，他在初等几何定理的机械化

2004 年 10 月 31 日，温家宝在北京看望著名科学家吴文俊。新华社记者胡海昕摄

证明方面首先取得成功。此后，他不仅建立数学机械化的基础，而且将这一理论应用于多个高技术领域，解决了曲面拼接、机构设计、计算机视觉、机器人等高技术领域核心问题，走出了完全是中国人自己开拓的新的数学道路，产生了巨大的国际影响。

2010 年 8 月 7 日，我再一次来到吴先生家看望他。那年，他已经 91 岁了。

客厅墙上挂着一幅吴老的油画像。我搀扶着吴老在沙发上坐下："您身体挺好。您勤用脑，再活动活动，过 100 岁没问题。"

精神矍铄的吴先生笑着说："现在过百岁的老人有的是。"

"您现在还在做学问吗？"

"还做一些。"吴老回答说："我要向我的老师陈省身学习。他直到去世的时候还在研究问题，真的是鞠躬尽瘁、死而后已。我不仅要死而后已，还要死而不已。"

老人乐观自信的话，深深的感染了我和在场的人。

"陈省身先生后来一直在南开大学，是亲自教过您的老师？"

2010 年 08 月 07 日温家宝在北京看望吴文俊夫妇。新华社记者饶爱民摄

“是的。我的学习主要靠他。”

“那是恩师。”

“第一个老师。”

“省身先生是您的数学启蒙老师。他的学术功绩也是很大的，为人也很好。”我说。

“中国数学能起来，有两个人贡献大，一个是陈省身先生，一个是华罗庚先生。”吴老感慨地说。

“这两个人我们都不能忘记。”我说。

“我对华罗庚先生非常佩服。”吴老又说。

我问吴先生：“您觉得，中国数学现在在世界上处于什么水平？”

吴老回答说:“现在和以前不一样了，现在中国有很多在数学上很出色的人，得到了国际数学界的承认。还有一个重要因素是中国的经济发展了。”

“您讲了一个很重要的道理。”我说：“哪个国家要领先，关键是靠人才，还要有经济实力。”

吴先生的话语里依然充满自信：“现在科技发展很快，以前我们总是跟着人家，现在我们应该自己闯出一条路来。我看我们也可以赶超发达国家。”

“只要有人才，有志气，相信我们一定能够做到。”我说。

吴老是个生活兴趣广泛的人。他告诉我：“除了数学，我喜欢看小说，看历史书。以前爱看电影，现在看得少了。最近在华星电影院看了《唐山大地震》，我是自己打车去的。”

我说:“搞数学的人要甘于寂寞，其实人并不寂寞，像您还用历史、用小说、用电影来调剂一下，作出贡献不容易。”

“我只是希望能多作点贡献。”吴老谦逊地说。

“您要保重好身体。我们今天就确定个目标，您要活过 100 岁。”我笑着和

兴趣广泛的吴文俊和年轻人一起乘竹筏顺流而下

吴老约定："还有一个目标，就是中国的数学水平要超过发达国家。"

吴老点头说："现在老年的概念应该改变了，以前 50 多岁就是老人，现在 100 岁不算老。"

……，……

现在想来，我和吴先生谈话的情形仿佛就在昨天。他一生锲而不舍、积极进取的精神永远留在了人们心间。

5 月 11 日上午，我赶到八宝山殡仪馆送别吴先生，向他作最后的告别。

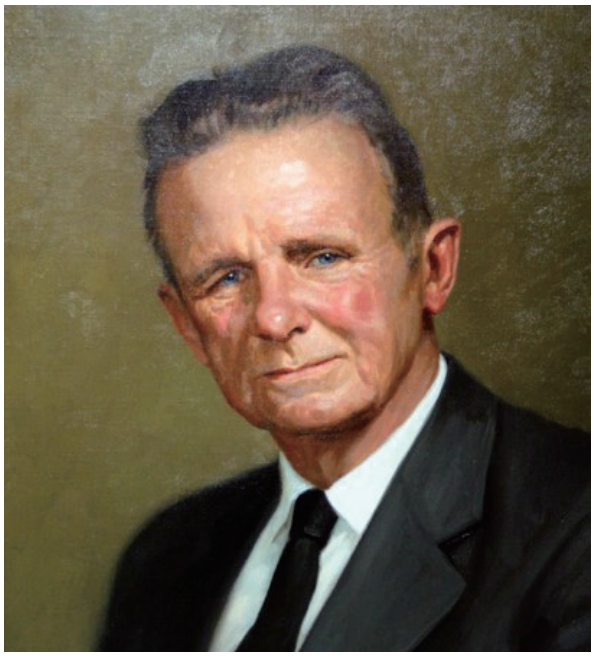
吴先生走了。他把自己的一切都献给了他深深热爱的祖国和数学，做到了鞠躬尽瘁，死而后已。他思考和工作直至生命的最后一刻，还有许多事情没有做完。我想，如果生命再给他一些时间，他还会为自己的国家在数学领域做出更大贡献。从这点上说，他同样做到了鞠躬尽瘁，死而不已。

温家宝写于 2017 年 5 月 11 日

克拉梅尔与二十世纪的概率统计学

范 明

概率论的主要研究对象是随机现象或不确定性及其数量规律，其起源可追溯到欧洲文艺复兴时期，几百年来概率论已经从最初研究赌博中的问题发展成为现代数学的主流分支之一。在其蓬勃发展的 20 世纪二、三十年代，瑞典著名数学家哈拉尔德 • 克拉梅尔（Harald Cramér, 1893-1985）在概率论、数理统计、保险精算数学等领域均作出了卓越贡献，被誉为现代概率统计学的开拓者和奠基人之一。从 1912 至 1982 年，克拉梅尔的学术生涯长达 70 年，多个猜想、定理和不等式均以他的名字命名，他一生中撰写了四本英文专著，还撰写了 110 篇英、法、德等文字及 38 篇瑞典文的学术论文和报告。笔者参考了克拉梅尔本人的回忆录《半个世纪的概率论》[1] 以及他的学生和后继者的多篇回忆文章写成此文，以飨读者。



克拉梅尔于 1893 年 9 月 25 日在瑞典首都斯德哥尔摩出生，一生中大部分时间都在那里度过。他在第一次世界大战开始前的 1912 年进入斯德哥尔摩大

[1] H. Cramér, Half a century with probability theory: some personal recollections, The Annals of Probability , Vol 4 (1976).

学（当时称为高专），同时学习数学和生物化学。在学习期间，克拉梅尔担任著名化学家欧拉 - 切尔平的研究助理，1913-1914 年间他与切尔平在生物化学领域联名发表了他一生中最早的五篇论文。这位切尔平也是一位了不得的人物，他是数学大神欧拉（Leonhard Euler）的第六代嫡孙，他本人获得了 1929 年诺贝尔化学奖，他的儿子乌尔夫 • 冯 • 欧拉（Ulf von Euler）获得了 1970 年诺贝尔医学奖。如果克拉梅尔继续跟随切尔平学习和研究生物化学，前途也是无可限量的。但是后来克拉梅尔发现数学才是自己真正的兴趣所在，当时“瑞典数学之父”米塔 - 列夫勒（Gösta Mittag-Leffler）带领斯德哥尔摩大学一群年轻有为的数学家在数学研究领域非常活跃，在其影响下克拉梅尔成为马塞尔 • 里斯（Marcel Riesz）的一名博士生。马塞尔 • 里斯是一位年轻有才华的匈牙利数学家，1908 年应米塔 - 列夫勒之邀来到斯德哥尔摩工作，他在位势理论、解析数论、偏微分方程、泛函分析和克利福德代数等领域都做出了重要贡献，他的哥哥弗里杰什 • 里斯（Frigyes Riesz）是泛函分析学科的创立者之一。克拉梅尔在里斯的指导下受到了严格的数学训练，并开始学习刚刚建立不久的勒贝格测度和积分理论。克拉梅尔在博士阶段的研究领域是解析数论，从而熟悉了傅里叶积分的技巧。这些训练为他后来从事概率论的研究工作奠定了坚实的分析学基础。

1917 年克拉梅尔以题为《一类狄利克雷级数》（*On a class of Dirichlet series*）的论文通过了论文答辩并获得斯德哥尔摩大学的数学博士学位。次年 25 岁的克拉梅尔迎娶了他“Beloved Marta”，两人育有二子一女，携手度过了长达 55 年同甘共苦、幸福美满的家庭生活。

克拉梅尔毕业后于 1919 年被斯德哥尔摩大学聘为助理教授，当年秋天著名英国数学家哈代访问斯德哥尔摩大学，这次访问对于克拉梅尔关于解析数论的研究意义重大。第二年夏天，克拉梅尔前往英国剑桥大学，在哈代指导下工作了一段时间。几年当中克拉梅尔在解析数论领域发表了大约 20 篇论文，并在 1922 年的斯堪的纳维亚数学家大会上演讲。克拉梅尔的一篇重要论文是关于丢番图方程素数解的研究结果，该问题是著名的哥德巴赫猜想和孪生素数猜

想的推广。在剑桥工作期间克拉梅尔还结识了比他年轻一岁并已初露锋芒的美国数学家维纳（Norbert Wiener），三年之后维纳发表了题为《微分空间》的著名论文，在函数空间中引入了一个概率测度，从而建立了布朗运动的严密理论，这一随机过程即为后来以他本人名字命名的维纳过程。维纳的这一工作比柯尔莫哥洛夫的划时代基础研究还要早几年。顺便提一下，1964 年维纳访问斯德哥尔摩，在皇家理工学院 KTH 演讲时突发心脏病后卒于异乡。

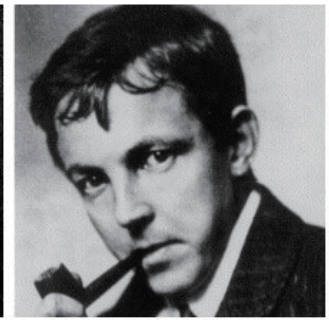
克拉梅尔在担任助理教授的同时，还在瑞典一家著名的保险公司兼职精算师工作，后来还担任一个拥有 25 名员工的部门主管，数学教授在保险公司兼职及雇佣年轻的数学家是瑞典保险业的传统。这一工作使得克拉梅尔接触了一些概率问题并开始进行有关保险风险方面数学问题的研究，而当时正处在这些问题的早期阶段，严格的数学基础和理论尚未成型。一个保险公司在一个时期内所承担的个别风险如果被视为彼此独立的，则其总和就与概率论中的“中心极限定理”产生密切联系，这一术语是波利亚（George Pólya）在他 1920 年的论文中首次提出的。波利亚是马塞尔 • 里斯的匈牙利好友，经常访问瑞典，因此克拉梅尔有机会与他交流合作。另一方面，风险事业也可看作一个随时间变化并在每一瞬间随机波动的经济系统。1903 年，数学风险理论的奠基人之一隆德伯格（Filip Lundberg）在乌普萨拉大学完成了博士论文，研究了一类当所有待付的索赔总数中每笔都相同时形成的过程，这类系统可以说是最早的连续时间随机过程的模型之一。1919 年克拉梅尔用瑞典文写出了他的第一篇概率论论文，是隆德伯格过程的特例——泊松过程的一个简短注记。

1812 年法国大数学家拉普拉斯在系统总结前人工作的基础上写出了专著《概率论的解析理论》，其中给出了概率统计的许多基本概念和结果，并引入了有力的分析工具，但仍然属于古典概率论的范畴。在之后的一个多世纪里概率论得到了长足发展，产生了许多经典漂亮的数学结果，出现了一些关于极限定理和随机过程的先驱研究。特别是 19 世纪中后期俄罗斯学派的代表人物切比雪夫、马尔可夫和李雅普诺夫等提出了随机变量、分布函数、密度函数等概念，并用分析方法建立了大数定律及中心极限定理的一般形式。但一方面俄罗斯学派的结果在国外鲜为人知，另一方面还没有一个理论上的公理化体系，因此直到 1920 年之前概率论仍被排除在主流数学之外。就连一些著名数学家都束手无策，比如庞加莱就曾叹道：“人们难以给出概率的一个满意定义。”

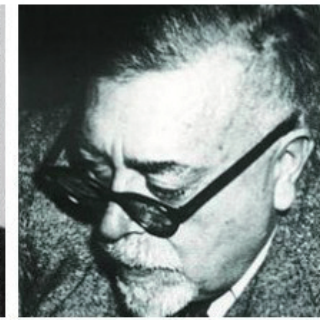
1920 年代概率论历史上发生了两件大事：一件是法国数学家莱维（Paul Lévy）的专著《概率计算》于 1925 年问世，该书第一次尝试用严格的数学方法对概率论进行系统描述。另一件是以年轻的苏联数学家欣钦（Aleksandr Khinchin）和柯尔莫哥洛夫为代表的“新俄罗斯学派”的兴起，在他们特别是后者的一系列论文中，证明了如“0-1 律”、独立随机变量和的不等式及重对数律等重要结果，这些结果为柯尔莫哥洛夫日后提出概率论的一般理论作出了充分准备。对于克拉梅尔来说，1920 至 1929 年也是积蓄能量、厚积薄发的十年。由于他所从事的保险业中风险问题的需要，克拉梅尔的研究兴趣集中在中心极限定理及误差估计。克拉梅尔也十分关注概率论的基础理论，他在 1926 年的

一篇论文中前瞻性地指出“概率论的概念应该通过纯数学定义引入，其基本性质和经典定理应该通过纯粹的数学运算来推导。”能够比柯尔莫哥洛夫的概率论公理化定义早七年提出这一观点，克拉梅尔对此颇为得意。

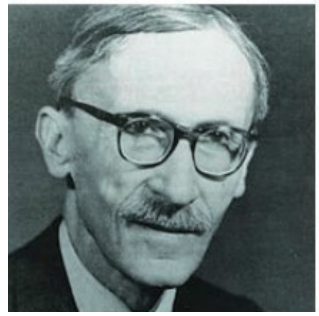
马塞尔·里斯（1886-1969）



哈代（1887-1947）



维纳（1894-1964）



莱维（1886-1971）

柯尔莫哥洛夫（1903-1987）

费勒（1906-1970）

克拉梅尔的研究兴趣从解析数论转向概率统计，还有一些人事上的因素。斯德哥尔摩大学的数理统计教授桑德博格（Rolf Sundberg）在《斯德哥尔摩高专时期数理统计研究所的历史》[2]一文中摘录了克拉梅尔本人 1978 年写的《漫长生命的简短回忆》中的若干片段，斯图番戈（Arild Stubhaug）撰写的《米塔 - 列夫勒》传记[3]中也提到此事。列夫勒在斯堪的纳维亚数学界和瑞典学术界都是很有权势的人物，克拉梅尔对他的描述是“热心好斗、精力充沛”。1924 年斯德哥尔摩大学数学教授科赫（Helge von Koch）去世，他的同事、克拉梅尔的博士导师里斯毫无疑问是最具竞争力的后继者人选，里斯得到了系里三位知名教授的推荐并即将获得校方通过。列夫勒当时已经 77 岁，对于他身后斯德哥尔摩大学数学系及以他的名字命名的研究所的后继者考虑较多，因此可能对于教授人选施加了一些影响。乌普萨拉出身的卡勒曼（Torsten Carleman）最终得到这一职位，里斯则转移到瑞典南方的隆德大学作终身教授。卡勒曼是一位很强势的数学家，1927 年列夫勒去世后继任研究所所长 20 年。同时列夫勒

[2] R. Sundberg, "Institutets" historia under Stockholmss högskolas tid, April 2013.

[3] A. Stubhaug, Gösta Mittag-Leffier, A Man of Conviction, Springer, 2010.

也与克拉梅尔产生了一些矛盾，他认为克拉梅尔的一篇数论文章并非原创，并告知克拉梅尔不可能在北欧数学界得到位置。关于列夫勒及斯德哥尔摩大学数学系的故事，可参见笔者发表在《数学文化》期刊第六卷第三期的文章《乌城走出的数学大侠们》[4]。

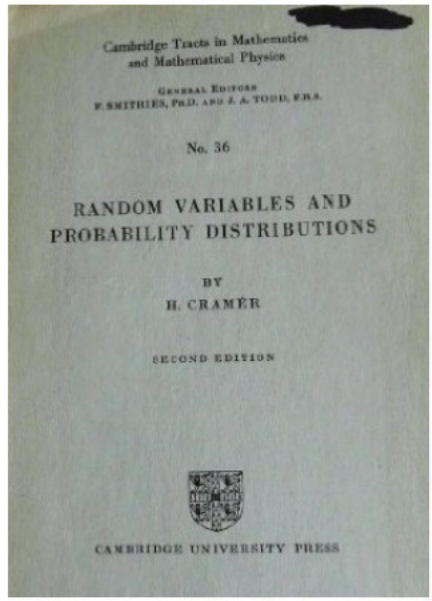
随着斯德哥尔摩数学系的“改朝换代”，克拉梅尔作为一位初出茅庐的年轻数学家，不得不为自己的前途从长计议，他的这一想法得到以前的老师和朋友哈代的大力支持。克拉梅尔在斯德哥尔摩的同事和朋友圈中，很多都是和他一样从事保险业的年轻数学家，也对他的决定表示欢迎。克拉梅尔说：“当纯数学之门对我似乎将要关闭之时，我必须为自己开创一个新的科学未来”。而他在一个学科蓬勃发展的时刻加入，可以说是天赐良机，1927 年克拉梅尔出版了瑞典文教科书《概率论及其应用》。瑞典保险业于 1925 年开始认真筹划资助设立一个保险数学方向的教授位置，经过几年时间落实这一位置的名称、资金及所在大学，1929 年在斯德哥尔摩大学设立了瑞典历史上第一个精算数学与数理统计的教授位置，克拉梅尔成为首任教授。克拉梅尔还回忆到，由于他的教授位置属于数学系的编制，因此卡勒曼等人起初设置了重重障碍，他甚至都没有一间自己的办公室。但是克拉梅尔凭借出色的教学效果和科研成绩、年轻同事的齐心协助、保险业的强大后盾，最终打开了局面。几年后他的研究所在斯德哥尔摩城北的 Norrtullsgatan 街 16 号拥有了办公地点，赢得了良好声誉。人性大同小异，江湖恩怨和校园政治在全世界都是一样的。

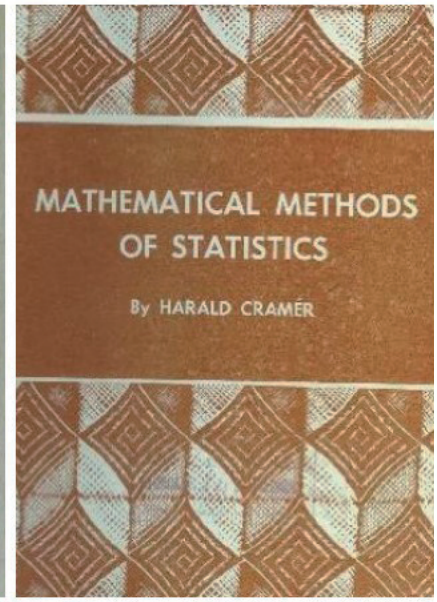
1930 年代是概率论发展的新纪元，被克拉梅尔称为“英雄时期”，20 世纪初分析数学中测度论的发展为概率论的严格表述提供了关键性工具，从而使得概率论最终被纳入现代数学的范畴。柯尔莫哥洛夫在 1933 年出版的奠基性著作《概率论的基本概念》中首次为概率论建立了严格的公理化系统，从而解决了希尔伯特第六问题的概率部分，标志着概率论发展新纪元的开始。克拉梅尔担任斯德哥尔摩大学教授之后，在他周围聚集了一批事业心很强的优秀学生，他们兴趣十足地注视着国外同行的新动向，并尝试作出自己的贡献，最初几年他们主要继续 1920 年代在极限定理和风险过程方面的工作。毕业于哥廷根大学的克罗地亚犹太裔数学家费勒（William Feller）为逃避纳粹德国的迫害，经克拉梅尔的好友哈拉尔德 • 玻尔（(Harald Bohr，其兄是诺贝尔物理学奖得主尼尔斯 • 玻尔）介绍，于 1934 年来到斯德哥尔摩加盟克拉梅尔团队达五年之久。克拉梅尔曾作了极大的努力试图帮助费勒在斯德哥尔摩大学谋得一个终身教职，但由于卡勒曼等人的反对没有成功，因此成为克拉梅尔的一大憾事。1939 年费勒去了美国，后来成为 20 世纪最伟大的概率学家之一。费勒在斯德哥尔摩期间还学会了瑞典语，克拉梅尔的学生格雷南德（Ulf Grenander）后来在美国遇到费勒，就是和他用瑞典语交谈。

在这一时期中，克拉梅尔、费勒以及他们的同事和学生们在马尔科夫过程、

[4] 范明，乌城走出的数学大侠们，数学文化，第六卷第 3 期，2016.

独立增量过程、平稳过程、无穷可分分布、极限定理及特征函数等当时概率论的热门领域都作出了重要工作。1934 年，克拉梅尔将欣钦关于平稳过程协方差表示的结果推广到多维平稳过程，1936 年，证明了莱维关于“任意正态分布的因子也是正态”的猜想——被后人称为 Cramér-Lévy 定理，同年他还和学生沃尔德（Herman Wold）证明了关于多维随机变量中心极限定理的 Cramér-Wold 定理。1934-1935 年间，克拉梅尔在斯德哥尔摩大学作了关于柯尔莫哥洛夫研究工作的系列讲座，他也许是在苏联境外介绍这一划时代成果的第一人。除了他本人许多重要的原创性工作外，克拉梅尔投入很大精力将他人重要却难懂的结果用优美通俗但不失严格性的方式在他的文章和著作中表述。1927 年，克拉梅尔访问英国时，由于当时还没有概率论方面的英文专著，哈代曾建议他编写一本，但这一计划直到十年之后才付诸实现。在 1937 年剑桥出版社出版的专著《随机变量和概率分布》（下图左）中，克拉梅尔基于柯尔莫哥洛夫的概率论公理化体系，系统阐述了有限维空间上的概率分布理论及其应用，该书至今仍为概率论的经典著作之一。1937-1939 年间，克拉梅尔访问了巴黎、伦敦和日内瓦等欧洲城市，应邀举办讲座或参加学术会议，结识了许多当代极负盛名的数学家和概率学家，如法国的莱维、波兰的斯坦豪斯（Hugo Steinhaus）和当时尚在英国的内曼（Jerzy Neyman）以及一批年轻的后起之秀。当克拉梅尔 1939 年 7 月离开日内瓦时，世界大战已迫在眉睫、一触即发。





在第二次世界大战期间，不同国家数学家之间的交流几乎中断，但他们仍然坚持各自的研究。由于战时防空射击控制和雷达噪音过滤的需要，柯尔莫哥洛夫和维纳在互不知情的情况下，分别在苏联和美国各自独立地对平稳随机过程作出了重要工作。1940 年纳粹德国突袭并占领了丹麦和挪威，芬兰与苏联正是交战双方，中立国瑞典成为与世隔绝的孤岛。克拉梅尔的斯德哥尔摩团队

与国际间的交流也减少到了最低程度，但他以极大努力保持研究团队的正常运作和对外联系。战争期间，Norrtullsgatan 街 16 号的研究所成为一些北欧同行的避难所，来访者中包括丹麦数学家哈拉尔德 • 玻尔和挪威数学家若叶什文（Olav Reiersoel）。1941 年 2 月，克拉梅尔还组织了一个概率论国际会议，1942 年，他发表了一篇题为《某些函数空间上的调和分析》的文章，给出了 Hilbert 空间中酉群谱表示的 Stone 定理的一个概率论版本，直到战后他才得知这一理论对于随机过程研究的重要性。1944 年，埃塞因（Carl-Gustav Esseen）在乌普萨拉大学以题为《关于概率分布的 Fourier 分析》的论文进行博士学位答辩，这是一篇以深入研究特征函数的性质为基础的重要论文，文中推广了克拉梅尔早年关于中心极限定理及误差估计的结果，被命名为 Berry-Esseen 定理。1967-1984 年间埃塞因担任乌普萨拉大学第一位数理统计教授，笔者 1980 年代末在那里读博期间，不时会在系里遇到已经荣休的埃塞因，那时他已经需要借助代步车行动了。

1920 年以来，以费希尔（R. A. Fisher）为代表的英美统计学家们在统计科学取得了巨大进展，因此克拉梅尔利用与世隔绝的这几年撰写了他的第二本专著《统计学的数学方法》（上页图右）并于 1946 年出版。他在撰写这本著作时还常将一些篇章作为讨论班的内容，使学生们得到极好的训练。克拉梅尔在书中将概率统计领域的两大发展方向——法国和苏联学派关于概率论基础理论方面的研究与英美学派的统计推断科学有机地结合在一起，对现代统计数学方法作了全面阐述，这之前在概率论基础上的统计学理论尚未建立。该书在概率统计学历史上是一本里程碑式的著作，成为战后克拉梅尔进入新世界的入场券，后来被译成英、俄、日、中、西班牙等多种文字，几十年间在多个国家作为教科书和研究参考书使用。

二战结束后，在国际范围内开展科学研究工作以及与各国同行进行交流重新成为可能。经过 20 多年来的迅速发展，概率论也已经作为一个结构严谨的纯数学分支进入战后的世界。战争结束后不久，克拉梅尔就收到来自巴黎、普林斯顿、耶鲁、加州伯克利等大学的邀请，作系列报告或访问教授。1946 年 9 月，克拉梅尔开始了他的第一次美国之行，在普林斯顿他见到了费勒、内曼、维纳等老朋友，还结识了杜博（J. L. Doob）等后起之秀以及一批出色的年轻人，克拉梅尔在美国度过了快乐并富有成效的两年。

整个 1940 年代，克拉梅尔的斯德哥尔摩研究所也是成果卓著，多位博士生在这个时期答辩。除了学术研究之外，克拉梅尔同时具有卓越的管理和社交才能，还是一位出众的演说家。他回到瑞典后于 1950 年被任命为斯德哥尔摩大学校长，1958 年被任命为瑞典高教系统总校长，直到 1961 年退休。虽然行政工作占据了他很大一部分时间，但他仍然坚持领导自己的团队从事研究工作。笔者在复旦读书时的老师汪嘉冈先生曾说起，60 年代初在他们大学高年级开始学做科研时，最初阅读的论文除了柯尔莫哥洛夫的之外，就是北欧学者的工作，其中包括克拉梅尔的学生格雷南德于 1950 年完成的博士论文《随机过程与统计推断》以及 1957 年与罗森布拉特（Murray Rosenblatt）合写的专著《平稳时间序列的统计分析》。

1955 年，作为斯德哥尔摩大学的代表，克拉梅尔应邀参加莫斯科大学 200 周年校庆，在那里他高兴地见到了柯尔莫哥洛夫及莫斯科大学概率研究组的其

他同行。用克拉梅尔自己的话说，柯尔莫哥洛夫“给人一个科学巨人的印象”，他们的研究团队“形成了有惊人科学活力的群体”。后来柯尔莫哥洛夫经常访问斯德哥尔摩并与克拉梅尔的团队进行交流。1961 年，克拉梅尔退休后“无官一身轻”，作回自由自在的科学家，焕发出第二次学术青春。克拉梅尔经常到世界各地学术旅行，并加速他在十多年担任大学校长期间放缓了的科学研究。克拉梅尔退休之后致力于多维随机过程理论的研究，70 岁之后还发表了十余篇论文，73 岁时他与里尔（M. R. Leaer）合作出版了第四本专著《平稳过程及相关的随机过程》。86 岁之后克拉梅尔仍然在各种专业学术会议上发表演讲，最后一篇文章发表时已经 89 岁，1984 年 6 月接近 91 岁高龄时他还在瑞典海滨城市哥德堡举行的“随机过程及其应用”的国际会议上作报告。

左上图 1951 年摄于斯德哥尔摩大学，右上图和左下图摄于德国奥博沃尔法赫数学所，右下图 1955 年摄于莫斯科，左一为克拉梅尔

虽然克拉梅尔本人作为一位理论概率论和数理统计学家闻名于世，但他同时从事精算师及保险业咨询工作长达 40 余年，他在保险数学方面很多早期的重要结果都来源于实际问题。由于没有相应的数学理论支持，19 世纪末瑞典

多家保险公司纷纷破产，因此克拉梅尔很早就意识到概率论和保险业是相辅相成、互相依存的。早在 1920 年代，克拉梅尔就是认识到隆德伯格风险模型重要意义的少数几人之一，他在用严格但易懂的方式表述和发展隆德伯格模型方面做了许多工作。马丁 - 洛夫（Anders Martin-Löf）在《克拉梅尔与保险数学》[5]一文中指出，克拉梅尔在分析和解释复杂问题的杰出能力使他在保险精算界中拥有无可争议的权威。克拉梅尔倡导了对于溢价估计非常必要的偏差精确讨论，并开发了在设定保险费率中使用多年的“零点法”，他还鼓励自己的学生从事应用领域的工作，比如沃尔德（Herman Wold）成为计量经济学家、隆德伯格（Ove Lundberg）从事保险业、马特恩（Bertil Matern）从事森林业。1955 年，克拉梅尔出版了一本关于风险理论的专著。

1900 年前后的几十年时间里列夫勒领导的“斯德哥尔摩学派”中聚集了多位著名数学家，而他本人又是一位实业家，曾大力投资金融保险业。因此列夫勒本人以及他的同事们非常感兴趣数学在保险精算业的应用，设立保险数学方面的教授位置的建议最初也是他提出来的。列夫勒于 1904 年创立了瑞典精算师协会（SAf）并作首任主席（任期 1904-1909），第二任主席弗拉格恩（Edward

瑞典精算师协会（SAf）为前三位主席制作的纪念章正面头像，右下图为 SAf 的会标——一个被称为“沟算盘”的古罗马算盘

[5] A. Martin-Löf, Harald Cramér and Insurance Mathematics, Springer-Verlag, 2014.

Phragmén）（任期 1909-1935）是列夫勒的学生及斯德哥尔摩大学的数学教授，后来担任过多家大保险公司的高管或总裁，他的父亲拉尔斯·弗拉格恩（Lars Phragmén）就是一位数学博士和精算师。克拉梅尔自然成为弗拉格恩继任者的不二人选，担任第三任主席长达 27 年（任期 1935-1962）。1930 和 1940 年代，克拉梅尔参与大量的保险业实际工作，并担任一些负责制定保险法律条例的政府部门相关委员会的成员。哈格博格（Jan Hagberg）在纪念 SAf 成立 100 周年的文章[6]中回忆，1948 年英国精算师协会主席罗威尔爵士（Sir Andrew Rowell）对一位约好与克拉梅尔在一家火车站会面的助手说："记住你要寻找的人看起来并不像教授，而是像一位成功的企业家。"

克拉梅尔一生共指导了十位博士生，后来享誉世界的"著名概率学家"华裔数学家钟开莱（1917-2009）是克拉梅尔访问普林斯顿期间唯一的博士生。有趣的是克拉梅尔博士毕业那年钟开莱出生，至今正好 100 周年，二人都活到 92 岁高龄。抗战期间钟开莱在昆明西南联大读书，本科先修物理，因与理学院院长吴有训"有所不快"转入数学系。研究生阶段钟开莱师从华罗庚主修解析数论，同时私下开始研究概率论，又一次引起师生间的矛盾。因此钟开莱转投许宝騄门下，名正言顺地攻读概率论。1945 年钟开莱考取第六届庚款公费留美，前往普林斯顿大学读博。据说他抵美第一天拖着行李走进普林斯顿最好的法式餐厅，准备大吃一顿时，一眼认出食客中的概率统计学界大牛克拉梅尔，于是径直上前自我介绍。一顿饭后，钟开莱即成为克拉梅尔的学生，两年后顺利获得博士学位。克拉梅尔和钟开莱这对师徒的求学道路还真有些相似之处，都是二次改换门庭，每次均师从相应领域具有国际声誉的顶尖学者，而且最后都是从解析数论转向概率论。这也许完全是一个随机事件，但冥冥之中也可能存在某种定数和缘分。笔者在乌普萨拉读博时选修一门概率论课程，使用的就是钟先生编写的教材，任课教授哥特（Allan Gut）对钟先生推崇备至。

行文至此，不能不提到钟开莱在西南联大时期的恩师许宝騄（1910-1970）先生，许宝騄是 20 世纪与陈省身和华罗庚齐名、举世公认的在概率论和数理统计领域第一位具有国际声望的中国数学家。他 1936 年考取赴英留学，前往伦敦大学学院统计系读博，成为统计学大师内曼最得意的弟子。许宝騄三、四十年代在多元统计分析、Neyman-Pearson 理论、参数估计理论、样本方差分布的渐进展开等方面取得的卓越成就，使得他成为数理统计领域的奠基人之一。1945 年，许宝騄应内曼和另一位著名统计学家霍特林（H. Hotelling）之邀赴美讲学，并协助后者在北卡罗莱纳大学创建了美国大学里第一个统计系。1947 年秋，许宝騄谢绝内曼的挽留和美国多所大学的聘请，回国到北大任教，1948 年他与姜立夫、陈省身、华罗庚、苏步青一起当选为首批中研院院士。前文提到，内曼是克拉梅尔的好友，许宝騄在伦敦期间曾熟读克拉梅

[6] J. Hagberg, Svenska Aktuarieföreningen 100 år ——Aktuarier i svensk försäkring, NFT 4 (2005).

尔的著作《随机变量和概率分布》并在极限理论方面作出了重要工作，二人还于 1940 年代中后期在美国相遇。令人唏嘘的是，许宝騄在战争和动乱年代积劳成疾，郁郁不得志，一代宗师在花甲之年就撒手人寰。同时也不由地让人心生感叹，即使在被世界大战隔绝的一片片孤立的陆地和岛屿上，不同国家、种族、信仰的数学家们，依然守住内心那一方净土，并搭建起共同的科学殿堂。数学是所有数学家的宗教，峰回路转，世界其实并不大。

克拉梅尔是一位谦和礼貌、善解人意、具有绅士风度的谦谦君子，永远衣冠楚楚。无论是他的文章著作、课堂教学、讲座报告，还是对学生的个人指导，处处散发着无与伦比的个人魅力，并对其研究领域产生着长久的影响。很多人从世界各地慕名前来拜访克拉梅尔，他的课堂和讲座上总是座无虚席，家中也

上图为克拉梅尔与英国著名统计学家巴特利特（M. S. Bartlett）（左）和许宝騄（右）、下图为克拉梅尔与钟开莱，均摄于美国

常常是高朋满座。克拉梅尔始终给年轻后学强有力的支持和鼓励，他的学生们都十分尊敬和爱戴他。克拉梅尔的关门弟子布洛姆（Gunnar Blom）在长文《克拉梅尔 1893-1985》[7] 中回忆起在 1940 年代动荡的战争岁月中，他们这些年轻学生挤在 Norrtullsgatan 街 16 号狭小但舒适的研究所楼房里，用手摇计算器进行长长的计算，到附近的咖啡吧读书讨论消磨时光，看克拉梅尔用他手中神奇的魔棒将枯燥的数学公式点化成美丽的诗句。格雷南德也在一篇访谈录 [8] 中回忆了 1940 年代他读本科时参加乌普萨拉大学伯尔林（Arne Beurling）和斯德哥尔摩大学克拉梅尔两位大师讨论班的难忘时光，他说近距离观察和感受杰出的大脑是怎样工作使自己终身受益。

1940 年代，克拉梅尔从美国归来之后，常常在每年五月学期结束前将他的弟子们请到郊外 Djursholm 的家中，享用女主人玛塔亲手烹制的美味晚餐，边喝咖啡边讲述他们的旅行见闻。斯德哥尔摩大学统计学教授托伯（Daniel Thorburn）在《克拉梅尔 ——一位伟大的统计学家》一文 [9] 中回忆道，晚年的克拉梅尔双耳几乎完全失聪。托伯记得最后一次聆听克拉梅尔的讲座时，当克拉梅尔通过儿子托马斯的翻译理解了听众的提问后，他的回答仍然一如既往地清晰有条理。1985 年 4 月仲春的一天，布洛姆来到克拉梅尔家中探望，他在玛塔去世后搬到离城里较近的狩猎岛 Djurgården 居住，那时克拉梅尔的视力已严重衰退，无法欣赏窗外水上点点白帆的美景了。他们一起谈论往事和新闻，克拉梅尔的头脑依旧十分清楚并对所有事情充满兴趣。然而空气中弥漫着忧郁的气息，两人心里都明白这大概是最后一次见面了。同年 10 月 5 日，克拉梅尔平静离世，走完 92 年非凡的一生，回到天堂与他亲爱的玛塔团聚了，正如同普林斯顿大学希拉（Erhan Çınlar）教授所言："死亡不就是一个随机分布吗？"

1958 年克拉梅尔描述弗拉格恩的一段话也是对他自己一生的最好总结，他"属于这样一代数学家，对于他们来说，不言而喻的是，数学是构成人类思想的最高形式之一、甚至可能是唯一的。数字是人类思想的必要形式，数学科学是一个具有自身文化价值的中心人文学科。它完全独立于其在技术或其他领域的辅助科学的作用，然而这并不意味着数学家们低估了'使用理论知识获得实用技能'的重要性。"人们都说，20 世纪中叶是群贤毕至、大师云集的年代，这些昔日的大师们都已化作浩瀚宇宙中一颗颗灿烂的星辰，而将他们用毕生心血创造的思想财富留存于世，令人由衷地敬仰！布洛姆的回忆文章是这样结束的："克拉梅尔虽然离去了，但对他的回忆和怀念永存于概率统计学的历史上及他的学生和崇拜者心中，他是一个伟大的科学家和一个好人"。

下图中，上二图为位于斯德哥尔摩城北 Norrtullsgatan 街 16 号的研究所小

[7] G. Blom, Harald Cramér 1893-1985, The Annuals of Statistics, Vol 15 (1987).

[8] N. Mukhopadhyay, A Conversation with Ulf Grenander, Statistical Science, Vol 21 (2006).

[9] D. Thorburn, Harald Cramér——A Great Statistician, Lithuanian Journal of Statistics, Vol 52 (2013).

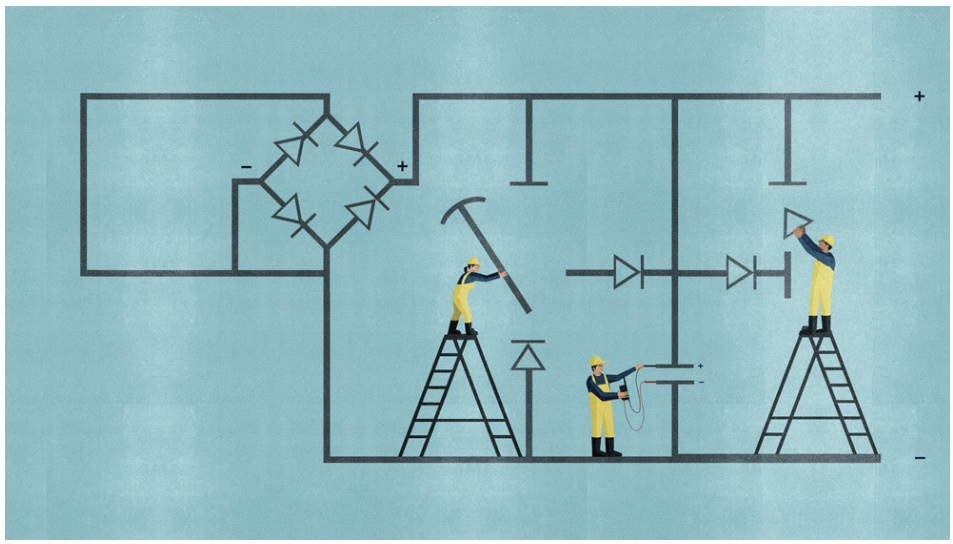
楼和图书馆，现在已经被拆除了；下图为研究所附近当年克拉梅尔和同事、学生们常常光顾的咖啡吧（笔者所摄），顿时想到伦伊（Alfréd Rényi）的那句名言："数学家就是把咖啡变成定理的机器。"这间咖啡吧位于斯京现在的闹市区，地理位置绝佳，但 70 多年前的那段历史恐怕是鲜为人知了。

作者简介：范明，1977 年底考入复旦大学数学系数学专业，1982 年获学士学位、1985 年获硕士学位。1988 年移居瑞典，1993 年获乌普萨拉大学数学系博士学位，2004 年取得乌普萨拉大学 Docent 学衔。曾先后在中国和瑞典的不同大学从事数学教学和科研工作 30 年，2003 年至 2005 年间担任瑞典数学会理事兼秘书。

在本文写作过程中，笔者得到汪嘉冈先生的鼓励和帮助，特此致谢！文中图片除特别说明外，均来自网络。

外行人破解困扰数学界 50 年的难题

Erica Klarreich / 文　　赵 京 / 译



2008 年，丹尼尔 • 斯皮尔曼（Daniel Spielman）给他耶鲁大学的同事吉尔 • 卡莱（Gil Kalai）描述了他正在研究的一个计算机方面的问题——如何稀疏（sparsify）网络以减少节点之间的链接但仍保持原网络的基本结构？网络稀疏化在数据压缩和高性能计算中有广泛的应用。但斯皮尔曼的这个问题对卡莱而言却另有一番含义。它似乎和 50 年未解决的量子物理中著名的卡迪森 - 辛格（Kadison-Singer）问题相似。

几个世纪以来，从数学和工程领域开始，卡迪森 - 辛格问题已经渗入诸多其它领域，但仍然无人能够破解它。美国密苏里大学哥伦比亚校区（University of Missouri in Columbia）的皮特 • 卡萨扎（Peter Casazza）和詹妮特 • 特雷梅恩（Janet Tremain）2014 年共同发表过一篇综述性的文章，称“这个问题”击败了过去 50 年间最杰出的数学家们的最大努力。

做为计算机学者，斯皮尔曼对量子力学和同卡迪森 - 辛格问题密切相关的 C*- 代数知之甚少。但是，当卡莱，那时执教于以色列耶路撒冷的希伯莱大学，向他描述了其多种等价形式后，斯皮尔曼立刻意识到他很可能是难题破解的最佳人选。“对我而言，我每天所做的研究工作正是围绕着它进行的，我肯定能证明它。”斯皮尔曼觉得他只需要几个星期的时间就可以完成破解。

然而，破解却历时 5 年的时间。终于在 2013 年，斯皮尔曼和他当年的博士后，现在执教于普林斯顿大学的亚当斯 • 马库斯（Adam Marcus），还有当

破解难题的计算机学者：斯里瓦斯塔瓦（左）、马库斯（中）和斯皮尔曼

年的研究生，现在执教于加州伯克利大学的尼基尔•斯里瓦斯塔瓦（Nikhil Srivastava），一起完成破解。消息在数学界不胫而走。对 C*- 代数及相关领域略知皮毛的三位门外汉破解了他们的最大难题。

数学家们对这个石破天惊的消息忧喜参半。被卡萨扎和特雷梅恩称为“当今世界最重要的成果”的破解完全出人意料。过去两年里，卡迪森 - 辛格问题的专家们花了很大功夫整理答案的思路。卡萨扎感叹道：“斯皮尔曼、马库斯和斯里瓦斯塔瓦用了大量我们从未听说过的方法”，“虽然我们极度期待难题的破解，但其方法又实在令人费解。”

执教于加州洛杉矶大学的著名华裔数学家陶哲轩一直追踪卡迪森 - 辛格问题的进展。他评论说：“对破解方法有深度了解的人却不是破解它的人。”数学家们为了将这几拨毫不相干的人聚在一起讨论破解细节而举办了几个研讨会，但消化它们还需要几年的时间。陶补充说:“方法太诡秘了，我们还没准备好。”

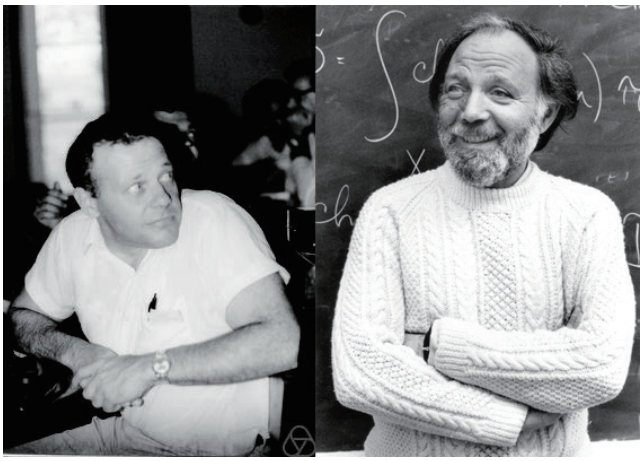
然而，计算机学者们却没有时间等待，他们立刻开始探索破解所带来的应用。例如，去年两位计算机学者将新方法应用到著名的旅行商问题而取得重大突破。执教于普林斯顿大学的数学家阿萨夫•奈尔（Assaf Naor），其研究领域和卡迪森 - 辛格问题接近，解释说:“这个问题太重要了，不可能没有大量应用。”

卡迪森 - 辛格（Kadison-Singer）问题

受物理大师狄拉克的启发，延伸海森堡的不确定性原理，理查德•卡迪森（Richard Kadison) 和艾沙道尔•辛格（Isadore Singer）1959 年提出：是否可以用某个子系统的完整信息来了解整个量子系统？不确定性原理指出一个粒子的某些性质，包括位置和动量，是不可能同时精确度量的。

让卡迪森和辛格不确定的是，能否通过同一时间观测到的某个子系统的大量不同性质来推断出整个大系统的信息呢？

如果是粒子沿着直线移动的系统，卡迪森和辛格的结论是否定的。在这种系统中，看似相同的粒子实际上是处于许多不同的量子状态。在一个电子邮件里，卡迪森进一步解释说：“不同的粒子可以同时处于相同的位置。换句话说，它们存在于平行空间内。”不过，他还是提醒大家这类系统是否真实存在尚不清楚。



卡迪森（左）和辛格

对于粒子不沿着直线移动的系统，或者是被称为“颗粒状的”，卡迪森和辛格并没有给出明确答案。这就是著名的卡迪森 - 辛格问题。

根据对连续空间的结果，卡迪森和辛格猜测在“颗粒状的”系统中也存在平行空间；就是说，结论也应该是否定的。但是，他们并没有将这一猜测正式列为猜想，这真是明智之举因为它最终被证明是错的。卡迪森多年后感叹说“幸亏当时没有大意。”

卡迪森目前执教于宾夕法尼亚大学，而辛格已从麻省理工学院退休，他们是在量子力学处于复兴时代提出这个著名问题的。至于如何解决它，当时的一些物理学家持“埋头钻研”的观点；另一些推崇数学的物理学家们则将它视为概率论随机过程基本结构的 C*- 代数问题。

C*- 代数的难度与深奥，用卡萨扎的话来讲“是数学里最抽象和捉摸不透的。外行对它一无所知。”因而，开始的 20 年里，卡迪森 - 辛格问题处于毫无进展的状态。

转机发生在宾夕法尼亚州立大学的退休教授乔尔•安德森（Joel Anderson），他证明这一问题等价于线性代数里是否可以将矩阵分解为子矩阵这一容易理解和叙述的问题。做为线性代数的核心内容，矩阵是用来描述直线、平面和高维空间的数学现象。一时间，卡迪森 - 辛格问题遍布各个领域；很快，它成为一个又一个研究领域内的重要课题。

然而，这些领域鲜有交集。直到卡萨扎发现它等价于信号处理方面的某个最重要课题之前，大家都没有意识到卡迪森 - 辛格问题的普及性。卡萨扎本人是研究信号处理的，其等价的难题是关于能否将信号分解为小型的、简单的信号问题。卡萨扎沉迷于卡迪森 - 辛格问题，直到 2005 年和特雷梅恩及另外两位合作者共同撰文证明它与多个数学和工程领域中的未破解难题等价；攻克其中任何一个，其它等价问题也就迎刃而解了。

等价问题的版本之一是几年前由执教于圣路易斯华盛顿大学的尼克•韦弗（Nik Weaver）提出的韦弗猜想。他的版本是关于能否将一组向量分为两组向

量的问题。“其美妙之处是引出了组合论的核心内容”，那正是卡迪森 - 辛格问题的本质，韦弗解释说。

让韦弗感到吃惊的是，除了在卡萨扎发表的综述文章里有所提及和在另一篇文章中被质疑外，韦弗猜想似乎未引起任何关注。其实，正是韦弗版本吸引了最终破解了卡迪森 - 辛格难题的人。

电子性质

2008 年，斯皮尔曼得知了韦弗版本后，他意识到那正是他想解决的难题。网络集合与向量集合是可以互相转换的。斯皮尔曼已经花了数年的时间尝试将网络视为实体的有效方法。具体地说，如果视一个网络为一个电子线路的话，流经某一段线路的电流大小就可以用来描述那一段线路在网络中的重要性。当卡莱将卡迪森 - 辛格问题的这一新版本，韦弗猜想，介绍给他时，斯皮尔曼敏锐地意识到它几乎等价于网络领域内一个看似简单的问题：是否可以将网络中的连接线段分成两组；一组红色，一组蓝色，使得红色线段组成的子网络和蓝色线段组成的子网络相对于原来的大网络来讲具有相似的电子性能呢？

显然，这不是在所有情况下都行的通的。如果一个网络包含两个高密度集群，之间由一条线段连接，那么，这条线段就至关重要了。如果将这条线段归入红色组，那么蓝色链接线段组成的子网络显然不可能和红色链接线段组成的子网络有相似的性能。事实上，蓝色的链接线段根本形成不了子网络。这是唯一阻碍将网络分解成小型但相似子网络的情况吗？这正是韦弗猜想的核心问题。换句话说，如果某一网络中不存在一条至关重要的链接线段，是否就可以将它分解为两个类似的、小型子网络的组合呢？

斯皮尔曼、马库斯和斯里瓦斯塔瓦对答案的直觉是肯定的。但这并不是仅仅根据他们在网络稀疏领域的研究成果，而是依据数以万计的模拟却无一例外的实验结果所得。“20 年前，我们三人是无法攻克这个难题的，”马库斯解释说，“现在，很多工作都是在模拟实验基础上进行的。”

尽管挑战一个接着一个，但是模拟的结果让他们坚信思路是正确的。不断取得的新进展激励着他们不懈地努力。到第 4 个年头上，马库斯的博士后合同到期，但他选择暂时离开学术界而加盟当地一个叫“Crisply”的创业公司，目的就是为了不离开耶鲁大学的所在地康州纽黑文。“我每周在公司工作 4 天，1 天去耶鲁大学继续攻关。”他回忆说。

一个网络的电子性能是由其“特征多项式”来决定的。做计算机模拟的过程中，他们 3 人发现相关的多项式似乎暗藏隐秘结构：所有相关多项式的解都是实数（多数多项式的解包含实数和复数）。更让人蹊跷的是如果将几个这类多项式相加所得的新多项式同样具有这个性质。“多项式比我们预想的要深奥许多”，马库斯解释说，“我们用它们传递信息，但它们本身却已经携带了信息。”

逐渐地，他们发展出新方法来表达这类“交错多项式”的隐秘结构。终于，2013 年 6 月 17 日，马库斯给 10 年前他在华盛顿大学念本科时的导师韦弗发了一封电子邮件。马库斯写道“希望您还记得我。我写这封邮件是因为我们认

为破解了您的猜想（证明与卡迪森 - 辛格问题等价的猜想）。”数天之内，这一惊人消息就传遍了整个博客。

证明的具体细节已经被详细审核过。“最精彩的是它所具有的独创性，”奈尔评论说。“这是为什么许多人热衷于未解难题，因为偶然地就会出现空前绝后的思路从而改变我们的思维。”

使用这种独特的思路，计算机学者破解了著名的“不对称”旅行商问题：推销员必须穿过数个城市，所选择的路径必须最短。不对称版本允许从城市 A 到 B 的距离与从 B 到 A 的距离不等这一可能性，例如路径包含单行道的情况。

迄今为止所有不对称版旅行商问题的近似解中的最佳算法要追溯到 70 年代，但没有人知道它到底有多准确。利用卡迪森 - 辛格问题的思路，加州伯克利大学的尼玛 • 安纳瑞（Nima Anari）和西雅图华盛顿大学的山恩 • 盖然（Shayan Oveis Gharan）证明这一算法要比预想的好很多倍。“这是非常非常重要的成果。”奈尔兴奋地说。

卡迪森 - 辛格问题的破解意味着它的十几个等价版本也一一成立。具体地说，破解证明了单个量子的信息可以扩展到整个量子系统；一个网络可以被分解成数个小型网络的组合；矩阵可以被化解成小型矩阵等等。证明本身不会改变量子力学领域内的研究，但是，卡萨扎指出，破解“对某些工程领域的影响是深远的”。现在，向量被证明可以分解为小型向量，因此它所代表的信号处理过程被大大缩短，因此它对信号处理领域带来的影响很大。

然而，理论与实践还是有很大区别的。破解只是证明了卡迪森 - 辛格问题的数个不同版本是成立的，但并未指出如何应用。从证明延伸出有用算法“是毫无希望的”，卡萨拉斩钉截铁地说。虽然证明已经得到了数学家们的肯定，但是，卡萨扎仍然希望更具构造性的、特别是用数学语言给出的证明会出现。他继续补充道说：“所有人都坚信这是不可能的，因此至今没人去尝试。”

密切关注卡迪森 - 辛格问题的数学家们也许会对三位外行人破解他们的中心问题感到遗憾，但是，据马库斯讲，事情并不是这样的。马库斯解释说：“实际上，C*- 代数领域内的数学家们已经清除了几乎所有的破解障碍，只剩下最后一个有待解决，而他们不具备解决的方法。破解费时 50 年的原因是因为它包括了两个步骤，而每一步都是极难的。”

经历了 5 年破解卡迪森 - 辛格难题后，马库斯说：“我仍无法用 C*- 代数的语言来描述它，因为我对这一领域一无所知。”破解最终由三位外行人完成的事实准确地表达了马库斯对数学家的评价：“当不同领域内的数学家们开始相互交流想法和信息时，奇迹往往就出现了。”

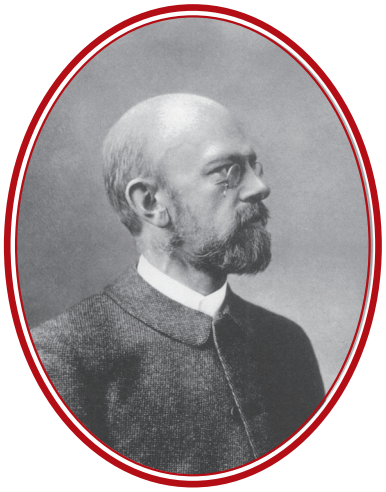
英文原文链接 https://www.quantamagazine.org/computer-scientists-solve-kadison-singer-problem-20151124

作者简介：

埃里卡 • 克拉瑞克（Erica Klarreich），是常住美国加州伯克利的自由撰稿人。她拥有美国纽约州立大学石溪分校的数学博士学位，主要发表数学和科学普及方面的文章。

译者简介：

赵京（Jennifer Zhao），印第安纳大学数学博士，密歇根大学迪尔本分校数学教授，至今已在密大迪尔本分校任职 20 余年。研究领域是应用数学。



希尔伯特第十问题漫谈

卢昌海

1. 问题

数学问题是数学中最具魅力的部分之一，并且也是数学史上许多思想和进展的重要源泉。据说有人曾建议德国著名的数学家希尔伯特（David Hilbert, 1862-1943）去解决费马猜想（Fermat's conjecture），以夺取为这一猜想而设的沃尔夫斯凯尔奖金（Wolfskehl Prize），希尔伯特却笑了笑回答说："我为什么要杀掉一只会下金蛋的鹅呢？"在希尔伯特看来，一个像费马猜想那样的数学问题对数学的价值是无可估量的。希尔伯特不仅舍不得"杀鹅"，还怀着极大的热诚为 20 世纪的数学界做了一回"寻鹅之人"。1900 年，在于巴黎举办的第二届国际数学家大会上，希尔伯特做了一次堪称数学史上影响最为深远的演讲，演讲的题目叫做"数学问题"（The Problems of Mathematics）。在那次演讲中，希尔伯特列举了 23 个他认为最具重要意义的数学问题[1]。那些问题被后人称为"希尔伯特问题"（problems of Hilbert）。自那次演讲之后，解决希尔伯特问题成了许多数学家终生为之奋斗的目标，而在解决这些问题的过程中源源不断产生出来的"金蛋"，则为 20 世纪的数学发展注入了极大的生机和活力。

在本文中，我们就来讲述有关这些数学问题中第十个——即所谓"希尔伯特第十问题"——的一些故事。

希尔伯特第十问题是一个与解方程有关的问题。 解方程大家都不陌生，在中学时我们就已解过许多简单的方程，比如 $2x-2y=1$，$x^2+y^2=z^2$，等。我们所举的这两个简单方程有一个共同特点，那就是都只包含未知数的整数次幂，

[1] 这 23 个问题中有一些——比如第八问题——不是单一问题。另外， 这些问题是以演讲的文稿而非演讲本身为依据排列的， 希尔伯特在演讲中直接提及的只有其中的 10 个问题（本文所述的第十问题不在其中）。

而且系数也都是整数，这类方程被称为整系数代数多项式方程。数学家们对这类方程的研究有着漫长的历史。

在公元 3 世纪的时侯，古希腊数学家丢番图（Diophantus, 200?-284?）发表了一部长篇巨著，叫做《算术》（*Arithmetica*）。 这部著作共有 13 卷，经过 1700 余年的漫长岁月，目前被公认流传于世的有 6 卷[2]。丢番图在这部著作中对整系数代数多项式方程进行了大量研究，那些研究对代数与数论的发展有着先驱性的贡献。后人为了纪念他，把整系数代数多项式方程统称为丢番图方程（Diophantine Equation），而丢番图本人，则被一些人尊称为代数学之父。

对于丢番图方程，数学家们最感兴趣的一个传统问题乃是它是否有整数解（或自然数解）。对于简单的丢番图方程来说，这是很容易找到答案的，比如上面提到的 $x^2 + y^2 = z^2$ 有整数解（早在 3000 多年前，中国古代的数学家就知道这个方程的一组特解：即“勾三股四弦五”）；另一方面，$2x - 2y = 1$ 则没有整数解（因为方程的左边为偶数，右边却为奇数）。但对于一般的丢番图方程来说，判断它是否有整数解却往往是一件极其困难的事情，其中最著名的例子就是上面提到过的费马猜想，即 $x^n + y^n = z^n$ 在 $n > 2$ 时没有非零整数解，它是在隔了 300 多年后才得到的证明[3]。

长期以来，人们对丢番图方程是否有整数解的研究都是针对特定形式的丢番图方程进行的。但是，人们显然也可以提出这样一个问题，即有没有办法对任意形式的丢番图方程是否有整数解进行研究？或者更具体地说，是否能找到一种普遍的算法（algorithm），可用来判定一个任意形式的丢番图方程是否有整数解，从而一劳永逸地解决这类问题？这就是著名的希尔伯特第十问题。这样的问题在数学上被称为判定问题（decision problem），因为它寻求的是对数学命题进行判定的算法。

希尔伯特是一位对数学充满乐观信念的数学家。在他提出希尔伯特第十问题的时侯，虽然没有明确表示那样的算法一定存在，但他没有用“是否存在那样的算法”作为问题的表述方式，而是直接要求数学家们寻找那样的算法，可见他对存在一个肯定的答案怀有期待。这种期待与他在其他方面对数学所表示出的乐观看法是一脉相承的。

但是，数学的发展却往往是像希尔伯特那样的数学大师都无法预料的。

2. 算法

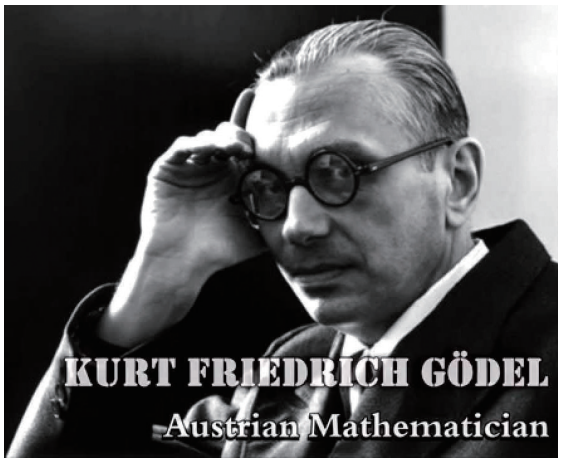
希尔伯特第十问题要求寻找判定丢番图方程是否有解的算法。但究竟什么是算法呢？ 在希尔伯特提出问题之时却其实并不存在一个明确定义。这是研

[2] 除公认的 6 卷外，另有 4 卷发现于 20 世纪的阿拉伯文抄本也被认为有可能是丢番图《算术》或其注释本的译本。

[3] 细心的读者可能会注意到，在本文中我们没有对整数、 正整数及自然数 (零及正整数) 等做出区分。这是因为可以证明，对于希尔伯特第十问题来说，把解限定在这些数集的任意一者中都是等价的。

究希尔伯特第十问题所遇到的第一个困难。这一困难使得希尔伯特第十问题在提出后整整 30 年没有取得任何实质进展。

对算法的研究直到 20 世纪 30 年代开始才逐渐深入起来。



逻辑学大师哥德尔

什么是算法呢？粗略且顾名思义地讲，算法就是（通过有限多的步骤）对数学函数进行有效计算的方法。反过来说，如果一个数学问题能够通过可以有效计算的数学函数得到答案，那么我们就称这一数学问题存在算法。因此算法研究的一个重要的切入点便是寻找可以有效计算的函数。但是，到底什么样的函数是可以有效计算的呢？一开始数学家们并没有普遍结论，只知道一些最简单的函数（比如常数函数），以及用那些函数通过若干简单规则（比如相加）组合出来的函数，是可以有效计算的。数学家们将这类函数称为递归函数（recursive function）。

1931 年，年轻的法国数学家赫尔布兰德（Jacques Herbrand, 1908-1931）对递归函数进行了研究，并给著名逻辑学家哥德尔（Kurt Gödel, 1906-1978）写信叙述了自己的研究结果。不幸的是，哥德尔当时正处于自己一生最重大的成果——哥德尔不完全性定理（Gödel's incompleteness theorems）——的研究期间，没有立即对赫尔布兰德的工作做出回应[4]。更不幸的是，那年的夏天，年仅 23 岁的赫尔布兰德在攀登阿尔卑斯山时不幸遇难，他的工作因此被暂时埋没了起来。

与赫尔布兰德的研究差不多同时，在 20 世纪 30 年代初的时侯，美国普林斯顿大学的逻辑学家丘奇（Alonzo Church）也在积极从事逻辑及算法的研究，并且发展出了一套新的逻辑体系。他并且让自己的两位学生——克林（Stephen Kleene, 1909-1994）与罗瑟（John Rosser, 1907-1989）——对该逻辑体系做进一步的细致研究。他这两位学生都是第一流的学生，克林更是后来自己也成为了第一流的逻辑学家，他们的研究很快就有了结果，但这结果却大大出乎丘奇的意料：他们发现丘奇的那套体系竟然是自相矛盾的！自相矛盾的逻辑体系只能有一个命运，那就是被放弃。但幸运的是，丘奇的那套体系中有一个

[4] 哥德尔给赫尔布兰德的回应只是不够“立即”，而非没有。他的回信写于 1931 年 7 月 25 日，赫尔布兰德遇难的时间则是 7 月 27 日，只相隔了两天，赫尔布兰德没来得及收到回信就去世了。

图灵（1912-1954）

丘奇（1903-1995）

关于“有效计算”的两个数学途径：图灵机和兰姆达运算

组成部分仍然是自洽的，从而可以被保留下来，那个组成部分叫做兰姆达运算（λ-calculus）。兰姆达运算是做什么用的呢？它可以用来定义函数，而且所有用兰姆达运算所定义的函数都是可以有效计算的。在对兰姆达运算做了研究之后，丘奇提出了一个大胆的猜测，那就是所有可以有效计算的函数都可以用兰姆达运算来定义。

1934 年，丘奇向到普林斯顿大学访问的哥德尔介绍了这一猜测，但哥德尔却不以为然。丘奇不服气，于是请哥德尔给出一个他认为合适的方法，来描述可以有效计算的函数。哥德尔没有让他久等，一两个月后就给出了一种完全不同的描述。哥德尔所给出的描述的基础正是 3 年前赫尔布兰德在给他的信中叙述的结果。哥德尔对这一结果进行了完善。这一结果因此被人们称为赫尔布兰德 - 哥德尔递归函数。

就这样，丘奇与哥德尔各自给出了一种体系，来描述可以有效计算的函数。那么两者孰是孰非呢？丘奇与克林经过研究，很快证明了这两种看上去完全不同的描述方式实际上是彼此等价的。这两位著名逻辑学家的工作殊途同归大大增强了丘奇的信心，他相信这就算是找到了可以有效计算的函数的普遍定义。但哥德尔及其他一些人对此却仍然怀有疑虑。

最终打消这种疑虑的是英国数学家图灵（Alan Turing）。

图灵当时对丘奇及哥德尔在这一领域中的研究并不知情。他所研究的课题是什么样的运算可以用抽象计算机来实现[5]。他的这一研究对后来计算机科学的发展起到了深远的影响。在图灵的研究接近完成的时侯，他的导师注意到了丘奇与哥德尔的工作。于是图灵对双方的工作进行了比较，结果发现丘奇与哥德尔所定义的那些函数与他的抽象计算机可以计算的函数恰好吻合！图灵把这

[5] 具体地讲，图灵当时的目的是要研究希尔伯特于 1928 年提出的有关一阶逻辑的判定问题。

一结果作为附录加进了自己的论文中。这一下就连哥德尔也心悦诚服了，毕竟，有什么能比在抽象计算机上可以直接计算更接近“可以有效计算”以及算法的基本含义呢[6]？

在这些有关算法的研究中，数学家们还提出了一个重要的概念，叫做“递归可枚举集”（recursively enumerable set）。什么是递归可枚举集呢？就是那些由可以有效计算的函数所生成的自然数的集合[7]。我们知道，对于集合来说，一个最基本的问题就是判断一个元素是否属于该集合。递归可枚举集也不例外。但是数学家们在研究递归可枚举集的时侯，却发现了一个十分微妙的结果，那就是对于某些递归可枚举集来说，我们无法判定一个自然数是否属于该集合！换句话说，有一些递归可枚举集是不可判定的。这一结果把对算法的研究与判定问题联系了起来，为后来解决希尔伯特第十问题埋下了重要的伏笔。

这一系列结果的出现主要集中在 1936-1937 年间。那时侯，在数学中存在无法判定的命题本身已经不是一件新鲜事了。因为早在 5 年前，哥德尔就已经证明了他那著名的不完全性定理，即任何足够复杂并且自洽的数学体系都必定包含不可判定的命题[8]。但当时已知的不可判定命题大都集中在逻辑领域内。那么在数学的其他领域中究竟哪些命题是不可判定的呢？这个问题在整整 10 年之后才开始有答案。

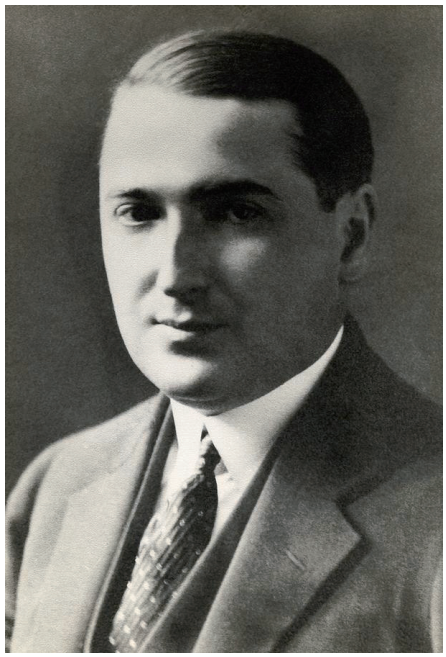
1947 年，美国数学家波斯特（Emil Post, 1897-1954）找到了第一个逻辑领域以外的不可判定命题。

波斯特是一位有着深刻洞察力的逻辑学家，7 岁时随父母从波兰移民到美国，是美国逻辑学领域的先驱者之一。他比哥德尔早了将近 10 年就得到了与哥德尔不完全性定理相似的结果，但由于想对结果作更全面的分析而没有及时发表。1936 年，几乎与上面提到的哥德尔、丘奇及图灵同时，波斯特独立提出了非常类似于图灵的结果。波斯特同时还是最早意识到希尔伯特第十问题可能会有否定答案的数学家之一。他在 1944 的一篇文章中明确提出希尔伯特第十问题“期待一个不可解性证明”。当时波斯特在纽约市立大学（The City College of New York）任教，他的这一观点深深地打动了一位学生，使后者走上了毕生钻研希尔伯特第十问题的征途。

[6] 不过，需要提醒读者的是，把可以有效计算的函数等同于丘奇、哥德尔、图灵等人提出的、彼此等价的函数并不是建立在数学证明的基础之上的，而只是一个猜测性的论题，即所谓“丘奇论题”（Church's Thesis）。一般认为，丘奇论题是无法被证明的，因为“有效计算”本身是一个不存在精确定义的概念，它本质上取决于人们对“有效”及“计算”这样的非精确概念的理解。如果有一天人们发现有必要改变或拓展原先对这些概念的理解，则数学上的一些相关结果——包括希尔伯特第十问题的解决方式——会有可能需要作出相应的改变。

[7] 读者们想必猜到了，这些集合之所以被称为“递归可枚举集”，乃是因为可以有效计算的函数的定义之一叫做“赫尔布兰德 - 哥德尔递归函数”。

[8] 确切地讲，这是哥德尔第一不完全性定理（Gödel's first incompleteness theorems）。



美国逻辑学领域的先驱者之一波斯特

那位学生名叫戴维斯（Martin Davis, 1928-），是解决希尔伯特第十问题的关键人物。

3. 丢番图集

戴维斯的父母也是从波兰移民来美国的，戴维斯本人则出生在纽约。1944-1948 年间，戴维斯在纽约市立大学学习，波斯特对希尔伯特第十问题“期待一个不可解性证明”的看法用戴维斯本人的话说是开始了他“对这一问题的终身迷恋”。从纽约市立大学毕业后，戴维斯来到了美国逻辑学的中心普林斯顿，跟随丘奇从事进一步的研究。戴维斯在普林斯顿研究的是一个冷门课题——别小看这种课题，对研究生来说，研究那样的课题往往最容易出成果，且不容易被别人抢先或与人“撞车”。但戴维斯无法抵御希尔伯特第十问题的魅力，在研究自己课题的同时，还分出精力来继续思考希尔伯特第十问题。最后他甚至在博士论文上特意增添了一个章节，简单叙述了自己在希尔伯特第十问题上“不务正业”的结果，那是在 1950 年。这一增添的章节使戴维斯的那篇原本会像多数研究生工作那样被人遗忘的博士论文变得重要起来，甚至可以名垂史册。3 年后，戴维斯发表了一篇更详细的论述。他的这一工作标志着数学家们正式开始解决希尔伯特第十问题。

戴维斯在他的研究中引进及运用了一个很重要的概念，叫做“丢番图集”（Diophantine set）。和我们在前面提到过的递归可枚举集一样，丢番图集也是一些由自然数组成的集合。所不同的是，递归可枚举集是由可以有效计算的函数生成的，而丢番图集则是通过丢番图方程生成的。戴维斯的重要发现就在于找到了这两类集合之间的一种关联。

戴维斯为什么要引进丢番图集的概念呢？是因为倘若希尔伯特第十问题具有肯定的答案，即存在一个算法来判定丢番图方程是否有解，那么我们就可以用这一算法来确定一个自然数是否属于某个丢番图集，这表明所有丢番图集都是可判定的。反过来说，倘若我们可以证明某些丢番图集是不可判定的，也就等于证明了希尔伯特第十问题具有否定的答案。因此，丢番图集的可判定与否跟希尔伯特第十问题具有肯定还是否定答案有着密切关系，这正是戴维斯引进丢番图集这一概念的价值所在。

受波斯特影响，戴维斯倾向于认为希尔伯特第十问题具有否定答案，因

此，他想要证明的是某些丢番图集是不可判定的。那么，怎样才能证明某些丢番图集是不可判定的呢？最好的办法就是设法把它与某一类已经知道是不可判定的集合联系在一起[9]。而什么样的集合是已经知道是不可判定的呢？正是前面提到过的递归可枚举集。因此在这两类集合之间建立关联是非常重要的。尤其是，如果能证明所有递归可枚举集都是丢番图集，那就等于证明了某些丢番图集是不可判定的，从而也就等于证明了希尔伯特第十问题的否定答案——即波斯特所说的“不可解性证明”。

解决希尔伯特第十问题的关键人物戴维斯

这正是戴维斯寻找希尔伯特第十问题否定答案的思路。

不幸的是，在戴维斯找到的丢番图集与递归可枚举集的关联中用到了一个被称为“有界全称量词”（bounded universal quantifier）的逻辑算符。如果没有这个有界全称量词，他就可以证明所有递归可枚举集都是丢番图集，一切也就大功告成了。可是数学证明是差不得分毫的，因为有了这个有界全称量词，戴维斯的逻辑链条中断了，从而无法对希尔伯特第十问题作出解答。但尽管如此，戴维斯仍然相信所有递归可枚举集都是丢番图集，他把这一点作为一个猜测提了出来。

在当时，这是一个很大胆的猜测。

很明显，要证明戴维斯的猜测，关键就得把那个有界全称量词去掉，这是一件非常困难的事情。直到 9 年之后，即 1959 年，戴维斯才在与美国哲学家普特南（Hilary Putnam, 1926-2016）的合作中有条件地做到了这一点。他们为做到这一点所付出的代价，是不得不引进了两条额外假设。

初看起来，这像是不进反退：原本只有一个麻烦（即“有界全称量词”），现在反而变成了两个（即“两条额外假设”）。但数学假设的证明难度不是用数量来简单衡量的，戴维斯与普特南所引进的那两条额外假设比那个有界全称量词来得具体，因而处理起来要容易一些。在发表这一研究的全文之前，戴维斯

[9] 这里的用词需稍作说明：当我们对集合使用“不可判定”一词时，有两种不同的用法（读者不难依上下文做出区分）：第一种是针对某个特定的集合，指的是无法判定一个自然数是否属于该集合；第二种是针对某一类集合，指的是该类集合中至少有某些特定集合是在第一种用法下不可判定的。

Julia Robinson Mathematics Festival

Educational Program of MSRI Mathematical Sciences Research Institute

第一届朱莉娅·罗宾逊数学嘉年华在 2007 年举行；2013 年后通过和美国数学会合作，它已经变成一个世界性的数学普及活动

与普特南把自己的结果寄给了研究希尔伯特第十问题的另一位重要人物——美国数学家罗宾逊夫人（Julia Robinson, 1919-1985），想先听听她的看法。

这一寄揭开了一段新的合作，把他们的结果又大大向前推进了一步。

4. 罗宾逊猜想

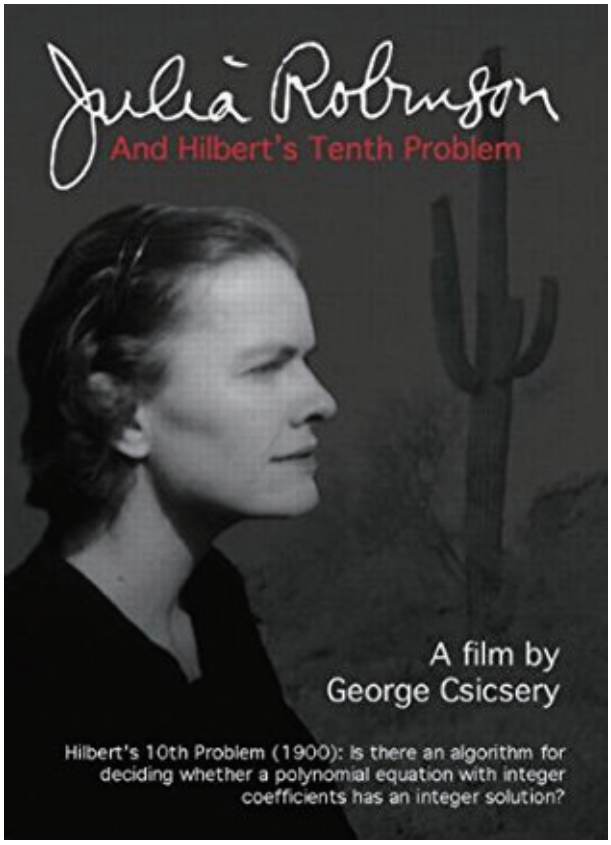
数学是一个性别比例相当失调的领域，罗宾逊夫人是该领域中为数不多的女数学家之一。与其他一些女数学家一样，她一生在追求学术的过程中遇到过许多坎坷。这些坎坷既有来自社会的，也有来自自己生活的。罗宾逊夫人幼年时屡患疾病，导致身体虚弱，无法生育，这一点曾使酷爱家庭的她陷入极度的痛苦之中。后来，在她那同为数学家的丈夫引导下，是数学的力量让她渐渐摆脱了痛苦的阴影。罗宾逊夫人的丈夫早年曾是她的数论教授，帮助她打下了非常扎实的数论基础。

罗宾逊夫人自 1948 年起开始研究希尔伯特第十问题，并曾与戴维斯有过交流。当她收到戴维斯与普特南寄来的结果时，凭借自己的数论功底，很快就发现了他们所作的两个假设中有一个可以去掉，同时整个证明也可以作极大的简化。1961 年，戴维斯、普特南及罗宾逊夫人合作发表了这一简化后的结果。这一结果是戴维斯、普特南的逻辑技巧与罗宾逊夫人的数论功底的完美结合，也是数学家们在希尔伯特第十问题的研究中所取得的又一个重要进展。

在这一进展中戴维斯与普特南所作的两个假设只剩下了一个。但这剩下的一个却是连罗宾逊夫人也无法去除的。这个假设涉及到一种被称为“指数丢番图集”（exponential Diophantine set）的集合，这种集合类似于丢番图集，但却涉及到指数函数。倘若有人能证明指数丢番图集实际上就是丢番图集——这也正是那剩下的假设之所在，那么戴维斯、普特南及罗宾逊夫人的工作就完全了，希尔伯特第十问题也就被证明具有否定答案了。但指数丢番图集究竟是不

是丢番图集呢？却困住了这三人。

对罗宾逊夫人来说，指数丢番图集其实并不陌生。早在 1948 年，当她刚刚涉足希尔伯特第十问题的时侯，就研究过由著名波兰逻辑学家塔尔斯基（Alfred Tarski, 1901-1983）所提出的一个猜测。该猜测认为指数丢番图集不是丢番图集。经过一段时间的研究后，罗宾逊夫人开始怀疑起了塔尔斯基的猜测，因为她找不到任何证据可以支持这一猜测。于是她转而作出了一个与塔尔斯基相反的猜测，即指数丢番图集实际上就是丢番图集，这个命题被称为罗宾逊猜想。这也正是戴维斯、普特南及罗宾逊夫人 1961 年的工作中唯一缺失的环节。他们距离希尔伯特第十问题的解决只剩下了一步之遥，但这一步却难似登天。



电影《朱莉娅·罗宾逊和希尔伯特第十问题》

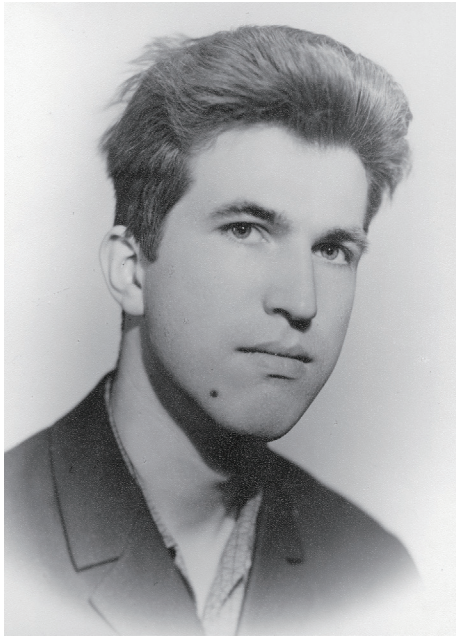
在罗宾逊夫人沉醉于希尔伯特第十问题的那些年里，幼年患病留下的后遗症一再困扰着她。当年的一位医生甚至预言她的心脏机能受损严重，也许活不过 40 岁。 这一预测虽然很幸运地由于后来的一次成功的心脏手术而没有成为事实，但每一年的生日（顺便说一句，罗宾逊夫人的生日是 12 月 8 日——编者注），罗宾逊夫人都要在吹熄蜡烛的时侯许愿，希望能够看到希尔伯特第十问题的解决——无论谁来解决都可以，但一定要在她有生之年解决。“我无法忍受在不知道答案的情况下离开人世”——这是罗宾逊夫人的话。

时光一年一年地流逝，罗宾逊夫人的愿望一次一次地落空。那手握最后一把钥匙的人究竟在哪里呢？

在那些年，戴维斯也常常被人问到这一问题。当时正是冷战时期，对美国人来说世界上最遥远的地方莫过于是俄国。因此，戴维斯总是戏剧性地回答说：“那会是一位聪明的俄国年轻人。”如果戴维斯是一位占星师的话，这句回答足可让他震动天下，因为他每一个字都说对了！一位聪明的俄国年轻人从世界的另一端走上了数学舞台，他的名字叫做马蒂亚塞维奇（Yuri Matiyasevich, 1947-），他将为这根长长的智慧链条扣上最后一环。

5. 解决

马蒂亚塞维奇于 1947 年出生在苏联的列宁格勒（今俄罗斯的圣彼得堡）。他 12 岁时父亲就不幸去世，但家境贫寒的马蒂亚塞维奇凭借优异的数学成绩在苏联的数学竞赛体系中脱颖而出，获得了良好的受教育机会。1965 年，他还在念本科的时侯，他的导师马斯洛夫（S. Yu. Maslov, 1939-1982）就建议他去证明丢番图方程的不可判定性。马斯洛夫在建议时轻描淡写地补充说“这个问题也被称为希尔伯特第十问题，但你不必理会这个”。马蒂亚塞维奇说他对研



希尔伯特第十问题的解决者马蒂亚塞维奇，1970 年解决此问题时不满 23 岁

究这类不可解问题没有经验，马斯洛夫回答说不可解问题没什么大不了的，无非就是把它约化成一个已知是不可解的其它问题。他还告诉马蒂亚塞维奇说有几个美国人曾做过一些研究，但不必理会那些研究，因为它们“很可能是不充分的”。

带着马斯洛夫的建议，马蒂亚塞维奇开始研究起了希尔伯特第十问题。但他的研究并不顺利，他一度误以为已解决了问题，甚至开始准备做报告，结果却发现自己犯了一个错误。经过了一段时间的徒劳无功之后，他开始阅读起“几个美国人”的那些“很可能是不充分的”工作来，但依然没有获得实质性进展，倒是他作为“研究希尔伯特问题的本科生”的名声走红了校园，不时遭来一些善意的取笑。毕业的时间渐渐临近，他只好把这个艰深的问题放在一边，以便可以有时间做一些其他的工作——比如应付毕业论文。

一晃又是几年，到了 1969 年，顽强的罗宾逊夫人又向希尔伯特第十问题发起了一次冲击。这一次虽然还是没有成功，但她为证明罗宾逊猜想提出了一条非常巧妙的思路。罗宾逊夫人的结果发表后，很快有同事把这一消息告诉了马蒂亚塞维奇。但这时的马蒂亚塞维奇早已决定不再把时间浪费在希尔伯特第十问题上了，于是没有理会这一消息。不过，事情接下来的发展变得很富有戏剧性，用马蒂亚塞维奇自己的话说：“在数学天堂的某个角落里必定存在着一位数学之神（或女神），不想让我错过罗宾逊夫人的新论文。”由于他此前对希尔伯特第十问题的研究，苏联的一份数学评论杂志把罗宾逊夫人的论文寄给了他，让他加以评论。就这样，马蒂亚塞维奇终于还是看到了罗宾逊夫人的论文。

这一看之下他立刻被罗宾逊夫人的思路所吸引，重新投入到了希尔伯特第十问题的研究上来。

在接下来的几个月时间里，马蒂亚塞维奇一直在思索罗宾逊猜想。1969 年在不知不觉间落下了帷幕。在除夕夜的派对上，马蒂亚塞维奇因过于出神，走的时侯竟错穿了他叔叔的衣服离去。这样全神贯注的投入终于获得了巨大的成功。1970 年新年到来后的第 4 天，马蒂亚塞维奇成功地证明了罗宾逊猜想，从而一举解决了希尔伯特第十问题。但有了几年前误以为解决希尔伯特第十问题的教训，这一次他把文章交给了马斯洛夫及另一位数学家栗弗席茨（Vladimir Lifshits），请他们检验，然后携未婚妻出外滑雪度假。两个星期后当他回到学校，一切都变了，他的论文经受住了以眼光犀利著称的数学家法蒂夫（D. K.

Faddeev, 1907-1989）与马尔科夫（A. A. Markov, 1903-1979）的检验。

马蒂亚塞维奇成为了希尔伯特第十问题的解决者。

1 月 29 日，马蒂亚塞维奇做了有关他研究成果的第一次公开演讲。那次演讲中的一位听众把这一成果带到了不久之后在新西伯利亚召开的一次数学会议上，而那次会议的出席者中恰好有一位是罗宾逊夫人的同事。就这样，马蒂亚塞维奇解决希尔伯特第十问题的消息很快传遍了数学界。那时候马蒂亚塞维奇还不满 23 岁，正是一位“聪明的俄国年轻人”。

2 月 25 日，罗宾逊夫人接到了同事的电话，告知她这一消息。那一年的生日，当罗宾逊夫人又将吹熄生日蜡烛时，她停了下来，忽然意识到自己许了这么多年的愿望已经成为了现实，那是一种美妙的感觉。虽然她自己曾经那么地接近答案，却还是失之交臂，但她没有觉得遗憾，因为对于像她那样真正热爱数学的人来说，对数学真理的欣赏远远超越了任何个人的荣誉。在给马蒂亚塞维奇的祝贺信中，罗宾逊夫人这样写道：“让我特别高兴的是，当我想到我最初提出那个猜想的时侯，你还是个孩子，而我不得不等待你的长大。”戴维斯也非常兴奋，他在自己的经典著作《可计算性与不可解性》（*Computability and Unsolvability*）的平装本序言中写道：“我一生最大的快乐之一是 1970 年 2 月读到马蒂亚塞维奇的工作。”而年轻的马蒂亚塞维奇同样对戴维斯、罗宾逊夫人，以及在解决希尔伯特第十问题的漫长征途中做出贡献的所有前辈数学家表达了深深的敬意。

在 20 世纪六七十年代那个寒冷的政治冬天里，这些第一流的数学家们用他们的杰出工作划开了冷战的冰层，让世人看到了科学的伟大人文力量。按照罗宾逊夫人的说法，这是一种存在于科学家心中的观念，它跨越地理、种族、意识形态、性别、年龄，甚至时代而存在，过去、现在及未来的所有数学家们彼此都是同事，他们献身于一个共同的目标，那便是最美丽的科学与艺术。

这是希尔伯特第十问题留给我们最丰厚的精神遗产。

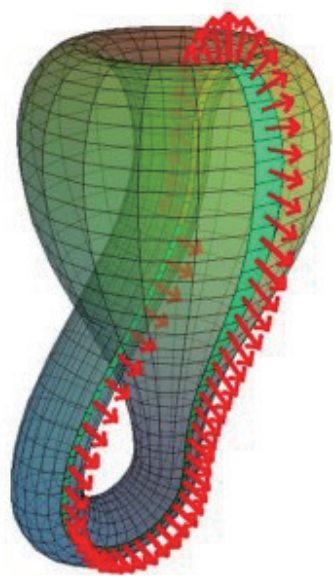
作者简介：卢昌海，哥伦比亚大学物理学博士，现旅居纽约，为本刊特约撰稿人。

克莱因瓶

Konrad Polthier／文　丁 玖／译

我第一次和克莱因瓶打交道以失败而告终。当我还在学校时，我在一本周刊上看到了一张克莱因瓶的图片。我和一位专门从事物理设备工作的玻璃制造者朋友分享了我对此的迷恋。几天后，我就成了由玻璃制成的实体克莱因瓶的一个骄傲的拥有者。

这样的瓶子能做什么？为什么不用它做点事？填充它并不容易，因为流入的水堵住了内部的空气出来。所以我决定把剩下的空气保留在瓶子里，看看这个半填充瓶作为一个温度计有多有效。我添加了几种高锰酸钾晶体来使水变色，使其更容易标记玻璃上的水位。

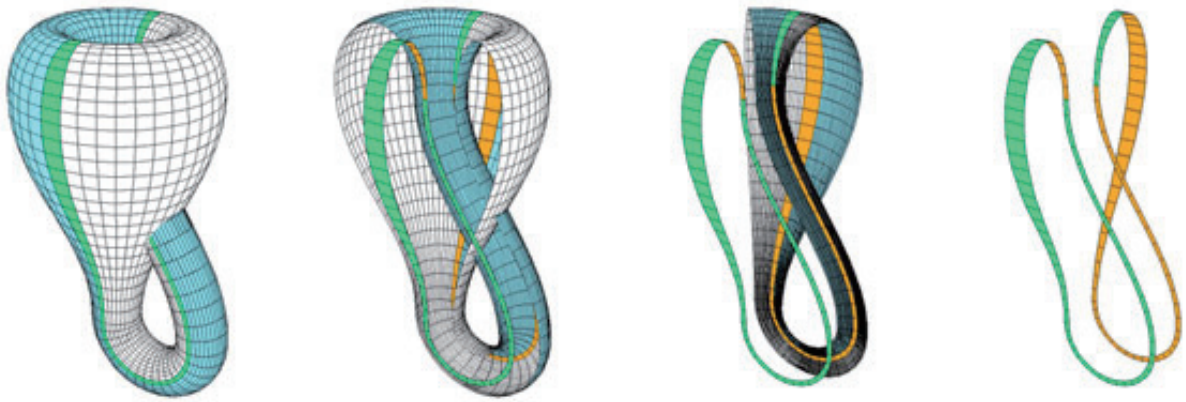


令我高兴的是，这种原始但有趣的温度计确实显示了白天的生命迹象。不幸的是，第二天早上就出现了一场灾难，大量的红水泼在我的窗台上。

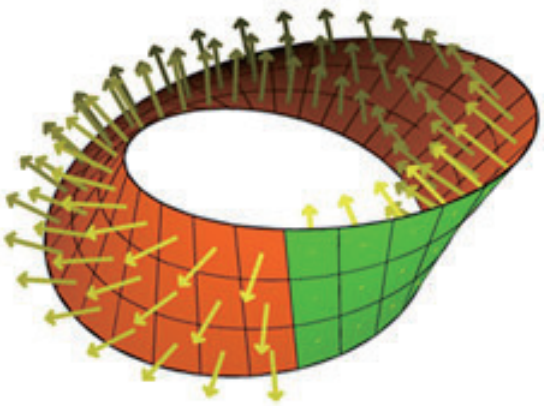
这是冬天，夜间的低温将瓶子里剩余的空气压缩得太厉害，以至于克莱因瓶手柄内的水位低于下部曲线，从而吸入了更多的空气。当空气在早晨再次升温时，体内空气的增加使水位在柄内过高上升。在那些日子里，我无法找到使得水和空气稳定的比例。

克莱因瓶是在 1882 年被克莱因（Felix Klein）发现的[1]，从此以后，在“象牙塔”之外，它进入了为一

[1] F. Klein, Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale, Teubner Leipzig (1882), p. 80.



般公众所知的数学形体的画廊。这个瓶子是一个单侧的曲面，就像众所周知的莫比乌斯带一样，但更加迷人，因为它是封闭的，没有边框，也没有封闭的内部和外部。按照克莱因的方式，我们使用视觉模型来研究这个曲面。



从莫比乌斯带到投影平面

莫比乌斯带是最简单的单侧曲面，并且很容易由一张纸带做成。标记纸张的两面——例如，在前面画一些红点，而在背面画一些绿点。现在将条带扭转后，把两端粘在一起，使红点附在绿点上。这就成了一个莫比乌斯带，沿表面移动不越过边界就能走遍红色及绿色的圆点。

这个带子于 1858 年由德国天文学家和数学家莫比乌斯（August Ferdinand Möbius）发现。加上 0 次扭转，2 次扭转或更一般地，偶数次扭转将始终产生双侧曲面。类似地，非偶数次的扭转将产生各种各样的单侧曲面。有趣的是，莫比乌斯带的边界是一个单一的闭合曲线。

拓扑学是研究形状在连续弯曲和拉伸下不变化的那些性质的一门数学学科。例如，如果一个莫比乌斯带由橡胶片做出，我们略微将它拉长而不会破坏它，它仍然是一个单侧曲面。相比之下，如果我们在没有扭转的情况下粘合了条带的两端，则所得的圆柱形形状将是在拓扑意义下不同的双侧圆柱面。

尽管很简单，但莫比乌斯带是一个真正的数学发现。关于曲面可定向性的推理是理解和分类拓扑中的曲面和流形的关键之一。

拓扑的后续任务是摆脱莫比乌斯带的剩余边界以产生封闭的曲面。最简单的解决办法是用橡皮莫比乌斯带并把所有边界点连续地拉到一起，就像我们可以将一个圆的点拉成圆锥面。无论我们是否去掉圆锥面的尖点，我们获得一个没有边界的封闭曲面，它是单侧的，因为无论从哪里开始我们总是可以去走到莫比乌斯带，然后像以前一样切换边。这个曲面称为投影平面，在拓扑上它是最简单的一个封闭的单侧曲面。不幸的是，射影平面的几何实现是相当复杂的。

例如，直到 1903 年，鲍埃（Werner Boy）[2] 才根据希尔伯特（David Hilbert，鲍埃的博士生导师）的建议，发现了没有尖角或边缘的射影平面的一个几何实现。幸运的是，莫比乌斯带的不同闭合可更简单地得到。

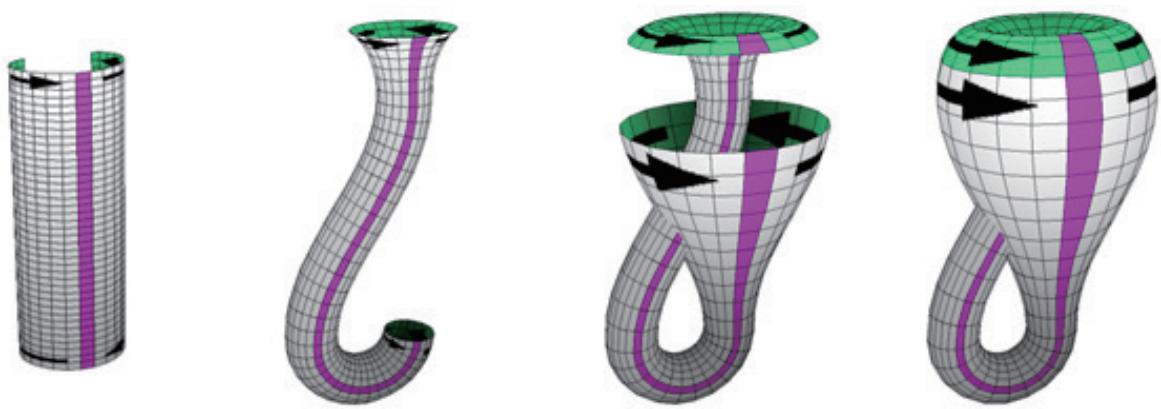
克莱因瓶不是一个甜甜圈

像甜甜圈形状的圆环面的构造从一张纸开始，将它卷起来形成圆柱面，然后将两端弯过来形成周围闭合的形状。圆柱面在一侧的内部与另一侧的内部连接，外部也一样。因此，环面是双侧曲面。

但是，我们也可以使用圆柱面来制作一个克莱因瓶。不像我们从纸条上制作莫比斯带时所做的那样加一个扭转，我们将圆柱面的一端在圆柱面内绕回，将其粘合到另一端，并将两个边界线以相反的方向粘合在一起。为了以令人愉快的形状来实现，我们调整圆柱面的宽度。这使我们能够将内部粘合到外部，获得一个单侧曲面。在下图中，我们使用白色和绿色来区分原来的圆柱面的两侧。当克莱因瓶完成后，颜色仍然显示圆柱面粘合在何处，但在任何其它平行圆周粘合也行。

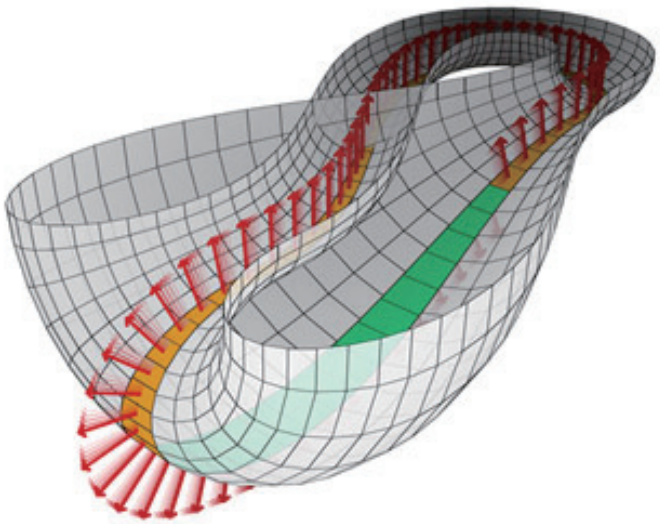
在他的原始著作 [1] 中，克莱因将他的瓶子作为将“橡胶管翻转，使其通过自身内外相遇”的“某种无界的双曲面”的可视化。

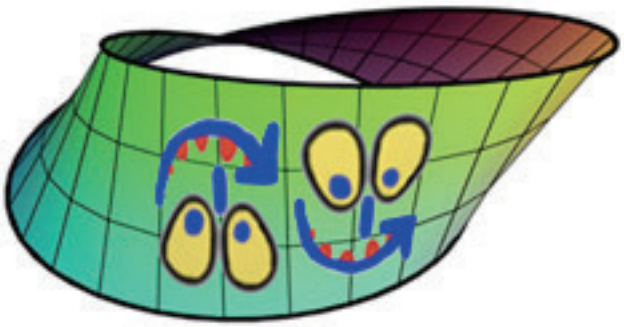
不幸的是，克莱因瓶不界定体积——换句话说，它没有内部。这意味着你可以在“克莱因瓶”甜甜圈上放上两倍于环面甜甜圈的糖，但是它里面却没有面团！



[2] W. Boy, Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen, Math. Ann. 57 (1903), pp. 151-184.

可定向性和单侧性





在研究莫比乌斯带或克莱因瓶时，可定向性和单侧性是很重要的。如果你能直立地站在一个曲面上沿着它走动，可以到达曲面上每一点的两侧，则该曲面是单侧的。自然界中的大部分曲面是双侧的。例如，圆球面是双侧的，这确保我们总是走在地球之上，而不在之下。类似地，轮状环面，椒盐卷饼，以及更一般地，包围立体体积的所有曲面都是双侧的。

在自然界中，我们通常不会看到单侧曲面，且记住莫比乌斯发现的第一个单侧曲面是一个抽象的数学结构。在克莱因瓶的这个图示中，通过沿着莫比乌斯带绘制垂直的箭头（法向量），我们强调其单侧性：通过连续的运动，我们可以将箭头传送到一个点的两个侧表面，这意味着我们不能区分它的前面和后面。不幸的是，单侧面的这个概念取决于周围的空间——例如，三维空间中的闭合曲线（环路）没有侧面，但是它们在二维空间中有。

一个曲面，如果不能通过仅仅沿着曲面上的一条路径移动将一个形状转换成其镜像，则该曲面被称为是可定向的。考虑图示中有指向右上方箭头的脸。如果沿着莫比乌斯带移动这张脸，它返回到它的镜像（上下颠倒）。这意味着，莫比乌斯带是不可定向的。可定向性的概念能推广到更高维度的空间，例如，在不可定向的三维宇宙中，将会有一种方式来投掷一只右手套，使得它返回给你时成了左手套！

与单侧性相反，可定向性是固有的特性，并且不要求曲面嵌入到周围的空间中。由于拓扑学家已经找出了无需周围空间而考虑形状的方法，所以可定向性的概念通常比单侧性更有用。然而，对于我们三维世界中的曲面，单侧性是一个非常自然的概念。

数学模型

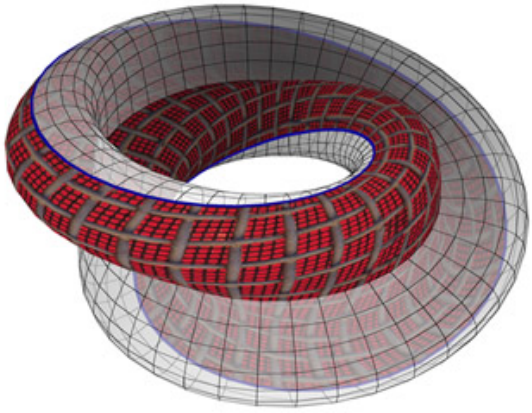
当克莱因在 1880 年成为莱比锡的教授时，他立即开始制作数学模型并建立了一个模型库。克莱因是一个几何学家，并在他的大学讲座中使用这些石膏模型。模型收集在世界各地的数学系很受欢迎。当他随后搬到哥廷根，克莱因与他的同事施瓦茨（Hermann Amandus Schwarz）一起扩大了他新系的数学模

克莱因

型和工具库，所以在高峰期，多达 500 个的模型被永久展示。当你知道一个模型可能花费大约 150 英镑时，这是一个重大的教育投资。

数学模型成功之后，普鲁士政府决定参加 1893 年在芝加哥举行的世界哥伦布纪念博览会，并在芝加哥大学展览。克莱因和他以前的学生戴克（Dyck）组织了数学展览，包括大约 100 种数学模型和工具。尽管出版商席林（Martin Schilling）等人制作的数学模型完成于二十世纪初，但其中许多石膏制品仍然得以保存在各大学的数学系[3]。许多石膏模型的照片也可以在互联网上得到。如今，像在柏林出版的《电子几何模型》杂志[4]等这样的存储库提供了专家审核的数字几何模型作为数学实验的原始资料。

做你自己的……克莱因瓶



标准克莱因瓶

标准（欧几里得）克莱因瓶可以由四个基本构建块组装，如右图所示。其中三个块是旋转面的一部分，垂直的蓝色管是稍微变形的圆柱面。迪克森（Stewart Dickson）的网页[5]详细地显示了如何装配。

8 形克莱因瓶

左图所示的 8 形曲面比标准的克莱因瓶更简单。它以 xz-平面中以 8 为形状的平面曲线开始。在围绕 z 轴旋转该曲线时，我们增加一个扭转，使得内部在绕转后与外部连接。请注意，该表面的两个莫比乌斯带通过 8 的交叉扫出。8 形的曲线由 $c(u) = (2\cos u,\ 0,\ \sin 2u)$ 给出，其中 u 在 0 和

[3] K. Polthier, Visualizing mathematics - online, in: Mathematics and Art, C. Bruter (Ed.), Springer Verlag (2002), pp.29-42.

[4] M. Joswig and K. Polthier (Eds), Electronic Geometry Models http://www.eg-models.de since 2000.

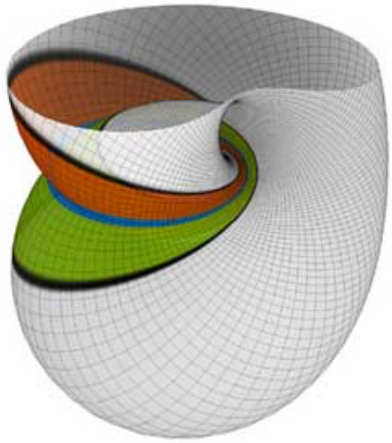
[5] Stewart Dickson, Topology of the Klein bottle, http://emsh.calarts.edu/~mathart/sw/klein/Klein.html

180 度之间取值。应用旋转和扭转我们得到 8 形的曲面：

$$F(u,v)=\begin{pmatrix} \sin v(4+2\cos u\cos tv-\sin 2u\sin tv) \\ \cos v(4+2\cos u\cos tv-\sin 2u\sin tv) \\ 2\cos u\sin tv+\sin 2u\cos tv \end{pmatrix},$$

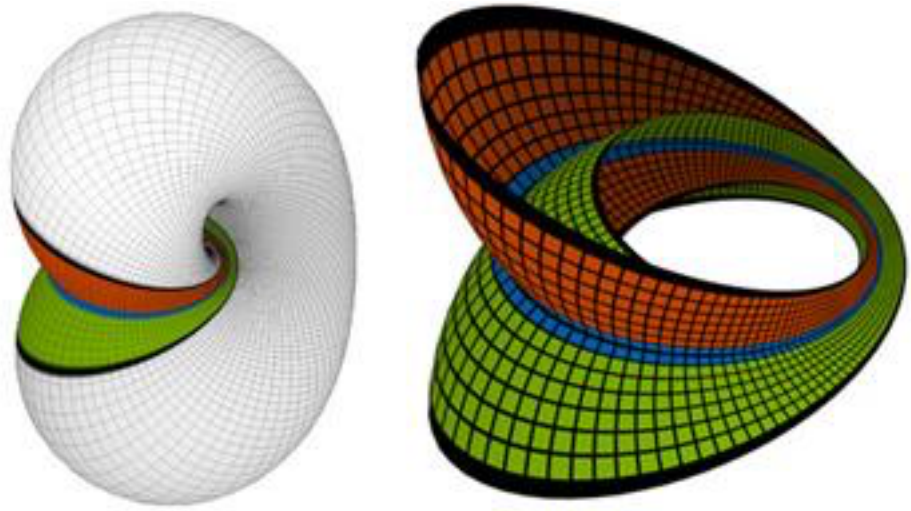
其中 u 和 v 都在 0° 和 360° 之间。参数 t = 0.5 确定扭转。上图显示了如何将 u 限制在 [0°, 180°] 或 [180°, 360°] 以产生一个莫比乌斯带，分别以红色和白色显示。

劳森 – 克莱因瓶



劳森（H. B. Lawson）在一族类似螺旋状楼梯的曲面中找到了三维球面 S^3 中的克莱因瓶的一个优雅实现[6]。左侧的图显示了曲面到普通的三维空间 R^3 上的一个投影，其中曲面的顶部被夹住以便其内部能被看见。沿着蓝色的中央圆圈，你可以看到红色和绿色莫比乌斯带的交叉，正如在上面看到的 8 形的克莱因瓶。顺便提一下，劳森 – 克莱因瓶也是三维球面内的一个最小曲面。

三维球面是四维欧几里得空间中与原点 (0, 0, 0, 0) 的距离等于 1 的所有点的全体组成的一个三维空间。它是熟知的三维欧几里得空间中二维球面的高维类似物。而且，像大圆圈（最大可能的圆圈）是二维球面上两点之间的最短路线，它们也给出三维球面上的最短路线。



在劳森 – 克莱因瓶的图中所示的所有网格线是大圆，它们与蓝色的中心

[6] H. B. Lawson, *Complete minimal surfaces in* S^3, Ann. of Math., Vol. 92, pp. 335-374, 1970.

圆交叉并在沿圆移动时扭转。这种螺旋式可以简单地将劳森 – 克莱因瓶制成螺旋状曲面，并且当扭转率发生变化时会产生其它有趣的形状。

结论

莫比乌斯带和克莱因瓶在 19 世纪寻求曲面和形状的分类时被发现。通常，数学形状首先被想象为抽象探索中的技术工具，而它们的一些美丽之处仍然在未开发的黑暗中。我们不时会发现一个新的宝石，本身就是一个形状，然后慢慢认识到它是一个永恒的视觉存储库中的成员。

如果您想进一步了解详情，可以尝试一些交互式可视化实验 [7]。

[7] https://plus.maths.org/content/os/issue26/features/mathart/applets2/experiments

英文原文链接 https://plus.maths.org/content/os/issue26/features/mathart/index

作者简介：Konrad Polthier 于 1994 年取得波恩大学博士学位，目前是柏林自由大学和德国研究中心 MATHEON 的数学教授，其研究方向是离散微分几何的数学问题。Polthier 博士最近的视频 MESH（www.mesh-film.de）获得纽约国际独立电影节的“最佳动画”奖。

译者简介：丁玖，南密西西比大学数学系教授，本刊编委。

看光飞驰：
压缩传感和世界上最快的二维相机

Hans Kaper / 文　　丁　玖 / 译

可能需要一年、十年，甚至一百年的时间，但是美丽的想法总能找到它们的应用之路。

在普通数码相机中，相机的传感器收集大量信息。该信息立即被压缩软件处理，然后以小得多的量被存储。这个过程需要时间，主要是因为所谓的“快门时滞（shutter lag）”。是否可以收集仅仅所需的信息，从而减少甚至消除快门时滞？由于一些聪明的物理和压缩传感，答案是“是的”。

压缩或压缩传感的数学概念可以追溯到 20 世纪 70 年代，那时凸规划中 ℓ^1 范数的优越性终被确认。这个理论在 20 世纪 90 年代迅速发展，21 世纪早期出现在 Candès, Tao, Romberg 及 Donoho 的工作中[1, 2, 3]。他们总体上意识到可以通过捕获稀疏信号中的有用信息并将其压缩成少量数据来设计高效的传感或采样计划。

这些美丽的数学思想已经在世界上最快的二维相机中找到了应用。通过添加数字微镜设备进行空间编码和应用压缩传感重建算法，王立宏和圣路易斯华盛顿大学的同事将传统的一维条纹相机转换为二维超快速成像摄像机。现在，人类第一次可以看到飞行中的光的移动（见图 1）。

压缩传感在小得多的 k- 维向量 $y = Ax$ 中，而不是在大的 n- 维向量 x 中，收集关于信号或图像像素的所有信息。这里，A 是代表测量过程的一个（矩形）矩阵。如果信号稀疏，从 y 恢复原始信号 x 的 k 值不需要非常大；在实践中，它通常只需不超过 x 稀疏度的四倍。

[1] Candès, E., & Tao, T. (2006, December). Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?IEEE Trans. Inform. Theory, 52(12), 5406–5425.

[2] Candès, E., Romberg, J., & Tao, T. (2006, February). Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. IEEE Trans. Inform. Theory, 52(2), 489–509.

[3] Donoho, D. (2006, April). Compressed sensing. IEEE Trans. Inform. Theory, 52(4), 1289–1306.

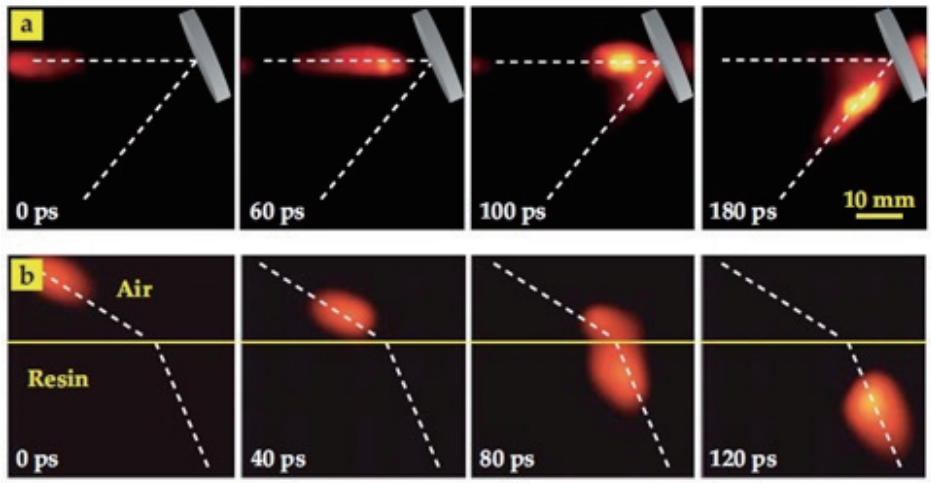


图 1

压缩传感

压缩传感是基于大多数信号或图像仅包含少量关键信息的观察。通过有策略地丢弃不必要的数据，可以减少图像尺寸，同时保留足够的信息以忠实地重建原始图像。然后使用线性规划算法通过编码数据重构完整图像。为了实现这一点，压缩传感依赖于两个原则：稀疏度和不连贯性。稀疏度意味着当以适当的基底表示时，图像具有简明的表示，而不连贯性则表明与所感兴趣的图像不一样，采样 / 传感波形在稀疏基底上具有非常稠密的表示。因此，压缩传感是一种简单有效的信号采集方案，以低信号独立的方式进行采样，然后运用计算能力对一组不完整的测量进行重建。

不定系统 $Ax = y$ 可以通过在约束条件 $y = Ax$ 下最小化 x 的 ℓ^1- 范数 $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ 的非常有效的方式求解。这个凸问题可以转化为线性规划问题，对此我们有快速算法。当信号足够稀疏时，通过 ℓ^1- 范数的最小化来恢复图像可证明是精确的[4]。

信号和图像很少是完全稀疏的；更常见的是它们近似稀疏。此外，测量数据总会有少量噪音的破坏；至少，数据的小扰动应该导致重建的小扰动。因此，出于实际的原因，压缩传感必须能够处理几乎稀疏的信号和噪声。如陶哲轩等[5]所示，如果 x 不很稀疏，那么被恢复信号的质量就与人们好像事先知道 x 最大值的位置并决定直接测量那些量所做的一样好。换句话说，在对 x 完全并准

[4] Candès, E., & Romberg, J. (2007). Sparsity and incoherence in compressive sampling. Inverse Prob., 23(3), 969985.

[5] Candès, E, Romberg, J., & Tao, T. (2006, August). Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. Comm. Pure Appl. Math., 59(8), 1207–1223.

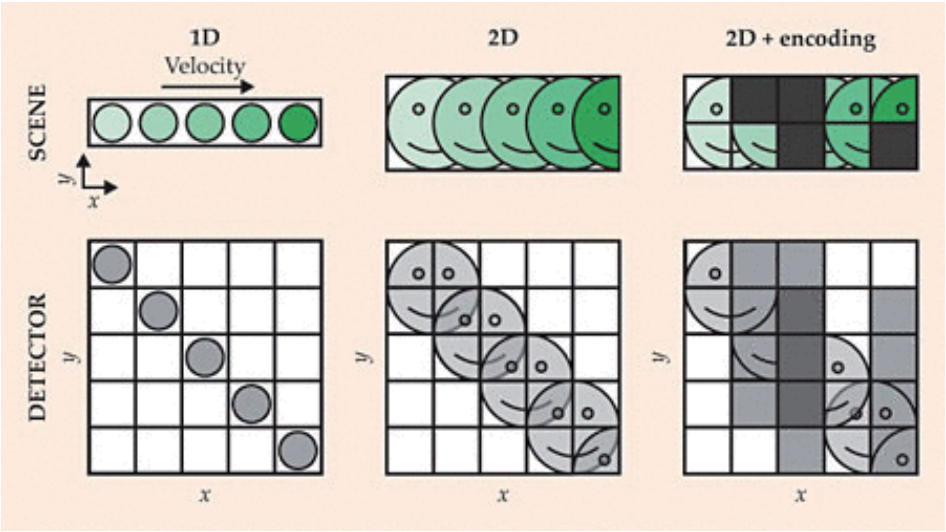


图 2

确了解的基础上提取最为重要的信息更像是一道神谕，而这一信息重建的效果足可与神谕相提并论。

二维相机

王和他的同事们使用被称为压缩超快速摄影（CUP）的动态二维成像技术开发了可以记录每秒 1000 亿帧不重复时间变化事件的二维照相机。CUP 将超快成像技术——条纹摄影——与压缩传感技术相结合[6]。虽然传统摄像机通过反复打开和关闭快门拍摄离散的图像，但是条纹相机以将时间映射到相机的二维像素阵列上的空间维度的方式偏转入射光。光线的偏转量与其到达时间成正比，此过程称为剪切。

传统的条纹相机只能在一个空间维度上拍摄。当像图 2 所示的一维场景（物体从左向右移动）被垂直剪切时，场景的时域被转换为检测器的 y 区域。然后可以通过将每行像素作为帧来重构电影。

通过用已知的像素图案掩盖二维场景，王氏团队在一个单一的镜头中记录了二维场景。华盛顿大学的研究小组能够通过信号处理提取线索，以实现这一目标。CUP 通过对空间域中的输入场景进行编码，便于在单个像素阵列上检测关于所有三维空间坐标 x, y 以及时间 t 的信息。然后将所得到的图像在条纹相机中剪切。具有单个快照的二维检测器阵列测量该编码和剪切的三维场景 (x, y, t)。编码数据可以在随后的图像重构中从输入场景中检索时间信息。

[6] Gao, L., Liang, J., Li, C., & Wang, L.V. (2014, December 4). Single-shot compressed ultrafast photography at one hundred billion frames per second. Nature, 516, 74–77. doi:10.1038/nature14005.

应用

单镜头超快照相机就像是时间的显微镜，在基础和应用科学中有许多潜在的应用。相机一个显著的医学应用是磁共振成像（MRI）。MRI 在重新处理数据之前通过大量测量来恢复来自人体的图像。扫描可能需要更长的时间，对于必须完全静止的患者来说，这种情况是不利的。在最坏的情况下，个人的呼吸停止，这剥夺了患者整个扫描进行时的氧气需求。压缩传感技术通过使用更少的样本重建图像来减轻这个问题。这些技术显著减少从分钟到几秒钟的 MRI 所需的测量次数。

CUP 可以潜在地与显微镜耦合，以便观察细胞结构中的瞬态事件。例如，它可以用于观察细胞线粒体中的能量代谢。它还可以帮助了解光怎样通过身体组织，这可能会产生使用激光去破坏异常或患病组织的治疗方法的重要见解，目的是保持健康组织不受伤害。

正如王先生所说，这种相机的一般性质意味着它可以与各种各样的工具耦合——从显微镜到望远镜——因此可以用来拍摄从细胞功能到超新星坍缩的任何照片[7]。

[7] Smart, A.G. (2015, February). An ultrafast camera films light at light speed. Physics Today, 68(2), 12. doi: http://dx.doi.org/10.1063/PT.3.2673.

英文原文链接 https://sinews.siam.org/Details-Page/see-light-move-compressed-sensing-and-the-worlds-fastest-2-d-camera-1

作者简介：Hans Kaper 是 SIAG/MPE 首任主任、SIAM 新闻总编辑及乔治城大学数学系兼职教授。

译者简介：丁玖，南密西西比大学数学系教授，本刊编委。

听君一席话，胜读十年书

——三遇杨振宁教授纪实

金小庆

关于史上首位华裔诺贝尔奖获得者杨振宁教授的事迹以及他对人类科学的贡献，我不需要赘叙。在这里，我主要谈谈杨振宁教授对我本人事业发展的影响。

记得那是在 1971 年正值文革中期，有一天各大报刊头版头条刊登了一条消息：伟大领袖毛主席接见美籍华裔物理学家诺贝尔奖得主杨振宁教授。这是我第一次听到这个名字。当时我总是觉得一般报纸上出现的人物应该都是遥不可及的，我是和那些人连边儿也沾不到，更不可能有什么关系。

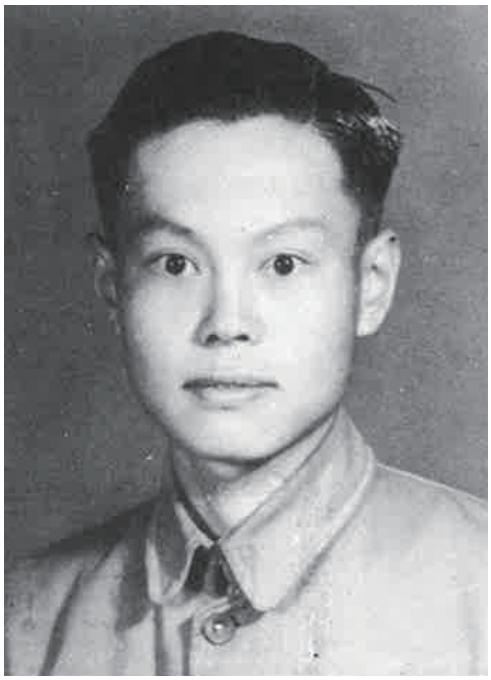
谁知我父亲看到这个消息后说道："当初在西南联大读书时，杨振宁和我同住一个宿舍，没想到今天他取得了这么大的成就。"我听了这话以为是自己的耳朵出了问题，于是迫不及待地追问父亲。父亲告诉我说，那时候同宿舍的一共有四人：杨振宁、顾震潮、凌宁和金启华。我当时真的有点不敢相信父亲的话。今天，引用高中物理网的描述：……与他（杨振宁）同室居住的有凌宁、金启华和顾震潮；黄昆和张守廉也偶尔来住几天。这些中华民族未来的精英们聚于一起，在陋室里交谈切磋，结伴探索着科学的奥秘。从那一天起，杨振宁这个伟大的名字就深深地铭刻在我心中。

西南联大宿舍

1. 首遇杨振宁

1985 年春季，我在香港中文大学攻读硕士学位。在学校的邵逸夫堂有幸聆听了杨振宁教授的演讲"读书教学四十年"。

听完演讲后，我对杨教授更是佩服得五体投地。那时我正为了自己未来研究方向而迷茫，因此我决定去拜访一下杨教授并希望他能够为我指点迷津。我请父亲写了封亲笔信准备面呈杨教授。



杨振宁 摄于 1943 年

当时中文大学数学系在科学馆四楼而物理系在三楼。一天下午我拿着父亲的信去三楼打算拜访杨教授，下楼后一眼就看到一间办公室的门牌上书几个大字：博文讲座教授杨振宁。我敲了一下门，无人应门，我就将信从门缝下塞了进去。谁知道第二天早上我回到数学系，不管是办公室的工作人员，还是系里的教学人员都以惊异的目光望着我，正当我绞尽脑汁思考是否自己做了什么出奇事情的时候，系主任对我说：杨振宁教授昨天下午五点多钟来数学系找你找不到！这时候我才恍然大悟为什么众人都以异样的目光看我，这个消息在数学系轰动一时。系主任于是嘱咐我去物理系与杨教授秘书再约拜访时间。

我一生中最重要的时刻来到了！我怀着崇敬的心情，诚惶诚恐地又一次敲响了杨教授办公室的门，听到一声：请进！第一次这么近距离地看到杨教授，这位在报纸上看到无数次的伟大人物，我似乎有点儿不知所措，只有快步向前并伸出双手与杨教授的手紧紧地握在一起。记得在文革时期，报纸上经常有着这样的描述：握着伟大领袖毛主席的手，一股暖流涌上心头。我根本就不相信这些出自御用文人的官样文章。可是这次与杨振宁教授的握手，我真的觉得有一股暖流不仅涌上心头而且流遍全身！这种感觉我这一生也就这一次！可能是英雄见惯也寻常吧！我后来也见了不少所谓大人物，但是在和他们握手的时候，这种感觉再也没有出现过。

坐下之后，寒暄几句就直入正题了。杨教授首先问我对什么研究方向有兴趣，我说对代数方向较有兴趣。他然后问我在代数方面读过哪些东西，我一股脑地把我自大学毕业以后所学的代数课程都说了出来：多重线性代数、群论、环与代数、有限群表示论、交换代数、李代数、同调代数引论及拓扑半群。这些课程基本上都是我毕业后跟着南京师范大学教师读书班所学的。杨教授接着问我：你学过李群吗？我答：没学过。他又问我：你今年多大了？我答：27 岁（我因为中学后下农村插队而耽误了上大学的时间）。杨教授喝了一口水，略微放缓了说话的节奏，之后说出了影响我一生发展的建议：“我建议你不要搞纯数学研究了！因为代数已不是现代数学的中心。再者如果 27 岁在纯数学领域里

1985 年作者在香港中文大学首遇杨振宁先生

还没有什么成果的话，应该很难出头了。我建议你搞应用数学，你有一定的纯数学基础，在那个领域将会是大有可为的啊！”告别杨教授后，过往学习代数的艰辛历程一幕幕重现在脑海，尽管有万般的不舍，但是最后我还是痛下决心转攻应用数学。今天回头看看自己这二十多年走过的研究历程，我不得不承认杨教授的英明伟大，正所谓听君一席话，胜读十年书啊！

2. 二遇杨振宁

时间过得真快，当我再次与杨振宁教授面对面的时候，已经是 22 年之后的 2007 年了。而我也已经从一个 27 岁的研究生成长为澳门大学的正教授并将踏入知天命的年纪。

那一天杨振宁教授来到澳门科技大学开讲“21 世纪的科技”。我早早就来到会场，坐在第二排。当杨教授进场时，全场爆发了雷鸣般的掌声，全体与会人员自动起立鼓掌以示敬意。恰好杨教授在上讲台之前就坐在我前面，但是很明显他已经认不出我来了。一个多小时的讲座，令广大师生领略了杨教授身上特有的科学家的气质、诗人的情怀及爱国者的激情。以科学发展的主线：量子力学，半导体，集成电路，芯片，现代计算机为例，杨教授深入浅出地介绍了基础研究与发展应用技术的关系。尤其是他在讲座结束前的一段话：“改革开放以来，中国科学与技术都有了极大的发展。三四十年后，中国必成为世界科技强国。”这个充满自信的论断令台下听众备受鼓舞。最后他用中国著名哲学家冯友兰的名言：旧邦新命，为讲座画上一个圆满的句号。

2007 年作者在澳门科技大学再遇杨先生

在提问的环节，我抓紧这个几乎几十年难得一遇的机会问了一个问题，这个问题也是千僖年七大百万美元悬赏问题之一：求解杨 - Mills 方程。我问关于这个问题的最新进展，杨教授回答道："这个问题的求解需要新的数学工具，可以这样说吧，现代数学的发展已经跟不上现代物理学的需要。当然，数学家们是不喜欢我这句话的。"

接着提问题的人，不知道是不是脑子灌水，问的问题让人啼笑皆非。一个问：请问杨教授，中医是伪科学吗？我想这些传媒真是没事做，又想制造大新闻！如果杨教授答：是伪科学！那么不得了啦，第二天的报纸肯定大篇幅报导：诺贝尔奖得主杨振宁说中医是伪科学，妄图掀起一场争论大风波，唯恐天下不乱！如果杨教授说不是伪科学，那么这些人又会说：难道阴阳五行可医病？请问经络在哪里？杨教授不慌不忙地答道："中医可以医病，这是有几千年的历史了。我前几天腰痛，请个老中医按摩后就不痛了。至于科不科学，中国人正在努力地用现代科学的标准进行研究。"另一个问题是：请问您相信气功吗？问题越来越走调，越来越离谱。最后连主持人都说：请不要问一些与本次讲座完全无关的问题。

讲座活动结束之后，澳门科技大学校董会主席走上来握着我的手说："我一看到是金教授提问就放心了。提出的问题很好，谢谢你来捧场！"虽说那一刻我和杨教授只是咫尺之遥，但是我觉得一个多小时的讲座，对一个 85 岁高龄的老人家已经够辛苦了，我不忍心再打搅他，哪怕一分钟，只希望他老人家可以早点休息，身体健康，使得以后我们以及更多的年轻一辈学子们还有机会聆听他的教诲。

2014 年，作者和杨振宁先生交谈

3. 三遇杨振宁

2014 年 2 月 21 日，杨振宁教授来到澳门大学访问，当时杨教授已经是 92 岁高龄了。为了安排这次访问，澳门大学领导与公关部可以说是煞费苦心了。可是事情的发展却有点不尽人意。杨教授的讲座是安排在下午 4 时半。在讲座之前还安排了一场大师与学生的座谈会。我当时想：一来，这次活动不是我组织安排的；二来，考虑到杨教授的高龄，我就不去私人拜访他以免影响他老人家的休息，我希望能够静静地坐在后排听讲座。

正所谓人在江湖身不由己，我有一个同事叫肥谭，他早已知道我们家与杨教授为世交，他一定要求我帮他的女儿与杨教授拍一张合影，我不由感到有些为难。澳门大学科技学院的院长知道这事后说："没问题，我们有个讲座前的座谈会，就利用这个机会满足肥谭的要求吧。"

当天下午我一早赶到座谈会场，一看会场，倒吸一口凉气，心里想：麻烦了！为什么？因为座谈会场是在地下负二层而且没有电梯！请问公关部的小姐们：你们什么时候看见过一位 92 岁的老人家能够下两层楼梯？老人家最怕的就是下楼梯。果然不出所料，杨教授一进门往下一看就站着不动了。他即刻在放着一个沙发的角落坐下。校长一看不妙，立即就地开座谈会。这时在负二层等待与大师对话的学生们一涌而上，一下子把一个平时最多站十多人的小角落挤得水泄不通，一片混乱。我也不去挤了，远远地站在最后一行注视着杨教授与学生代表对话，其实根本听不清谁在说什么，肥谭与女儿也挤得不见了。

一会儿座谈会就草草结束了，杨教授喝了一口水，正在这时我看到肥谭出现了，我突然想到拍照的事。通常只要有人求助于我，如果应承了，那么我一

定会全力以赴、绝不食言。为了不让肥谭与女儿失望，说时迟，那时快，我一个箭步上前已站在杨教授的面前了："杨伯伯，我是金小庆！"杨教授立刻回忆起来了。我紧紧握着他老人家的手以最快的速度介绍我们家发生的事情，因为那时家父已经仙逝。显然他早已知情。我送给他一本我的新书以及一张家父和他的合影。随后我立刻将肥谭之女介绍给杨教授并与他合影留念，这个皆大欢喜的结局使肥谭与女儿兴奋不已。

一会儿讲座开始了，这次杨振宁教授以："我的学习与研究经历"为题与澳大师生分享了他的成功经验。他说："做研究工作，我想必须要经过这三步，第一是对研究要发生兴趣，以后就会钻研，通常假如这个问题真正重要的话，你不是一下子就能解决的，所以有段时间，这段时间后来看起来可以说是个准备的工作，准备的工作经常是不成功的。可是你对这个问题的思考就使得你对问题的重点有所了解，最后，或是自发，或是他发，加了一些材料后，可能就开花结果了，就有了突破。这是所有研究工作必须经过的三部曲。"

讲座听完了，而我的心情却久久不能平静。正如人们所说的，任何成功都是需要经过艰辛的努力。努力了的人未必一定成功，但是成功的人都一定经过努力奋斗。我坚信所有有志气的青年学子，只要认准目标，努力钻研下去，一定会离成功越来越近。而我本人三遇杨振宁教授的故事也就结束了。在此祝杨教授健康长寿，也希望中国能产生更多像杨教授那样的大师级人物为中华民族增光添彩。

作者感谢应惠忠和龚锐整理文字。

作者简介：金小庆，香港大学博士，澳门大学杰出教授，东亚工业与应用数学会主席，曾任澳门大学数学系系主任。

好书推荐

推荐《线性代数应该这样学》（第三版）

林开亮

谨以此文纪念哈尔莫斯（Halmos，1916-2006）诞辰 100 周年[1]

定价：￥49.00，人民邮电出版社，2016 年

在中国，线性代数一般等同于矩阵论，这主要是受华罗庚先生的影响，他的矩阵功底炉火纯青，因此他的学生曾肯成教授这样说："龙生龙，凤生凤，华罗庚的学生会打洞。"所谓"打洞"，就是用相似变换或其它矩阵变换将矩阵化成标准型（其中有很多元素为 0，即"洞"）。据华罗庚的另一得意弟子陆启铿院士讲，当初邀请华罗庚访问美国普林斯顿高等研究院的外尔（H. Weyl）曾这样评价："华罗庚玩矩阵就像玩数字一样得心应手。"大概是陆启铿先生的话被人听岔了，做出这一评价的外尔教授，有时被讹传为韦伊（A. Weil）。稍微了解韦伊的人都知道，他不可能说这话。为什么呢？因为韦伊是法国布尔巴基学派的主力，他跟谢瓦莱（C. Chevalley）都致力于消除代数中的行列式、结式等计算性的概念，而华罗庚是以矩阵计算见长，绝非韦伊所欣赏的风格。这里有罗塔（Gian-Carlo Rota）教授在 1988 年提供的证词（见其文章 Fine Hall in its golden age: Remembrances of Princeton in the early fifties, 收入 A Century of Mathematics in America, Part III, History of Mathematics, Volume 3, P. Duren, Ed., pp.223-236, American Mathematical Society, 1989. http://www34.homepage.villanova.edu/robert.jantzen/princeton_math/pmcxrota.htm）：

即便是本科生的线性代数教学，也留下了阿廷（E. Artin）清晰可见的印记：他在我们面前从来不提基和行列式（考虑到他是那么喜欢计算，这真是奇怪的禁令）。阿廷的盟友，谢瓦莱和韦伊，竭尽全力将行列式和结式驱逐出代数。每每想到革命尚未成功，九泉之下的两位（注：指 1962 年过世的阿廷和 1984 年过世的谢瓦莱）可能都无心睡眠。

[1] 本文完成于 2016 年

好书推荐

作者谢尔登·阿克斯勒（Sheldon Axler）和他的猫，取自其个人主页 http://www.axler.net/

在这方面，韦伊和谢瓦莱的先驱，正是罗塔这里所提到的阿廷。范德瓦尔登（van der Waerden）曾根据阿廷和诺特（E. Noether）的讲义，写成抽象代数的经典名著《近世代数》（后来更名为《代数学》，有中译本，科学出版社），此书直接刺激了布尔巴基学派的诞生。希尔伯特（Hilbert）、诺特、阿廷是近世代数的先驱，近世代数的思想一度在德国盛行。特别地，受到量子力学的刺激，冯·诺依曼（von Neumann）将这一思想应用到无限维空间的泛函分析中去，这导致了线性代数的几何化。这方面的第一本书，就是冯·诺依曼在普林斯顿高等研究院的助手哈尔莫斯（P. R. Halmos）根据他的讲义写成的《有限维向量空间》（*Finite-Dimensional Vector Spaces*）。该书 1942 年出版，之后多次再版，现已成为经典（期待有朝一日能够引进中译本，这是笔者心目中独一无二的线性代数圣经）。

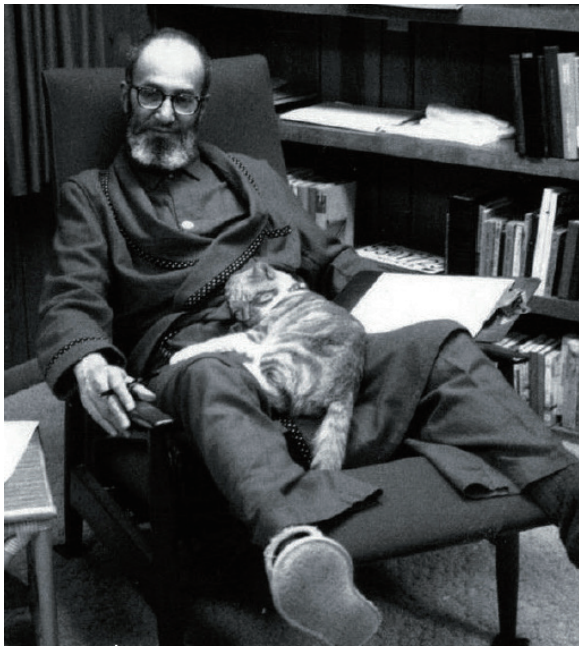
眼下这本《线性代数应该这样学》（*Linear Algebra Done Right* 第三版），可以说，基本上是按照《有限维向量空间》的精神写的一本新书。这毫不奇怪，作者阿克斯勒（Sheldon Axler）正是哈尔莫斯的徒孙，中间的链接是萨拉森（Donald Sarason）。阿克斯勒写作这本书，可以追溯到他在 1995 年发表在《美国数学月刊》上的一篇阐述性文章《打倒行列式！》（*Down with determinants!*），该文次年获得了美国数学协会颁发的 Lester R. Ford 写作奖。

标题取名为“打倒行列式！”，也许在中国的读者看来，有点不可思议，在通行的线性代数教科书中，行列式通常放在一开头讲的，如果直接扔掉了，后面还怎么讲？事实上，这是完全可以做到的，《线性代数应该这样学》就做到了这一点。在全书中，迹和行列式是最后一章，而之前讲完了线性代数所有其它内容（尤其是作为矩阵灵魂的特征值与特征向量），并没有用到这两个概念！

阿克斯勒之所以要打倒行列式，可能主要是想突出线性代数的本质方面是概念而非计算。正是出于对后一个看法的支持，促使我在这里向读者推荐这本书。

如前所说，线性代数的教学分两派：一派注重代数计算，以华罗庚先生为代表，这条线最终可溯源到美国的代数与数论学家迪克森（L. E. Dickson），中间的链接是杨武之教授（杨振宁的父亲，把近世代数和数论引进到中国）；一派注重几何直观，以哈尔莫斯为代表，最终追溯到诺特和阿廷，中间的链接是冯·诺依曼。虽然我本人经受的课堂训练是偏计算的（教材用北大的经典《高等代数》，它以丁石孙先生的《高等代数简明教程》为蓝本，丁先生在自传中说他借鉴了苏联斯米尔诺夫的《高等数学教程》；课堂之外，我的高等代数老师、天津大学数学系田代军教授

好书推荐



哈尔莫斯（R. R. Halmos）和他的猫，摄于 1970 年

指引我去读华罗庚、万哲先的《典型群》以及雅各布森（N. Jacobson）的抽象代数著作），然而只是在后来用哈尔莫斯的《有限维向量空间》重新学了一遍线性代数以后，我才敢说对线性代数有了一点底气。希望我说这话时，你不要认为我是在吹牛，我甚至希望这话能得到专业人士的认可，因为我在博士论文中的部分工作，就是用阿廷、冯•诺依曼、哈尔莫斯那一派的几何观念和方法，完善了华罗庚先生 1947 年的一项纯代数的矩阵工作。因此可以说，我是华罗庚先生和哈尔莫斯教授两派结合的产物。

代数计算将线性代数机械化了（我有一次在打乒乓球时感觉每一次回球就像在做一次初等变换），同时也变得有点无聊。我常常有一种天真的想法，也许可以考虑用吴文俊先生倡导的数学机械化，将华罗庚学派炉火纯青的打洞技术给实现了！

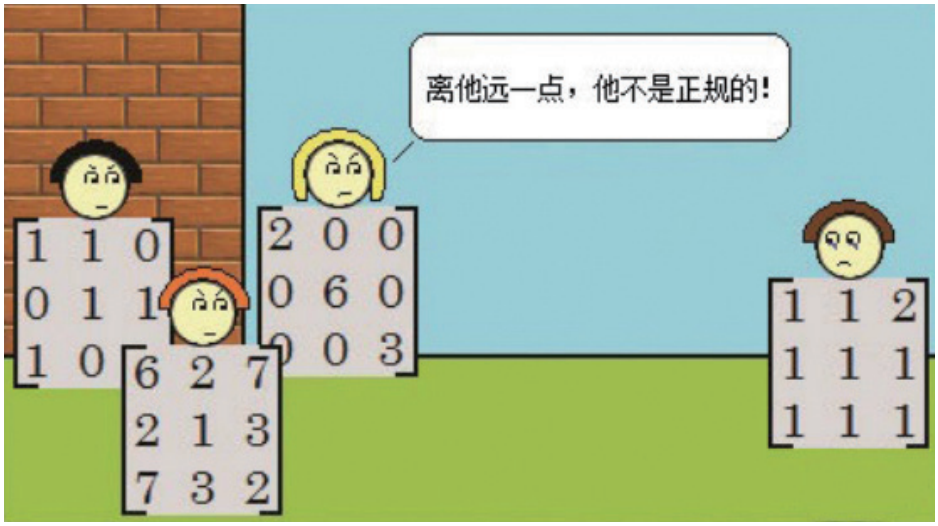
要想让线性代数生动起来，除了介绍一些精彩应用的例子外，一个可行的办法是强调几何的语言。几何的语言，自然是相对于代数的语言而说的。简单讲，就是用线性变换代替矩阵，用抽象向量代替列向量。几何语言的优点是简洁明快，例如“作用（action）”这个词给人的感觉就是如此。代数语言的好处是具体清晰，两个矩阵“相乘”在我们头脑中的图象，是一系列具体运算的操作。通常的教科书往往过分强调了代数的语言，这同时也充分暴露了其诸多弊端。最大的缺点在于容易让人迷失方向（说来奇怪，明明有基帮助定位，却不知道真正的位置），不清楚自己究竟在做什么。这是因为，在很多问题中坐标的选取并不重要，我们所需要的往往只是一些基本的运算规律，例如分配律、结合律等。这时抽象的几何语言就十分适用了，例如在内积空间的理论中，我们往往采用几何语言。其实，数学家正是靠这种几何观点来指引具体的代数运算的，例如所谓 Gram-Schmidt 正交化，无非就是将第二个向量沿第一个向量作垂线，一旦指出这一点，Gram-Schmidt 正交化的公式就很容易理解了。更近一步，理解 Cauchy-Schwarz 不等式就是水到渠成的了：它所对应的，无非是这样一个熟知的几何事实：直角三角形的直角边长不超过斜边长。

我要指出，我这里并非说代数计算不好，我想强调的是，要尽可能在几何直观的指引下做代数计算。我觉得借用阿廷在其名著《几何化的代数》（*Geometric Algebra*, 1957 年出版）一书中的一句话来评论阿克斯勒的《线性代数应该这样学》再好不过了：

> 我的经验是，一个用矩阵进行的证明，如果你抛开矩阵的话往往可以使这个证明缩短一半。有时，这一点是办不到的，你需要计算一个行列式。

我将阿克斯勒的这本书郑重推荐给所有想重新从几何的观点看待线性代数的朋友，所有

好书推荐



想从零开始学习线性代数的朋友。该书继承和发扬了哈尔莫斯《有限维向量空间》的几何化特色，以几何引代数，以概念指导计算！它会告诉你，线性代数不仅仅是矩阵论，或者更恰当地说，从几何的观点看，线性代数和矩阵论原来可以很简单！你不再需要 λ- 矩阵，不再需要分块矩阵，更不必担心复杂的行列式计算会挡住你前行的道路！而且，额外的好处是，一旦熟悉了这种几何的观念和思维，当你学习泛函分析时会更加得心应手。

根据我的经验，要使线性代数在你心中扎根，你需要读哈尔莫斯。如果你还不习惯读外文教材，那么阿克斯勒的《线性代数应该这样学》中译本在目前是首选。

本书的前两版曾在美国近 300 所院校作为教材使用，作者因此收到了成千上万条反馈意见，可以想见，第三版将何等卓越。奇文共欣赏，疑义相与析。预祝你们阅读愉快，有疑问不妨直接与作者联系，据我的经历，阿克斯勒非常欢迎读者给他提意见与建议。

温馨提示 1：虽然这本书中穿插着一些幽默的图片与言论（如图 3，取自原书 7. B 节习题 15，题目是求图片中第一个矩阵被挡住的右下角元素。），但它更适合比较严肃的读者，特别是数学系的学生。读完这本书，再接触抽象代数（如小阿廷（M. Artin）的著作），应该会比较容易。

温馨提示 2：《线性代数应该这样学》原书在 2016 年出版了一个删节版，可以在作者的个人主页免费下载，http://linear.axler.net/LinearAbridged.pdf

致谢：感谢《数学文化》编委、美国南密西西比大学丁玖教授和付晓青博士对初稿提出了有价值的建议！

作者简介：林开亮，首都师范大学基础数学专业博士，现任教于西北农林科技大学理学院。