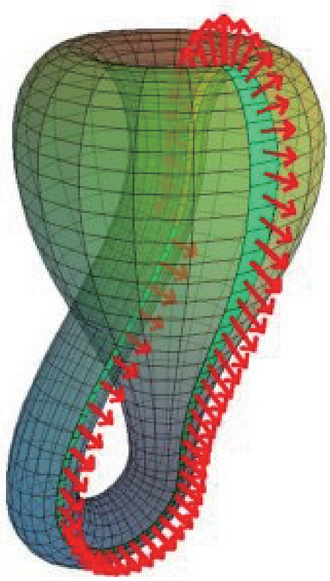
克莱因瓶

Konrad Polthier /文　　丁 玖/译

我第一次和克莱因瓶打交道以失败而告终。当我还在学校时，我在一本周刊上看到了一张克莱因瓶的图片。我和一位专门从事物理设备工作的玻璃制造者朋友分享了我对此的迷恋。几天后，我就成了由玻璃制成的实体克莱因瓶的一个骄傲的拥有者。

这样的瓶子能做什么？为什么不用它做点事？填充它并不容易，因为流入的水堵住了内部的空气出来。所以我决定把剩下的空气保留在瓶子里，看看这个半填充瓶作为一个温度计有多有效。我添加了几种高锰酸钾晶体来使水变色，使其更容易标记玻璃上的水位。

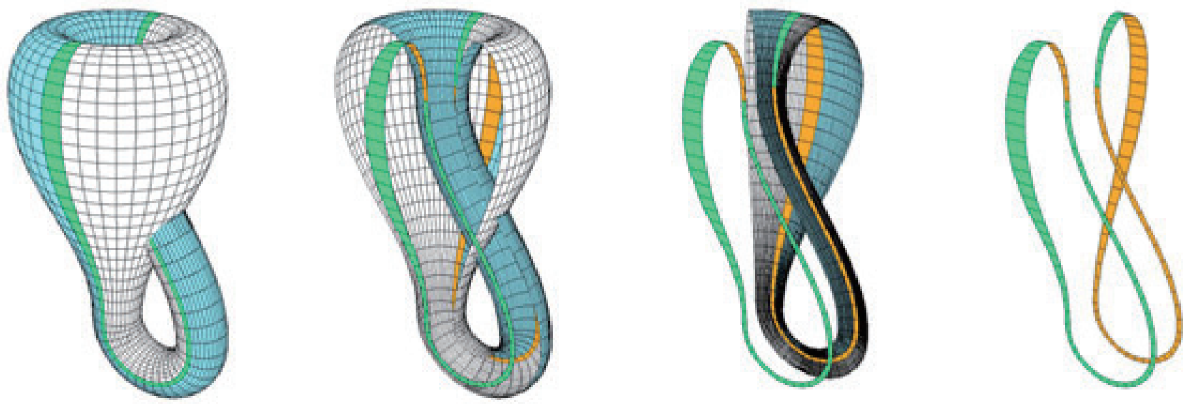


令我高兴的是，这种原始但有趣的温度计确实显示了白天的生命迹象。不幸的是，第二天早上就出现了一场灾难，大量的红水泼在我的窗台上。

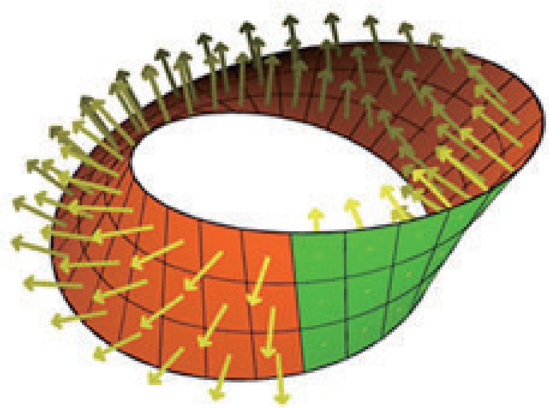
这是冬天，夜间的低温将瓶子里剩余的空气压缩得太厉害，以至于克莱因瓶手柄内的水位低于下部曲线，从而吸入了更多的空气。当空气在早晨再次升温时，体内空气的增加使水位在柄内过高上升。在那些日子里，我无法找到使得水和空气稳定的比例。

克莱因瓶是在1882年被克莱因（Felix Klein）发现的[1]，从此以后，在“象牙塔”之外，它进入了为一

[1] F. Klein, Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale, Teubner Leipzig (1882), p. 80.



般公众所知的数学形体的画廊。这个瓶子是一个单侧的曲面，就像众所周知的莫比乌斯带一样，但更加迷人，因为它是封闭的，没有边框，也没有封闭的内部和外部。按照克莱因的方式，我们使用视觉模型来研究这个曲面。



从莫比乌斯带到投影平面

莫比乌斯带是最简单的单侧曲面，并且很容易由一张纸带做成。标记纸张的两面——例如，在前面画一些红点，而在背面画一些绿点。现在将条带扭转后，把两端粘在一起,使红点附在绿点上。这就成了一个莫比乌斯带，沿表面移动不越过边界就能走遍红色及绿色的圆点。

这个带子于 1858 年由德国天文学家和数学家莫比乌斯（August Ferdinand Möbius）发现。加上 0 次扭转，2 次扭转或更一般地，偶数次扭转将始终产生双侧曲面。类似地，非偶数次的扭转将产生各种各样的单侧曲面。有趣的是，莫比乌斯带的边界是一个单一的闭合曲线。

拓扑学是研究形状在连续弯曲和拉伸下不变化的那些性质的一门数学学科。例如，如果一个莫比乌斯带由橡胶片做出，我们略微将它拉长而不会破坏它，它仍然是一个单侧曲面。相比之下，如果我们在没有扭转的情况下粘合了条带的两端，则所得的圆柱形形状将是在拓扑意义下不同的双侧圆柱面。

尽管很简单，但莫比乌斯带是一个真正的数学发现。关于曲面可定向性的推理是理解和分类拓扑中的曲面和流形的关键之一。

拓扑的后续任务是摆脱莫比乌斯带的剩余边界以产生封闭的曲面。最简单的解决办法是用橡皮莫比乌斯带并把所有边界点连续地拉到一起，就像我们可以将一个圆的点拉成圆锥面。无论我们是否去掉圆锥面的尖点，我们获得一个没有边界的封闭曲面，它是单侧的，因为无论从哪里开始我们总是可以去走到莫比乌斯带，然后像以前一样切换边。这个曲面称为投影平面，在拓扑上它是最简单的一个封闭的单侧曲面。不幸的是，射影平面的几何实现是相当复杂的。

例如，直到 1903 年，鲍埃（Werner Boy）[2] 才根据希尔伯特（David Hilbert，鲍埃的博士生导师）的建议，发现了没有尖角或边缘的射影平面的一个几何实现。幸运的是，莫比乌斯带的不同闭合可更简单地得到。

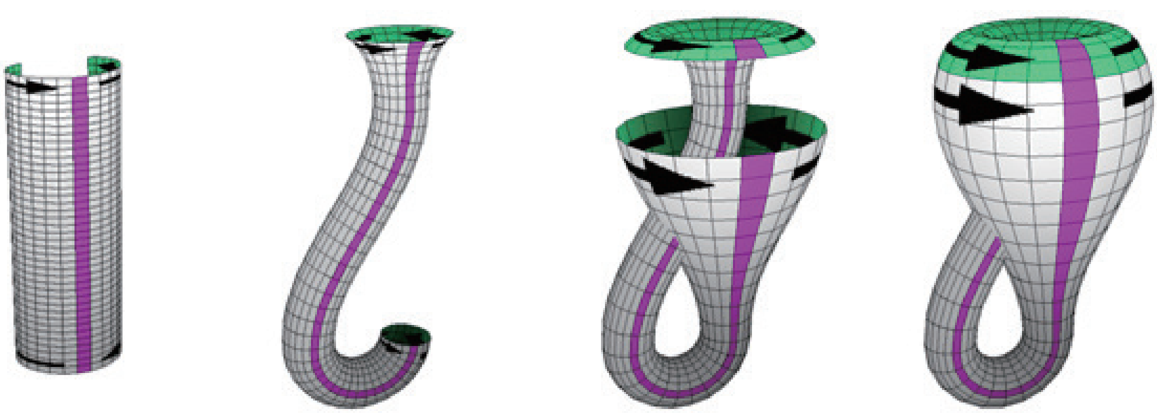
克莱因瓶不是一个甜甜圈

像甜甜圈形状的圆环面的构造从一张纸开始，将它卷起来形成圆柱面，然后将两端弯过来形成周围闭合的形状。圆柱面在一侧的内部与另一侧的内部连接，外部也一样。因此，环面是双侧曲面。

但是，我们也可以使用圆柱面来制作一个克莱因瓶。不像我们从纸条上制作莫比斯带时所做的那样加一个扭转，我们将圆柱面的一端在圆柱面内绕回，将其粘合到另一端，并将两个边界线以相反的方向粘合在一起。为了以令人愉快的形状来实现，我们调整圆柱面的宽度。这使我们能够将内部粘合到外部，获得一个单侧曲面。在下图中，我们使用白色和绿色来区分原来的圆柱面的两侧。当克莱因瓶完成后，颜色仍然显示圆柱面粘合在何处，但在任何其它平行圆周粘合也行。

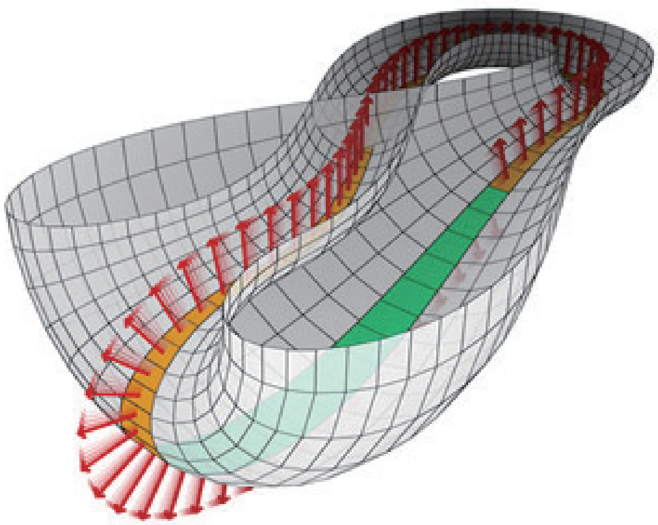
在他的原始著作 [1] 中，克莱因将他的瓶子作为将“橡胶管翻转，使其通过自身内外相遇”的“某种无界的双曲面”的可视化。

不幸的是，克莱因瓶不界定体积——换句话说，它没有内部。这意味着你可以在“克莱因瓶”甜甜圈上放上两倍于环面甜甜圈的糖，但是它里面却没有面团！



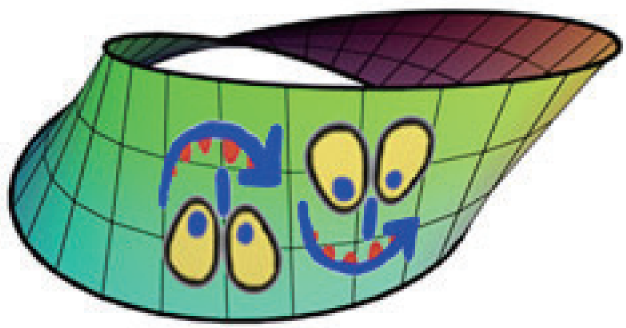
[2] W. Boy, Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen, Math. Ann. 57 (1903), pp. 151-184.

可定向性和单侧性



在研究莫比乌斯带或克莱因瓶时，可定向性和单侧性是很重要的。如果你能直立地站在一个曲面上沿着它走动，可以到达曲面上每一点的两侧，则该曲面是单侧的。自然界中的大部分曲面是双侧的。例如，圆球面是双侧的，这确保我们总是走在地球之上，而不在之下。类似地，轮状环面，椒盐卷饼，以及更一般地，包围立体体积的所有曲面都是双侧的。

在自然界中，我们通常不会看到单侧曲面，且记住莫比乌斯发现的第一个单侧曲面是一个抽象的数学结构。在克莱因瓶的这个图示中，通过沿着莫比乌斯带绘制垂直的箭头（法向量），我们强调其单侧性：通过连续的运动，我们可以将箭头传送到一个点的两个侧表面，这意味着我们不能区分它的前面和后面。不幸的是，单侧面的这个概念取决于周围的空间——例如，三维空间中的闭合曲线（环路）没有侧面，但是它们在二维空间中有。



一个曲面，如果不能通过仅仅沿着曲面上的一条路径移动将一个形状转换成其镜像，则该曲面被称为是可定向的。考虑图示中有指向右上方箭头的脸。如果沿着莫比乌斯带移动这张脸，它返回到它的镜像（上下颠倒）。这意味着，莫比乌斯带是不可定向的。可定向性的概念能推广到更高维度的空间，例如，在不可定向的三维宇宙中，将会有一种方式来投掷一只右手套，使得它返回给你时成了左手套！

与单侧性相反，可定向性是固有的特性，并且不要求曲面嵌入到周围的空间中。由于拓扑学家已经找出了无需周围空间而考虑形状的方法，所以可定向性的概念通常比单侧性更有用。然而，对于我们三维世界中的曲面，单侧性是一个非常自然的概念。

数学模型

当克莱因在1880年成为莱比锡的教授时，他立即开始制作数学模型并建立了一个模型库。克莱因是一个几何学家，并在他的大学讲座中使用这些石膏模型。模型收集在世界各地的数学系很受欢迎。当他随后搬到哥廷根，克莱因与他的同事施瓦茨（Hermann Amandus Schwarz）一起扩大了他新系的数学模

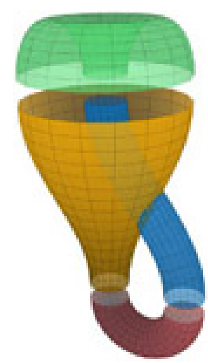
克莱因

型和工具库，所以在高峰期，多达 500 个的模型被永久展示。当你知道一个模型可能花费大约 150 英镑时，这是一个重大的教育投资。

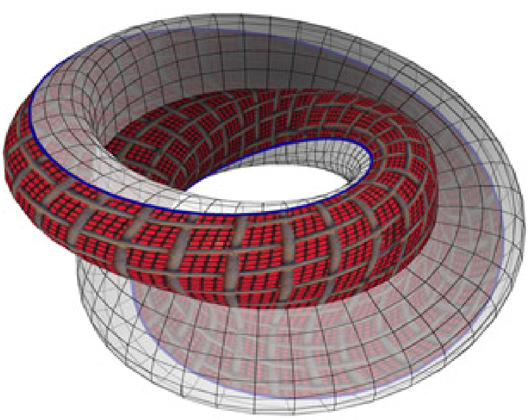
数学模型成功之后，普鲁士政府决定参加 1893 年在芝加哥举行的世界哥伦布纪念博览会，并在芝加哥大学展览。克莱因和他以前的学生戴克（Dyck）组织了数学展览，包括大约 100 种数学模型和工具。尽管出版商席林（Martin Schilling）等人制作的数学模型完成于二十世纪初，但其中许多石膏制品仍然得以保存在各大学的数学系[3]。许多石膏模型的照片也可以在互联网上得到。如今，像在柏林出版的《电子几何模型》杂志[4]等这样的存储库提供了专家审核的数字几何模型作为数学实验的原始资料。

做你自己的……克莱因瓶

标准克莱因瓶



标准（欧几里得）克莱因瓶可以由四个基本构建块组装，如右图所示。其中三个块是旋转面的一部分，垂直的蓝色管是稍微变形的圆柱面。迪克森（Stewart Dickson）的网页[5]详细地显示了如何装配。



8 形克莱因瓶

左图所示的 8 形曲面比标准的克莱因瓶更简单。它以 xz-平面中以 8 为形状的平面曲线开始。在围绕 z 轴旋转该曲线时，我们增加一个扭转，使得内部在绕转后与外部连接。请注意，该表面的两个莫比乌斯带通过 8 的交叉扫出。8 形的曲线由 $c(u) = (2\cos u,\ 0,\ \sin 2u)$ 给出，其中 u 在 0 和

[3] K. Polthier, Visualizing mathematics - online, in: Mathematics and Art, C. Bruter (Ed.), Springer Verlag (2002), pp.29-42.

[4] M. Joswig and K. Polthier (Eds), Electronic Geometry Models http://www.eg-models.de since 2000.

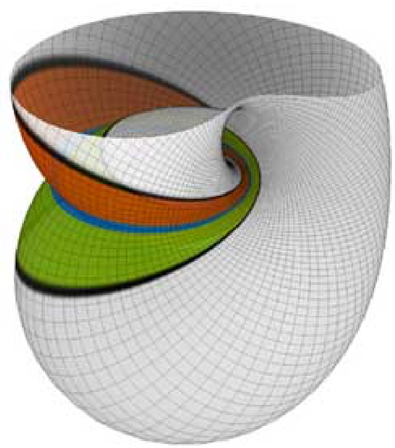
[5] Stewart Dickson, Topology of the Klein bottle, http://emsh.calarts.edu/~mathart/sw/klein/Klein.html

180 度之间取值。应用旋转和扭转我们得到 8 形的曲面：

$$F(u,v)=\begin{pmatrix} \sin v(4+2\cos u\cos tv-\sin 2u\sin tv) \\ \cos v(4+2\cos u\cos tv-\sin 2u\sin tv) \\ 2\cos u\sin tv+\sin 2u\cos tv \end{pmatrix},$$

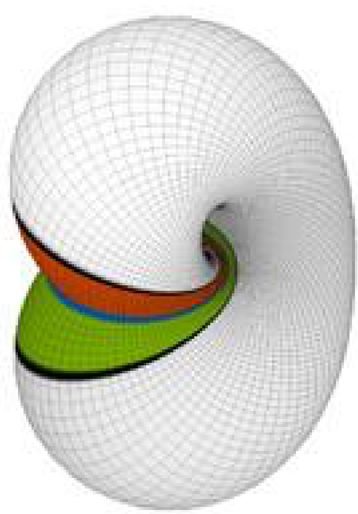
其中 u 和 v 都在 0° 和 360° 之间。参数 $t=0.5$ 确定扭转。上图显示了如何将 u 限制在 [0°, 180°] 或 [180°, 360°] 以产生一个莫比乌斯带，分别以红色和白色显示。

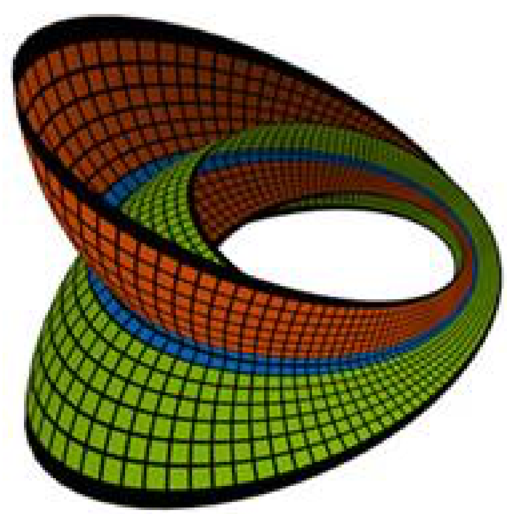
劳森 – 克莱因瓶



劳森（H. B. Lawson）在一族类似螺旋状楼梯的曲面中找到了三维球面 S^3 中的克莱因瓶的一个优雅实现[6]。左侧的图显示了曲面到普通的三维空间 R^3 上的一个投影，其中曲面的顶部被夹住以便其内部能被看见。沿着蓝色的中央圆圈，你可以看到红色和绿色莫比乌斯带的交叉，正如在上面看到的 8 形的克莱因瓶。顺便提一下，劳森 – 克莱因瓶也是三维球面内的一个最小曲面。

三维球面是四维欧几里得空间中与原点 (0, 0, 0, 0) 的距离等于 1 的所有点的全体组成的一个三维空间。它是熟知的三维欧几里得空间中二维球面的高维类似物。而且，像大圆圈（最大可能的圆圈）是二维球面上两点之间的最短路线，它们也给出三维球面上的最短路线。





在劳森 – 克莱因瓶的图中所示的所有网格线是大圆，它们与蓝色的中心

[6] H. B. Lawson, *Complete minimal surfaces in* S^3, Ann. of Math., Vol. 92, pp. 335-374, 1970.

圆交叉并在沿圆移动时扭转。这种螺旋式可以简单地将劳森 – 克莱因瓶制成螺旋状曲面，并且当扭转率发生变化时会产生其它有趣的形状。

结论

莫比乌斯带和克莱因瓶在 19 世纪寻求曲面和形状的分类时被发现。通常，数学形状首先被想象为抽象探索中的技术工具，而它们的一些美丽之处仍然在未开发的黑暗中。我们不时会发现一个新的宝石，本身就是一个形状，然后慢慢认识到它是一个永恒的视觉存储库中的成员。

如果您想进一步了解详情，可以尝试一些交互式可视化实验[7]。

[7] https://plus.maths.org/content/os/issue26/features/mathart/applets2/experiments

英文原文链接 https://plus.maths.org/content/os/issue26/features/mathart/index

作者简介：Konrad Polthier 于 1994 年取得波恩大学博士学位，目前是柏林自由大学和德国研究中心 MATHEON 的数学教授，其研究方向是离散微分几何的数学问题。Polthier 博士最近的视频 MESH（www.mesh-film.de）获得纽约国际独立电影节的“最佳动画”奖。

译者简介：丁玖，南密西西比大学数学系教授，本刊编委。