数学文化/第4卷第1期

前排从左至右：林亚南，刘建亚，张智民，付晓青；后排从左至右：张英伯，蔡天新，邓明立，顾沛，罗懋康，汤涛，励建书，游志平（刘青阳 摄）

《数学文化》旨在发表高质量的传播数学文化的文章；主要面向广大的数学爱好者

《数学文化》欢迎投稿，来稿请寄：
Math.Cult@gmail.com

本刊网站：http://www.global-sci.org/mc/
本刊淘宝网：http://mysanco.taobao.com/
本期出版时间：2013年2月

本刊鸣谢国家自然科学基金数学天元基金和科学出版社的支持

Contents | 目录

盲人数学工作者的世界

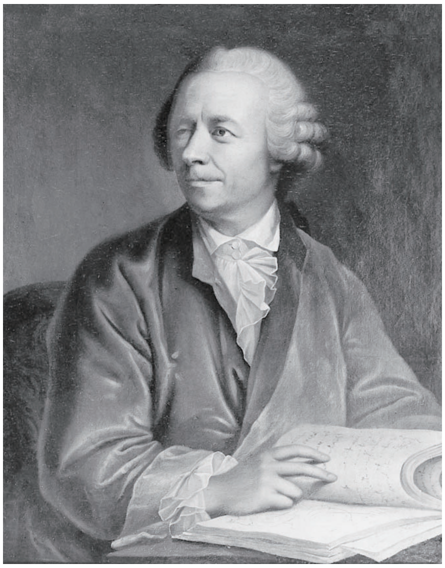
Allyn Jackson / 文　　香陵居士 / 译

造访盲人几何学家伯纳德•莫林（Bernard Morin）的寓所会让你大开眼界：客厅的墙壁上挂着一幅电脑绘制的图片。图片是他的学生弗朗索瓦•阿培里（François Apéry）绘制的，画的是伯伊曲面（Boy's Surface）——一种射影平面对三维空间的浸入。莫林最著名的成就是把一个球体如何“翻”出来的过程形象化，而伯伊曲面是其中的重要环节。莫林虽然看不见这张图，但他会很高兴地为你解说图中不容错过的细节。回到客厅，他搬来一把椅子站上去，摸索着从架子顶上找到一个盒子，然后端着盒子小心地爬下椅子，这时我长出了一口气。打开盒子，里面放的是他在上世纪六七十年代制作的陶模型，描绘了他研究的球面外翻（Sphere eversion）的各个中间阶段。他视力健全的同事用这些模型在黑板上辅助画图。他掌中所拿的，正是伯伊曲面的模型。这个模型不仅精确，而且设计巧妙，形态优雅，实在是一件艺术品。让人惊叹的是：如此一件精确而又对称的模型完全靠双手做出来的。制作这个模型的目的，是把莫林心中所清楚看到的模型展现在视力健全的人的面前。

视力健全的数学工作者们通常都正襟危坐地炮制论文。有一个传说，说有人问一个著名数学家的女佣这个数学家每天都在干什么，女佣说他在一张纸上写写画画，然后揉做一团扔进垃圾桶。那么盲人数学工作者的一天呢？他们不可能在信封背面或是餐馆的餐巾上写些什么算式，或是挥挥手手示意把“这个”加到“那个”上，或是把“那个”用在“这里”。不过从许多方面而言，盲人和其他数学工作者的工作方式一样：有人曾问过科罗拉多大学（University of Colorado）的盲人数学工作者劳伦斯•W•拜吉特（Lawrence W. Bagget），他是如何不用纸笔把复杂的公式印在脑子里的？他坦白地说：“嗯，这个，无论是谁都很难。”然而从另一方面来说，他们对数学的理解又有所不同。莫林回忆起一位视力健全的同事校勘他的论文时，需要进行冗长的行列式计算来确定一个正负号。这位同事问他是如何计算的，莫林说自己回答道：“我真不清楚——就是想象这个那个形体，感觉一下它的重量而已。”

历史上的盲人数学工作者

伯纳德•莫林（1931-）



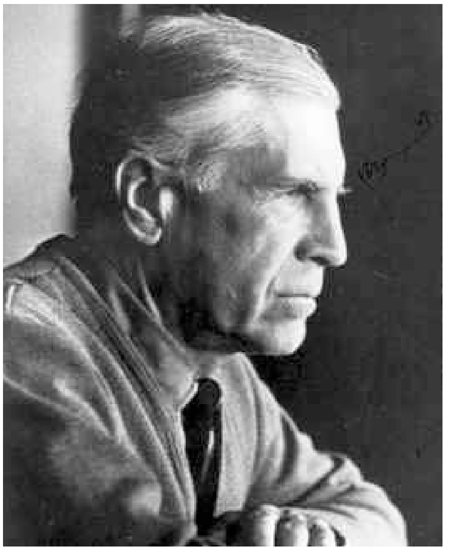
欧拉（1707-1783）

数学史上有许多盲人数学工作者。最伟大的数学家之一欧拉（Leonhard Euler, 1707-1783）在生命中的最后十七年里就双目失明。他自从在俄罗斯科学院地理教研室当主任以来，就因为用眼过度眼睛严重疲劳而视力出现问题。他三十岁的时候右眼就开始出问题，到了五十九岁的时候就几乎完全失明。欧拉是数学史上最高产的数学家之一，写出了大概 850 篇论文。而神奇的是，其中大约一半的论文是他在失明之后完成的，他以惊人的记忆力，在两个儿子和其他俄罗斯科学院的同事的帮助下完成了这些论文。

英国数学家尼古拉斯 • 桑德森（Nicholas Saunderson, 1682-1739）一生下来就因染上天花双目失明。然而他却精通法语、希腊语和拉丁语，又研究数学。他申请剑桥大学被拒，终身也未上过大学，可是在 1728 年，乔治二世国王却授予他法学博士学位。作为牛顿哲学的拥护者，桑德森在剑桥大学当上了卢卡斯教授—— 牛顿本人就曾任此职位，物理学家史蒂芬 • 霍金也曾任此职。桑德森发明了一种进行算术和代数计算的“盲人计算器”，这种方法需要用一个类似算盘的工具以及一个叫做“几何板”的东西——这种东西现在已经在数学教学中应用了。桑德森在其著作《代数元素》（1740 年版）中记述了盲人计算器的计算方法。他有可能还进行了概率论方面的研究 ：统计历史学家史蒂芬 • 斯蒂格勒（Stephen Stigler）认为，贝叶斯统计的思想方法可能是由桑德森而不是托马斯 • 贝叶斯（Thomas Bayes）首先提出的。

俄罗斯也出过几位盲人数学家，其中最著名的是庞特里亚金（Lev Semenovich Pontryagin, 1908-1988）。庞特里亚金十四岁时因一场事故而失明，他的母亲肩负起了教育他的任务，尽管母亲没受过多少数学训练，数学知识也不多，却可以给儿子朗读科学著作。他们一起“发明”了许多表示数学符号的词语，比如集合交集的符号叫做“下头”，而子集的符号叫做“右头”等等。 1925 年，庞特里亚金十七岁进入了莫斯科大学，从此他的数学天赋便充分展露，人们对他无需动笔就能记住复杂公式的超强能力充满惊奇。他成了莫斯科拓扑学派的顶尖人物，在苏联时期仍和西方有着联系。他最重要的贡献在拓扑学和同伦理论领域，同时也在控制论等应用数学领域做出了贡献。而现在还健在的盲人数学工作者有莫斯科斯捷克洛夫数学研究所的维图什金（A. G. Vitushkin），他主要研究复分析。

法国也有许多杰出的盲人工作者。其中最著名的包括路易 • 安东尼（Louis Antoine, 1888-1971），他是在一战时失明的，那时他二十九岁。据说，勒贝格建议他学习二维和三维拓扑学，一部分原因是那时关于这方面的论文还很少，另一部分原因是因为“在这个领域，捕捉的能力和全神贯注的习惯可以弥补失明的不足”。在二十世纪六十年代中期，莫林见到了安东尼，安东尼向这位后辈盲人数学工作者说明了他是如何得到自己那个著名结论的。安东尼在试图证明一个类似若尔当 - 舍恩弗利斯定理的命题（若尔当 - 舍恩弗利斯定理是 ：对于一个平面中的简单封闭曲线，一定存在一个平面的同胚可以将这条曲线变成平面中的一个圆）。该命题为 ：对于一个浸入三维空间中的三维球体，存在一个三维空间的同胚可以将这个浸入球变为一个标准球。最终他发现，这个“定理”并不成立。他第一个设计了三维空间中的非驯嵌入集——这个集合现在被称为“安东尼的项链”。它是一个康托尔集，但其补集却并不简单联通。在安东尼的基础上，亚历山大（J. W. Alexander）构造出了著名的“亚历山大带角球”，这个带角球就是安东尼要证明的命题的一个反例。安东尼证明了：可以从他的“项链”得到嵌入球。但是莫林问他这个嵌入球是什么样子的时候，他却说自己想象不出来。



庞特里亚金（1908-1988）

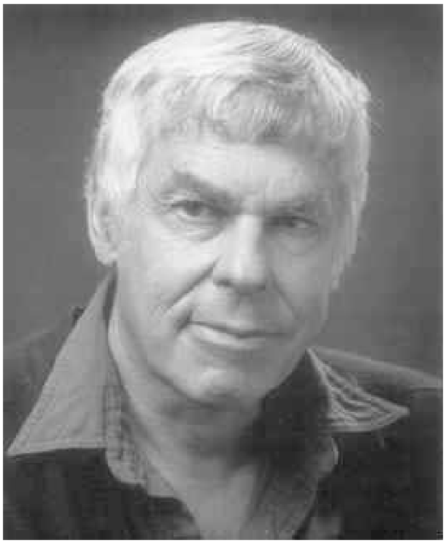
球面外翻

莫林自己的故事也很引人入胜。他 1931 年出生于上海，那时他父亲在银行工作。很小的时候莫林就患上了青光眼并回到法国接受治疗。后来他回到上海，但六岁时不幸因视网膜撕裂完全失明。他到现在还能回忆起童年时候所看到的事情，回忆起那时他对光学现象的痴迷，回忆起他曾醉心于万花筒的时光，回忆起他的那本介绍红黄相配

得到橙色的书，回忆起那时看到的风景画并好奇如何能用一张平面展示三维图景。他早期的视觉记忆由于没有后来的干扰，所以尤其栩栩如生。

失明之后莫林离开上海回到法国并一直呆在法国。他在法国盲哑学校上到十五岁，然后上了一所普通高中。他对数学和哲学感兴趣，可他父亲并不认为儿子在数学方面会有多大建树，便让他读了哲学。莫林在巴黎高师学习了几年之后，放弃了对哲学的幻想而转学数学。他师从亨利•嘉当（Henri Cartan）并在 1957 年进入国家科学研究中心（Centre National de la Recherche Scientifique）担任研究员—— 此时的莫林已经因为球面外翻的研究而小有名气。后来他又师从勒内•托姆（René Thom），在 1972 年完成了关于奇点理论的论文拿到了博士学位，又在高级研究院工作了两年。莫林一生的大部分时间都在斯特拉斯堡大学（Université de Strasbourg）任教并于 1999 年退休。

1959 年，史蒂芬•斯梅尔（Stephen Smale）证明了一个令人惊奇的定理：所有 n 维球面的欧氏空间浸入都是正则同伦的。这就意味着三维球体对三维空间的标准浸入和反浸入是正则同伦的。这也就是说球面可以外翻——或者说把里面翻到外面来。然而，根据斯梅尔论文构造球面外翻显得过于复杂。二十世纪六十年代早期，阿诺德•夏皮罗（Arnold Shapiro）做出了一种球面外翻的方法但并未发表。他把这种方法解释给了莫林，而莫林也已经独立构思出了类似的想法。物理学家马赛尔•弗诺萨特（Marcel Froissart）也对这个问题有兴趣并向莫林建议了一个关键性的简化步骤——而莫林制作陶模型正是为了和弗诺萨特合作。1967 年，莫林首次展示了能够进行球面外翻的同伦。



史蒂芬•斯梅尔（1930- ）

加州大学伯克利分校的查尔斯•皮尤（Charles Pugh）借助莫林的陶模型的照片构建了外翻不同阶段的鸡笼模型。1976 年尼尔森•麦克斯（Nelson Max）制作的著名纪录片《球面外翻》就用了对皮尤模型测量的结果，麦克斯现在是劳伦斯•利弗莫尔国家实验室（Lawrence Livermore National Laboratory）的数学工作者。这部纪录片是计算机图形史上的奇迹。实际上莫林的球面外翻有两种方法，一开始他也不知道影片中记录的是哪一种。他询问了看过影片的同事，不过据他回忆“没人能说出到底是哪一种”。

自麦克斯的纪录片问世以后，世界上已经出现了其他的外翻方法，也产生了记录这些新方法的影片。其中一种外翻方法是低维拓扑的重量级人物威廉•瑟斯顿（William Thurston）发明的。瑟斯顿发明了一种能够从斯梅尔的原始证明中构造的方式。几何中心的影片《从外到内》记录了这种外翻方法。马萨诸塞大学安姆斯特分校（University of Massachusetts at Amherst）的罗布•库什纳（Rob Kusner）发现了另外一种方法，他还提出了最小能量法可以用来做出莫林的外翻。伊利诺伊大学的数学工作者约翰•M•沙利文（John M. Sullivan）、乔治•弗朗西斯（George Francis）和斯图尔特•列维（Stuart Levy）在 1998 年拍摄的纪录片《最优外翻》记录了库什纳的这一想法。雕塑家、图形动画专家斯图尔特•迪克森（Stewart Dickson）用《最优外翻》中的数据为一个名叫“感知数学”的活动（该活动旨在制作盲人可以使用的几何体模型）制造出了最优外翻的不同阶段的数学模型。一部分模型在 2000 年 9 月的法国莫伯日（Maubeuge）举行的国际艺术与数学研讨会上送给了莫林。莫林开心地将模型放在了自己的客厅里。

双目失明不但丝毫没有影响莫林非凡的空间想象能力，反而还有所裨益。他说像失明这样的残疾，会让人的长处更长，短处更短，所以“盲人的优缺点都更加突出”。莫林认为数学想象力分为两种，一种叫做“时间想象”，想象的是通过一系列步骤处理的信息，这种想象力能让人们进行长步骤的计算。“我的计算一直不好，”他说，而且双目失明让他的计算更不好。他擅长的是另外一种想象，他称之为“空间想象”，这种可以让人一次性理解所有的信息。

想象几何体的一个难点是：人们往往只能看见物体的外面，而看不见里面—— 但里面可能非常复杂。莫林通过同时仔细想象里外两面，培养出了一种“外翻内”—— 或者是从一块空间移动到另一块空间的能力，而这种空间想象似乎更依赖于触觉而非视觉。“我们的空间想象是靠触摸物体拼起来的”，莫林说，“你可以在手上把玩模型，而不是用眼睛看。这样的话‘外面’和‘里面’就只和你对模型的动作有关了”。因为他太熟悉触觉信息了，可以在把玩一个模型几个小时之后几年都记得其形状。

几何：纯思考

2001 年七月，在德国著名的黑森林数学研究所（Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach）的一次会议中，伊曼纽尔•吉鲁（Emmanuel Giroux）做了关于他最近的工作的报告，报告的题目是《接触结构和“打开的书”分解》。尽管吉鲁双目失明，他的报告仍然是这一周会议中最清晰、最有条理的—— 也可能这都是失明的贡献。他坐在投影仪旁一张张地换幻灯片，显然他很清楚每张幻灯的准确内容。他用手比划出自己对于一个几何体是如何接触另一个边界的精确描述。之后，听众中有些人回忆起了吉鲁的另一场报告：报告中他像放电影一样，一帧帧地清晰描述了某个数学现象。“这是我做事的方法，我的风格是尽可能的清晰”，吉鲁说，“不过，我经常也因为其他数学工作者无法解释他们在黑板上写了些什么、画了些什么而非常沮丧”。所以，他讲得清晰，部分原因是为了向那些视力正常但讲得使人云里雾里的同事抗议。

吉鲁十一岁就双目失明。他注意到大部分盲人数学工作者都是研究几何的——可是为什么是几何呢？这可是最需要“看见”的数学领域啊！“其实只是纯思考。”吉鲁回答说。他解释说，例如在分析学中，一个人必须得计算，一行一行做。用盲文就很麻烦：写点东西得打一大堆孔，读的时候还得翻过来摸。这样一来写很长的计算式就非常困难（将来随着无纸书写工具——例如可重写盲文工具的发展，这可能容易一些）。而相比起来，“搞几何学，内容就集中的多，你可以全装在脑子里。”吉鲁说。到底装在脑子里的是什么，这很神秘，还不一定是图形——图形是一种表示数学对象的方法，但却不是思考对象的方法。

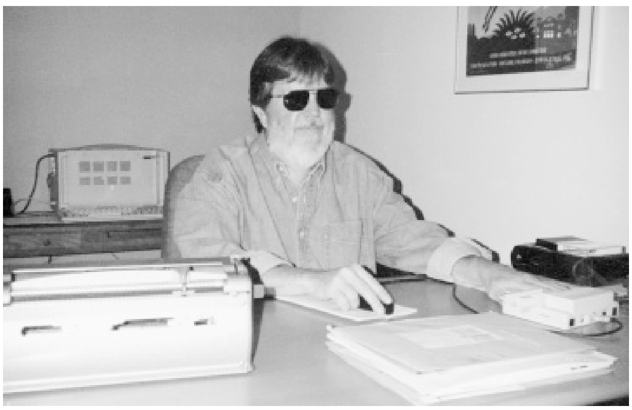
阿里克谢•索辛斯基（Alexei Sossinski）指出，许多盲人数学工作者研究几何并不奇怪。一个视力健全的人的空间想象力是来自于大脑对于三维世界投射在视网膜上的二维图像的分析能力，而盲人的则来自于大脑对触觉和听觉信息的分析。无论哪种情况，大脑都会根据感官信息而灵活地建立起空间表达。索辛斯基指出，对复明的盲人的研究表明：人具有与生俱来的理解基本拓扑结构（例如一个东西上有多少个洞）的能力。“刚复明的时候，他无法分辨出一个正方形和一个圆，”索辛斯基写道，“只能觉察到它们拓扑等价。但是他们立即就能注意到圆环和球的不同”。索辛斯基在私下的谈话里说到，视力正常的人们有时会对三维空间产生错觉，原因是视网膜上的二维投影信息既不充足又误导人。“盲人（通过其他感觉）建立起一个没有形变的、直接的三维空间的感觉。”

至少自柏拉图（Plato）以来，人们很长时间一直试图理解空间想象能力。柏拉图相信，无论人是否失明，理解空间关系的能力都是一样的。而笛卡尔（Descartes）根据视力受损的人们通过触摸来认知形态，在 1637 年的《方法论》中声称人们在头脑中构造模型的能力是天生的。十八世纪晚期，狄德罗（Diderot）在研究中接触了盲人，并总结说人们可以仅靠触觉就良好地感知三维物体。他还发现大小的变化对盲人而言并不是问题，盲人可以“在头脑中放缩形体。这种空间想象往往是靠回忆和重新组合对物体的感觉”。近几十年有许多关于盲人空间想象力的研究。流行的观点是盲人的空间想象力比视力健全的人更弱或者更差。但也有学者不同意这种观点：盲人以及视力健全的人的空间想象能力在执行许多普通任务—— 比如记忆走路路线的时候并无差异。

分析学的挑战

并非所有的盲人数学工作者都研究几何。尽管分析学对失明人来说是个棘手的问题，但还是有不少人选择了分析学—— 比如劳伦斯•拜吉特（Lawrence Baggett）。他已经在科罗拉多大学波尔得分校（University of Colorado at Boulder）任教三十五年了。他五岁失明，但从小就喜欢数学，可以在头脑中做许多思维体操。他从没学过除法的正规计算法——因为用盲文来做长除法太复杂了—— 可是他发明了自己的除法计算法。盲文书籍很有限，他便让母亲和同学为他朗读。他一开始想做律师，因为“那时候盲人都当律师”，不过以后上了大学，他就决定改学数学了。

拜吉特说他自己的几何从来没学好，因为他无法想象那些复杂的拓扑结构。不过这并不是因为他的视力缺陷。他说，要想象一个四维球体，“我不认为看得见能有什么



劳伦斯•拜吉特（1929- ）

帮助”。有时候在研究时他会想象公式图表以及提示性的画面。他在头脑中反复思考一个问题的时候有时会写点盲文笔记，不过并不常这样做。“我会试着念出来，”他解释说，“我经常踱着步子自言自语”。跟视力健全的同事搭配工作会比较容易，他们可以帮着查阅资料，或是看懂一长串的式子是什么意思。其他的东西呢，拜吉特说，都和两个视力健全的人一样。可是，比如像在黑板上画个图或是列个式子计算呢？“他也会写给我画给我！”拜吉特笑着说，同事会用语言把黑板上的东西描述出来。

拜吉特并不觉得他心算能力强。“我觉得视力健全的数学工作者也可以心算很多东西，”他说，“不过还是写在纸上方便”。有一件事佐证了这一点：某年冬天拜吉特在波兰参加一次会议，会议大厅的灯忽然灭了，顿时一片漆黑，可作报告的没有停。“他积了分，进行了傅立叶变换，大家都跟得上，”拜吉特回忆说，“这说明一点：可以不要黑板，只是黑板更方便”。

盲人数学教授必须有新的教学方法。有些人是这样的：在黑板上书写的时候第一行齐眉，第二行齐唇，第三行齐颈等等。拜吉特也用黑板，不过更多的是为了调整讲课的节奏而非系统地传递信息好让学生抄笔记。实际上他会告诉学生们：不要抄板书，要记说的话。“我写板书只是为了让我的课看起来跟其他人一样，”他说，“许多学生选择在我的课上用不一样的方法学习，他们做到了”。拜吉特用 TeX 出考题，还建了一个网站来存放家庭作业和其他信息。打分方面，他本可以让别人代打，“不过这样我就听不到学生的反馈了”，所以他就采取了各种打分方式：诸如让学生根据自己的作业进行口头报告等等。很明显，拜吉特对教学的热爱，对学生的关心让他克服了失明给他带来的局限性。

交流方式

诺伯托•萨利纳斯（Norberto Salinas）二十世纪六十年代在阿根廷长大，自十岁起就失明了。跟拜吉特一样，他周围盲人的“标准职业”也是当律师，这样一来就没有什么数学物理的盲文资料。不过萨利纳斯的父母会给他朗读并且录音。他的土木工程师的父亲问自己在布宜诺斯艾利斯大学（University of Buenos Aires）数学物理系的朋友，儿子是否能参加入学考试。由于萨利纳斯考了最高分，于是学校允许他入学。在《数学史》杂志关于盲人数学工作者的网上讨论组中，帝国理工学院（Imperial College）的爱德华多•奥尔蒂斯（Eduardo Ortiz）回忆起他在布大的分析课堂上考核萨利纳斯的情景：当时他在奥尔蒂斯的手掌上画图来表现图形信息。后来奥尔蒂斯用这种方法在帝国理工学院教其他的盲人学生。萨利纳斯在秘鲁短暂地教过书，之后去美国密歇根大学读了博士，目前他在堪萨斯大学任教。

萨利纳斯说他经常喜欢把录音资料转换成盲文，这一步骤帮助他掌握知识。他设计了一套表示数学符号的盲文，并在二十世纪七十年代协助设计了一套表示数学符号的西班牙语盲文标准。美国的数学符号盲文标准内梅斯代码，是由二十世纪五十年代一位盲人数学工作者、计算机教授亚伯拉罕•内梅斯（Abraham Nemeth）发明的（内梅斯现在已经从底特律大学退休）。内梅斯代码继承了普通的六点式盲文的格式并用来表示数字和数学符号，且使用特殊指示符号来将数学符号和普通文字区别开来。标准盲文显然不是为科技资料所设计的，因为它连最普通的科技符号也表示不了，甚至连数字也必须用字母表示（例如用 a 表示 1，b 表示 2，c 表示 3 等等）。内梅斯代码学起来不简单，因为同样的字符在盲文中是一个意思，在内梅斯代码中是另外一个意思。然而它对协助盲人——尤其是盲人学生——阅读科技材料而言却非常重要。萨利纳斯和俄勒冈州立大学（Oregon State University）的一位盲人物理工作者约翰•加德纳（John Gardner）发明了一套新的代码 GS8。GS8 使用八个点，而标准盲文六个点，多出来的两个点是留给数学符号的，这样一来就能表示二百五十五个字符，而不是标准盲文的六十三个了。另外，GS8 的语法也是基于 LaTeX 的，这就使得 GS8 文件和 LaTeX 文件可以互相转化。

计算机为盲人打开了一个全新的可以交流的世界。像 Jaws 或者 SpeakUp 这样的屏幕朗读软件可以用合成语音将屏幕上的文字读出来。不过很可惜，这些程序读包含数学符号的文字的时候都表现不佳。有些盲人数学工作者只用这些软件阅读邮件或是上网（随着图片用的越来越多，上网对盲人来说也越来越复杂）。康奈尔大学的一位计算机科学家拉曼（T. V. Raman）开发了一个名叫 AsTeR 的程序，这个程序可以输入一个 TeX 文件，然后输出一个用合成语音朗读的声音文件，数学公式和文字都能朗读。加德纳也开发了一个软件 TRIANGLE，也带语音合成但比 AsTeR 更简单，这个软件还带一个 LaTeX 和 GS8 代码互相转换的程序。

有些盲人数学工作者直接阅读 TeX 源文件。吉鲁就用一台可重写盲文触摸屏来阅读。他说，录制一篇论文的录音对他而言更好，不过在录音之前他要先看一下自己是否对文章感兴趣。阅读 TeX 源文件能让他迅速直接地了解论文。当然，TeX 文件是设计给电脑而非人阅读的，因此就会很复杂而冗长。不过吉鲁说：他很容易从电子预印服

务器和期刊杂志拿到 TeX 文件，以便跟踪当前的研究成果。书籍比论文要更麻烦一些，因为尽管 TeX 是数学书的标准出版格式，可是要从出版社拿到 TeX 源文件并非易事。

盲人能学数学

健全人对数学了解不多，于是很自然地就认为数学符号会给盲人造成不可逾越的障碍。而实际上，对于盲人来说，数学比其他职业要容易得多。原因之一是数学语言比其他语言要精炼，数学式子很短，所以研究数学要阅读的东西就少。“研究数学，”萨利纳斯说，“只需要看寥寥几页就能学到一大堆东西。”另外，盲人的想象力往往很好，而想象是研究数学的理想境界。莫林指出，往往视力健全的人学几何的时候，想象两个相交平面是在书上所画的二维图片，几何对他们来说就是这些二维图片，他们对自然世界中的平面毫无概念。而盲人因为不用这些图画，所以能很自然地想象抽象的平面。

当前最著名的美国盲人数学工作者可能是扎卡里 •J• 巴特尔斯（Zachary J. Battles），他的光荣事迹甚至登上了《人物》杂志的封面。巴特尔斯也几乎是一出生就失明，三岁的时候被人从韩国孤儿院收养。他在宾夕法尼亚州立大学读完了数学学士，而后又读了计算机学士和硕士，还两次到乌克兰教英语并担任残疾学生的导师。如今，他获得了罗兹奖学金（Rhodes Scholarship）在牛津大学学习数学。巴特尔斯像其他许多盲人数学工作者一样，激励着视力健全人以及盲人。

编者后记

在中国，当代的盲人应用数学家是中山大学的富明慧教授。他 1988 年 7 月毕业于吉林大学数学系力学专业，获得学士学位；1991 年 9 月公派赴莫斯科大学数学力学系固体力学专业留学，1995 年 2 月获得博士学位；1995 年 5 月至 1997 年 4 月在清华大学工程力学系做博士后，1997 年 5 月出站，到中山大学应用力学与工程系工作。同年 7 月晋升副教授，2004 年晋升教授和博士生导师。其主要研究方向是复合材料力学、计算固体力学。虽然他看不见课本，也看不见黑板，但他靠两块小小的磁铁，建起了板书坐标。为方便备课他在学生帮助下，将教材内容输入电脑，反复听反复记，直到整本书倒背如流。详细资料见：http://news2.sysu.edu.cn/theory01/124827.htm

富明慧（1966- ）

延伸阅读：

新京报：《谷歌盲人工程师讲述软件设计之路》：
http://www.newhua.com/2012/0116/142133.shtml
蒋迅：《NASA 的盲人黑人工程师马可 • 米登》：
http://blog.sciencenet.cn/blog-420554-565144.html

本文大部分内容译自美国数学会刊物 Notices：
http://www.ams.org/notices/200210/comm-morin.pdf

数字间的邂逅

柳形上

哪里有数，哪里就有美。

——普罗克勒斯（Proclus）如是说

在我们的孩提时代，就和数字相识……数的世界，看似如此的简单平常，让我们不以为然。然而经由发现的眼睛，这里的世界却是奇妙的。上学期某一次的数学文化课堂，我们曾通过两个数字：153 与 666 来分享这样的理念——数的世界有大美在焉！

I 开篇之曲

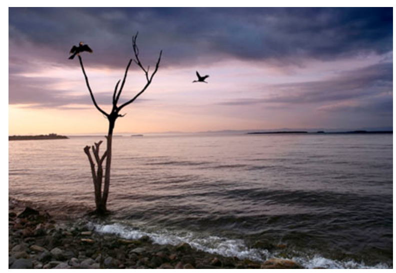
回眸处，在远古时代人们的眼里，数或具有童真的色彩。毕达哥拉斯学派相信神用“数”创造了宇宙万物。数是万物之母，整个世界——物质的、形而上学的一切，都是建立在 1，2，3，……这些数的离散模式之上的；1，2，3，……是上帝创造世界的砖块。

这是一个卓越的理念，简单而美妙。数具有魔术般的性质：音乐的和声是数的简单比例，天空中的一切都是数的各种音乐和不同的数之间的和弦。

在古希腊人眼里，每一个数可以有其独特的属性。比如数字 1 是数之源，代表理性；2 表示变化多端的见解，它是第一个阴性数；3 代表着和谐，它也是第一个阳性数；4 表示公正，因为它是第一个平方数；5 表示婚姻，因为它是第一个阴性数与第一个阳性数之和：$2+3=5$；6 代表完美，因为它是上帝创造世界的天数。

II 奇妙的圣经数

153 是一个奇妙的数，它也被称作“圣经数”。之所以得此大名，或因为它有出现在《圣经》里。在《圣经 • 新约》约翰福音第 21 章里记载了这样一个故事——



提比哩亚海

话说耶稣死而复活之后，在提比哩亚的海边向 7 个门徒显现，当时耶稣的门徒打了一整夜的鱼，什么也没有打着。天将要亮的时候，耶稣站在岸上，但是门徒却不知道是耶稣。

耶稣对门徒说：“你们把网撒在船的右边，就必得着。”

他们便撒下网去，竟拉不上来，因为鱼甚多。当他们把网拉到岸上之后，发现网满了大鱼，共 153 条。

153，或许你曾许多次和它不经意间相逢。只是你并不知晓，其实它具有许多奇妙的数学性质。

（i）“圣经数” 153 是一个三角形数——153 恰是前 17 个自然数的和：

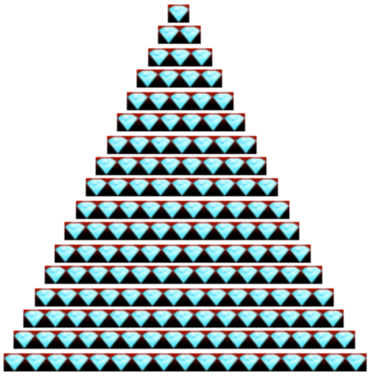
$$153=1+2+3+\cdots+17$$

（ii）153 恰是前 5 个自然数的阶乘之和：

$$153=1!+2!+3!+4!+5!$$

（iii）153 还有一个奇妙的特性：

$$153=1^3+5^3+3^3$$



有着这一特性的数被称作水仙花数。水仙花是我国的十大名花之一，在 1300 多年前的唐代即有栽培，深得人们喜爱，因而有许多的别名——凌波仙子、金盏银台、洛神香妃、玉玲珑……

让我们阅读如下的数学画片——

任给一自然数 m，我们记 $P(m)$ = 数 m 的所有数位中数字的 3 次方之和。

进而我们有如下的有趣发现 ——

水仙花数的黑洞：任给一个被 3 整除的自然数，对其作有限次的 P- 映射迭代必可回归到圣经数 153。其例证如下：$P^5(201)=153$; $P^6(36)=153$; $P^3(333)=153$。

画外音：在所有三位数中，有着水仙花数特性的数还有 370，371，407：

$$407=4^3+0^3+7^3$$
$$370=3^3+7^3+0^3$$
$$371=3^3+7^3+1^3$$

在众多数学人的眼里，水仙花数是指一个 n 位数（$n\geq 3$），它的每个数位上的数字的 n 次幂之和等于它本身。借助于相关的理论分析，我们可知道，满足这一属性的数是稀有而珍贵的——只有有限多个，而最大的水仙花数不超过 34 位。在计算机的辅助下，我们可写出所有水仙花数。下面的表格列出了 3-8 位间的水仙花数。

n	n 位水仙花数
3	153，370，371，407
4	1634，8202，9474
5	54748，92727，93084
6	548834
7	1741725，4210818，9800817，9926315
8	24678050，24678051，88593477

在西方，水仙花数又有着“自恋数”的名号，此缘自一个希腊的神话故事——纳西索斯（Narcissus）的哀伤。这是一个特别的故事，无关众神之间的明争暗斗，无关人间王国的王朝更替，而只是一个讲述爱上自己倒影的离奇故事：

美少年纳西索斯是河神刻菲索斯（Cephisus）与林间仙女莱里奥普（Liriope）的儿子。他的出生伴随着一个来自先知忒瑞西阿斯（Tiresias）的奇特预言。预言说，纳西索斯绝不可见到自己的倒影，否则他将死去。带着这样的一个预言，纳西索斯渐渐长大，成为全希腊最俊美的男子。无数的少女对他一见倾心，可他却无情地拒绝了所有的人。

伊可（Echo）是一个美丽的山中仙女，也是被拒绝者中的一个。伊可十分伤心，日日在幽静的山林中流泪徘徊，很快地消瘦下去，直至她的身体完全消失，只剩下忧郁而轻柔的声音在山谷中回荡。此后希腊人用伊可的名字（Echo）来表示“回声”。

纳西索斯的行为惹怒了阿尔忒弥斯（Artemis），她决定让纳西索斯去承受痛苦：爱上别人，却不能以被爱作为回报。于是有一天纳西索斯无意间看到自己在水中的倒影 —— 一个比他以前见过的任何人都更加俊秀的少年。他疯狂地爱上了他，无数次将手伸入水中，想要拥抱水中的他，最后溺水而死。他的身体化作一朵朵晶莹剔透、出水而立的水仙花（narcissus）。顺便说一句，narcissism（自恋）这个词即源于 narcissus。

III 魔鬼数 666

经由数学的眼睛，666 也是一个奇妙的数。这个数被称为魔鬼数。其亦有着圣经故事的背景——

666 这个数字在圣经中有记载，在启示录 13: 18 中如此写道：

" This calls for wisdom. If anyone has insight, let him calculate the number of the beast, for it is man's number. His number is 666 . "（“在这里有智慧：凡有聪明的，可以计算兽的数目；因为这是人的数字，他的数目是 666。”）

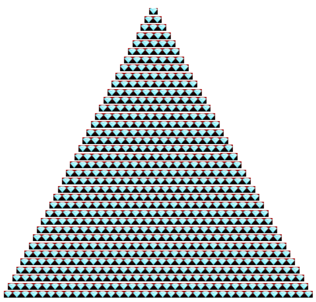
缘何 666 被认为是邪恶的，不祥的数字呢？有一种说法是，因为 7 有着神圣、祝福、圆满、完全的意思，而 666 则是七缺一后重复三次，表示极不完全的意思。

不管 666 是否真的会带来不幸，西方人很忌讳这一魔鬼的代号或是一种文化的认同。下面流传的这个故事或多或少说明这一点：

> 话说美国前总统里根在卸任前打算移居洛杉矶－贝莱尔市的克劳德大街，当他得知自己未来的别墅牌号是 666 时，大惊失色；急忙动用总统权力让莱尔市政府将寓所号码改动……

然而，这个在圣经中被视为人间至恶的象征的魔鬼数，却有着许多奇妙的数学性质 —— 有如圣经数 153，666 也是一个三角形数：

$$1+2+3+\cdots+36=666$$



666 具有如下的一些奇妙的性质：

（ii）$666=1^6-2^6+3^6$ —— 666 是最小的 3 枚自然数的一奇妙组合；

（iii）$666=2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2+17^2$——666 恰是前 7 个素数的平方和，$666=313+353$ —— 666 是 2 个相邻的回文素数的和；

（iv）$\varphi(666)=6\times6\times6$ —— 这里 φ 是 Euler 函数，这个等式表明，在 1 至 666 中与数 666 互素的个数是 216；

（v）666 方程：

$$(6+6+6)+(6+6+6)^2+(6+6+6)^2=666,$$
$$(6+6+6)+(6^3+6^3+6^3)=666,$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+5^3+4^3+3^3+2^3+1^3=666;$$

（vi）魔鬼数 666 的奇妙还在于——

黄金比 $\varphi=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的前 146 位数字之和 ＝ 666:

0. 618033988749894848204586834365638117720
3091798057628621354486227052604628189024
49707207204189391137484754088075386891752
12663386222353693179318006……

圆周率 π 的小数点后的前 144 位数字之和＝ 666:

3. 141592653589793238462643383279502884197169399
375105820974944 59230781640628620899862803482534
21170679821480865132823066470938446095505822317
25359……

$$e^{\pi\sqrt{163}}=262537412640768744\ ?$$

$e^{\pi\sqrt{163}}$ 这个数联系着一个传奇数学家的名字，叫做拉玛努金数。一则有趣的数学往事是，在 38 年前（1975 年 4 月出版的）一期《科学美国人》中，数学科普大师马丁 • 加德纳曾开玩笑说这是一个整数 。拉马努金数 $e^{\pi\sqrt{163}}$ 小数点后的前 132 位数字之和＝ 666:

262537412640768743. 9999999999992500725971981856
88879353856337336990862707537410378210647910118
60731295118134618606450419308388794975386404490
57287144771 ……

$\sqrt[3]{2}$ ＝ 1.259921049894873164767210 小数点后的前 156 位数字之和 ＝ 666:

1.2599210498948731647672106072782283505702514647
01507980081975112155299676513959483729396562436
25509415431025603561566525939902404061373722845
9110304269355246……

$\sqrt{3}$ ＝ 1.73205080756887729 小数点后的前 146 位数字之和 ＝ 666:

1.7320508075688772935274463415058723669428052538
10380628055806979451933016908800037081146186757
24857567562614141540670302996994509499895247881
165551 ……

奇妙的是其小数点后前 34 位数字之和＝ 153。

IV 注释的楼阁

这个以“数字的星空”为主题的数学文化讲座，以两个数字 153 和 666 的知识和相关的人文故事的讲授来呈现数学的魅力。课堂伊始以一则其名曰“数字雷”的游戏设计展开话题，约定踩到数字之雷的同学可以和我们分享一段他或她的校园往事……缘于那天是 5 月 31 日，设计篇中的三个数字雷依次是 531，153，666。

在一个半小时的讲课过程中，我们偶有互动，分享着知识的七彩……总的说来，这一主题的数学文化讲座还是蛮成功的，在课后我们做了一个简单的问卷调查，相关的数据和文字片断表明，绝大多数的同学还是很喜爱这一数学的课堂 —— 一方面看似如许简单的数字背后竟然有着许多奇妙的数学故事，让他们感受到比较

多的惊奇；一方面课堂上的学生多是文科生，相关的人文趣事自然可以极大地引起他们的共鸣……且听如下的一部分同学的文字片断：

（i）通过今天的课，对生活中的普通数字有了更深的认识，原来一些再平凡、再普通、再常用不过的数竟然有这样奇妙的内涵与奥秘在其中。而过去的我在生活中错过了太多对有趣数字的发现与了解，实在遗憾。希望老师能够为我们多讲一些如此有趣生动的课程，让我对数学有更多更进一步的热爱。

（ii）153，原本一个在数字海洋里平凡的数字，当赋予了数字的想象力，这个数字竟也有了神秘的色彩：三角形数，1!＋2!＋3!＋4!＋5!，以及之前我就知道的水仙花数。

666，一个看似幸运的数，在不同的国界竟也有着不同的含义……很多神奇的数字进行组合给出了我们神奇的想法。

这堂课，我学到了很多与数字有关的东西，让我产生了对数字奇妙的感受，我们要多挖掘，找出数字间更多的魅力。

（iii）课堂开篇的游戏，其实早已司空见惯，玩过多次，但摆在课堂中进行，着实是令人耳目一新的。这才发现，其实我们平时玩的很多游戏都与数学相关。之后，再由喜爱的数字引申出圣经数 153 和魔鬼数 666，到介绍每一个数字背后的故事……都让我有一种“ Wow，原来是这样的 ”的惊奇感，数学真的很奇妙……这一次与数字的邂逅真令人欣喜。

(iv) 从未认真思考过这些数字背后有这么多神奇的故事。人文与数字的完美结合，是巧合还是必然 ?……以前简单地以为数字仅在数学中占有重要的地位，但其实也会与生活息息相关……当了解到数字 6 为计算机出错率最少的数字后 觉得十分奇妙，而每一个条形码的首、中、尾处均含有代表数字 6 的条码，即为 666。还有神奇的水仙花数与伊可相关…… 数字带来了无穷的乐趣。

原来数字下隐藏着这么多的秘密，在中国传统观念中“ 666“是个吉祥的数字，人们常说“六六大顺”，而在西方居然被称作魔鬼数，文化很奇妙……也许今天的数字介绍只是数学王国的冰山一角，但也足以震憾。

数字真奇妙！那些神秘的数字 153，666……是怎样被人们发现的呢？我想这个过程必是一种“灵感”所激发的，或许这个过程本身就是上帝赋予人类的。

数字的世界，就是一个秘密花园，我们只是嬉戏其中的顽童，偶尔发现了隐藏其中的七彩石，而后为此兴奋不已。不知还有多少七彩石待我们去发现……

有数字的生活，不再是那样单调枯燥了。数 ＝ 趣味＋神秘。

(v) 水仙花数的由来，那唯美的神话，虽然以前早早就看过了，但是今天在数学的课堂上提出它，别有一番滋味；将严肃的数学与唯美的神话结合起来，非常的美，也充分激起了我的兴趣，让我沉浸在这片神奇的数字海洋……不只 153，魔鬼数字 666 也带给了我惊艳的感觉，那些我们平时不会注意到的数字，竟然藏了这么多的小秘密……于我来说，这是一场数字的盛宴，带给了我们很多美的享受，发现数学是如此的美。

今日的课堂让我觉得数字充满了神奇，有很多奥秘和乐趣，它是古老、神秘、精彩的，并不是那样的单一无聊。数学中拥有着很多看似巧合但实则有着必然的道理……这或许就是数学的魅力……

(vi) 数学，无处不在，无孔不入，穿梭于我们生活中的每一个角落，不去探索，你永远不会知道它是有多么的令人惊奇。有人总是认为数学是枯燥无趣的，那是因为他们不懂数学之美……

V 画外音

上面的“数字间的邂逅”，或许让我们有几分触动，几许感悟：现代数学卷帙浩瀚，抽象绵延，然究其数学之本原，或是为了演绎数字之纯真；而隐藏在简单纯粹的数字精灵们背后的，却又是一个无限的星空……想起曾在莫里斯 • 克莱因（Morris Kline）的《古今数学思想》一书中看到如下的一句名言：

> God exists since mathematics is consistent，and the devil exists since we cannot prove the consistency.

上帝是存在的，因为数学无疑是相容的；魔鬼也是存在的，因为我们不能证明这种相容性。在数学的浪漫星空有许多许多美丽的真理在闪烁 ——这里有上帝缔造的完美；然数学的证明之旅，却往往会是个魔鬼的旅程 。

数学，如同人生，简单的平凡的每一天可以绘就多彩的往事。

重心（Barycentric）坐标的一个妙用

万精油

上期的趣味数学题目是用两个不同容量的容器分酒。为便于描述，我们把上次的题目再重复一下。

上期题目： 一个能装 14 两酒的容器装满了酒。另有两个容器，一个能装 11 两，一个能装 5 两。这些容器都没有刻度，现要求你用这三个容器把酒分成均等两份。

这是一道经典题目。这个题目不麻烦，相信许多喜欢数学问题的人都碰到过。只是容器的容量不同。对于小一点容量数目，可以多试几次就得出答案。但如果要找对任意数目的通解，我们就要用到更系统的方法。

先看一下对具体数目的解。解题过程可用下面的矩阵表示，第一行是瓶子的容量，后面是每一步时每个瓶子里的酒的数量。刚开始两个小瓶是空的，所以状态是（0 0 14）。第二步（0 11 3）就是把酒从 14 两的瓶里倒进 11 两的瓶里，大瓶里还剩 3 两。其它以此类推，

5	11	14
0	0	14
0	11	3
5	6	3
0	6	8
5	1	8
0	1	13
1	0	13
1	11	2
5	7	2
0	7	7

最后的结果是（0 7 7）。均分 14 两，问题得解。

这个问题我们把它简称为（5, 11, 14）问题。对于（19, 23, 40）问题，步骤就要多很多。如果再加大到（29, 37, 60），没解出题以前已经倒晕了。

更一般的情况：一个能装 X 两酒的容器装满了酒。另有两个容器，一个能装 Y 两，一个能装 Z 两。$X > Y > Z$。这些容器都没有刻度，现要求你用这三个容器把酒分成均等两份。

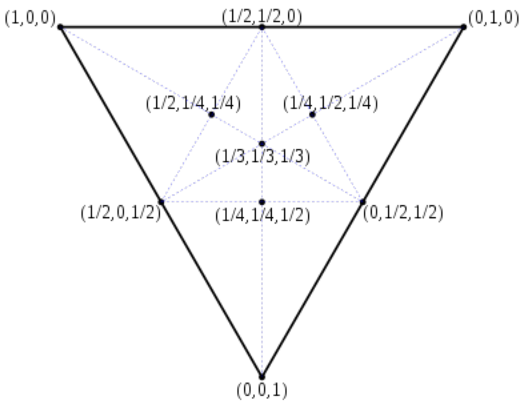
对于大一点的数，我们不能盲目地瞎倒，必须要有一般的解法。需要设计一个固定步骤，只需遵循这个步骤就可以找到解（或证明解不存在）。

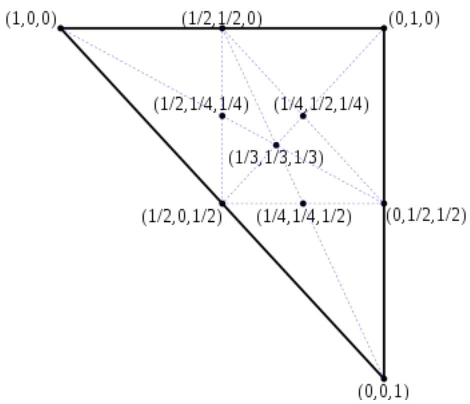
古老的重心（Barycentric）坐标系统闪亮登场。

重心坐标系统是莫比乌斯 1827 年引入的，近代数学甚至把这个重心坐标概念推广到代数几何簇的仿射坐标里。以前学到重心坐标，总觉得是数学家头脑里想象出来的玩意，不会有太多现实意义。后来在工作中需要写一个 N 维空间中的插值程序，竟然很自然地用到了重心坐标，又一次为纯数学研究正了名。重心坐标的奇妙还不仅于此，对我们眼下的

这个分酒题目也可以派上用场。这个古典的大瓶小瓶分液体问题，以前不知做过多少次，每次都是硬试。但如果用重心坐标，就可以得到通解。

先讲一下重心坐标。重心坐标的定义本来适用于任意 N 边形。但对于我们解这道题来说，只需用到三角形，所以我们只讲它在三角形上的定义。一般情况下的定义可以类推。三角形上的重心坐标也叫面积坐标。因为对于三角形 ABC 来说，点 P 的重心坐标与三角形 PBC，PCA，PAB 的面积成比例。如果我们限制坐标和为 1，那么对任意一点 P，这个比例就唯一确定了三个数，它们就是 P 的重心坐标。如图：



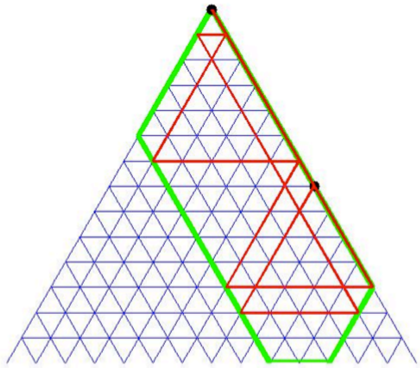


对于我们这道题，为了方便，我们不限定坐标和为 1，而是只保持其比例部分。这样一来，我们可以只与整数打交道。具体说起来就是，在一个等边三角形里作平行于每条边的平行线。在（5, 11, 14）问题里，最大的瓶子容量是 14，我们就作 14 条平行线（包括边线本身）。这样一来，三角形就被分成许多格点。一个点的三个坐标就是那个点到三条边的距离（在这个题里表示酒瓶里所剩酒的数量）。最后，以每个瓶子的容量线为边界作一个多边形（下图中的绿线）。

如何用这个图来解决我们的问题呢？我们可以把这个多边形想象成一个台球桌。从起点开始，让一个球沿坐标线跑（相当于台球在边界上做弹性碰撞）。这样一直跑下去，如果碰到平分点（0, 7, 7）点，那个路径就是解，如果没碰到平分点就开始循环，说明没有解。

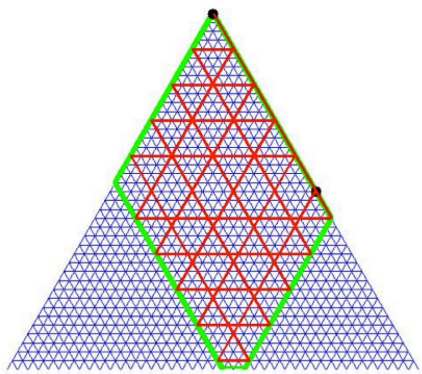
注意到从起始点可以有两个方向出发，所以有解的话就有两种解。当然，我们选择比较短的那个。下面的两个图就是用这个方法解题的示意图。蓝线是坐标线，绿线是边界，红线是跑的轨迹。上方的顶点是起始点。另一个粗红点是终点（解）。旁边是对应的步骤。

（5, 11, 14）问题



0	0	14
11	0	3
6	5	3
6	0	8
1	5	8
1	0	13
0	1	13
11	1	2
7	5	2
7	0	7

（19, 23, 40）问题



0	0	40
23	0	17
4	19	17
4	0	36
0	4	36
23	4	13
8	19	13
8	0	32
0	8	32
23	8	9
12	19	9
12	0	28
0	12	28
23	12	5
16	19	5
16	0	24
0	16	24
23	16	1
20	19	1
20	0	20

有了这个方法，对任意 3 个数的组合，我们都可以不用动脑筋，只需让这个台球从起点开始做弹性运动，自然就把解找出来了。因为瓶子都没有刻度，所以倒酒只能倒满（或者把一个瓶子倒空），所以，所有的解都只能是这种弹性运动产生的。如果这个弹性运动没有产生解，那么就证明了解不存在。

（29, 37, 60）问题如果画出图来就线路太密，快成分形了，我们就不附图了。

古老的重心坐标系统竟然在这个趣味题上找到应用，数学的神秘再次让我们叹服。

本期题目：2001 年纽约时报有篇报导的标题是《为什么数学家们突然开始关心他们帽子的颜色？》。文章说最近一个有趣的关于帽子颜色的题目在各大学数学家之间广为流传。这个题目如何有趣，牵涉到什么数学理论，我们下期的文章会讲到，这期先把题目发出来。

帽子的颜色问题：三个人头顶上都被戴上一顶帽子。帽子的颜色是蓝色或红色，完全独立随机。每个人可以看见别人的帽子，但看不见自己的帽子。每个人可以有两种选择：猜自己帽子的颜色，或者放弃（就是不猜）。每个人把自己的决定写在一张纸上。如果最后的结果是至少一人猜对而且没人猜错，那么他们可以得到一笔巨额奖金。我们的问题是，他们用什么策略才能最大地提高得奖的概率。

本期题目注解

注 1：他们可以事先讨论一个策略，戴上帽子后就不能有任何形式的交流。

注 2：如果每个人都随机地猜，他们成功的可能性只有 1/8。他们能有办法保证有大于 1/2 的胜率吗？

注 3：这个问题可以推广到多个人，人越多胜率越大，甚至可以逼近于 1。当然，这要用到较深的计算与数学理论，下期文章会讲到。

谷歌数学涂鸦赏析（上）

欧阳顺湘

谷歌涂鸦是谷歌的一个文化传统，其中有不少与数学相关的内容，这对数学传播起着很好的作用。例如，我将介绍，纪念朱利亚的涂鸦发布后，涂鸦上漂亮的分形立即引起网民兴趣，导致一个分形介绍网站两次被摧垮。这里简要介绍与这些数学涂鸦相关的人物和故事，以助读者欣赏。

本文结构如下：在对谷歌涂鸦进行一般介绍后，我将先按涂鸦出现的时间先后顺序介绍一些主要的数学涂鸦，最后介绍几个与数学教育有关的涂鸦。纪念的人物按先后有：爱因斯坦、埃舍尔、朱利亚、达•芬奇、罗威尔、惠更斯、祖冲之、陈景润、牛顿、阿尔夫、孟德尔、费马、哈雷、华罗庚、赫兹、海亚姆、图灵、拉齐、比鲁尼、洛夫莱斯、拉马努金与托里斯等。在人物介绍中还穿插了一些与数学事件相关涂鸦的介绍：Unix 时间特殊秒、条形码的发明、圆周率日、折纸艺术纪念（日本折纸大师吉泽章诞辰 101 周年）与玛雅历法等。鉴于曾经做出过重要贡献的穆斯林数学家往往不太为人所熟悉，我用了相对较长的篇幅来介绍海亚姆和比鲁尼。而罗威尔和拉齐与数学关系不大（虽然他们都曾学习数学，且谷歌涂鸦也贴有标签“数学”），因此介绍较简略。

本文的写作过程也是笔者的学习过程。我既特别赞赏谷歌美不胜收的众多涂鸦，同时也深感知识海洋的无穷。不用说对很多被纪念人物、事件的完全无知，即使对一些原自以为有点了解的名人，实际上也是知之甚少。他们有如令人仰止的高山，深邃幽远的大海，值得认真学习了解。因此虽然很明显，但值得强调的是，本文对每个涂鸦背后人物等简短的介绍，是远非全面的。有兴趣的读者宜进一步去了解。

本文引用的涂鸦几乎都来自谷歌涂鸦档案库[1]，感兴趣的读者可去该档案库欣赏更多涂鸦。另外，这里所使用的涂鸦发表时间也来自于该档案库给出的时间。有可能因时区原因，这里的时间与涂鸦发表地区的时间不一致。

1 谷歌涂鸦简介

谷歌（Google）是目前互联网上最知名的搜索引擎之一。谷歌公司在搜索领域之外提供的免费邮箱、谷歌地图、谷歌图书、语言翻译、浏览器、云存储、输入法和操作系统等也都深受用户喜爱，同时谷歌还研发与谷歌搜索、谷歌地图等密切相关的无人驾驶汽车、眼镜等软硬件。谷歌虽然年仅 14 岁，却雄心壮志，正如其对外所宣称的，自己的使命是“组织全球信息，让人人皆可接触和使用”。

谷歌的成功源于其浓厚的人性化特点及其追求和热爱创新的精神。谷歌搜索主页上常常以涂鸦（doodle）形式所表现的谷歌徽标（logo）“Google”就是对该特色一个很好的诠释。

涂鸦以纪念各个国家、民族的节假日，名人的纪念日，重大发现或发明，或一些有意义的事件而具有强烈的文化

[1] http://www.google.com/doodles

图 1 马克•吐温诞辰 176 周年纪念（2011 年 11 月 30 日，全球。此图为创作图，搜索引擎当日显示的只是该图中央一部分。图中粉刷栅栏的故事取材自马克•吐温名著《汤姆•索亚历险记》）

图 2 2010 年春节纪念（2010 年 2 月 14 日，新加坡、马来西亚、越南、中国、泰国、韩国、香港、台湾）

图 3 狄更斯诞辰 200 周年纪念（2012 年 2 月 7 日，全球）

图 4 伦敦奥运艺术体操（2012 年 8 月 11 日，全球）

图 5 拉链发明人吉德昂•逊德巴克（Gideon Sundback）诞辰 132 周年纪念（2012 年 4 月 24 日，全球）

图 6 点击拉链主题图就会像拉开衣服一样跳转到关键词“吉德昂•逊德巴克”的搜索页面

特色。如 2012 年谷歌涂鸦就已庆祝了新年、春节、女儿节、父亲节、植树节、匈牙利国庆日等节假日和纪念日，也纪念了马丁•路德•金和查尔斯•狄更斯等名人的诞辰。纪念的事件有如 2012 年 1 月 18 日，谷歌涂鸦用黑盒遮挡谷歌徽标的方式抗议美国国会将讨论表决的《阻止网络盗版法案》以及《保护知识产权法案》[2]。另外，2012 年伦敦奥运会期间，谷歌涂鸦每日一更新，生动展现了开闭幕式以及击剑、体操、撑杆跳、乒乓球、跨栏、足球和艺术体操等体育运动。谷歌涂鸦纪念的发明既有中国的四大发明，也有如水果冰激凌和拉链等看似微小但却影响重大的发明。

谷歌涂鸦常以与被纪念内容关联的图画、动画或视频等充满创意的形式出现。有很多特别有趣的例子常为人津津乐道，下面是轻易举出的一些例子：

1. 2005 年 3 月 29 日，谷歌涂鸦纪念了著名画家文森特•梵高（Vicent Van Gogh）诞辰 152 周年。该涂鸦取材自他的名画《星空》。
2. 2010 年 5 月 21 日为了纪念吃豆人（PAC-MAN）游戏发行 30 周年，谷歌推出网页版吃豆人游戏，这是谷歌首款涂鸦互动游戏，在谷歌页面就可以玩这个游戏。
3. 2011 年 6 月 9 日，谷歌涂鸦发布了可弹出电吉他乐声的音乐涂鸦。这是为了纪念美国电吉他大师莱斯•保罗（Les Paul）诞辰 96 周年。实心琴体的电吉他就是他在 1952 年发明的。用鼠标滑过涂鸦中琴弦时可见到琴弦的震动，并听到相应音符的乐声，玩家可以获得真实的吉他弹奏体验，而且还可以录制所弹奏曲子。涂鸦发布后的 48 小时之内，仅在美国，人们就利用该

[2] 即 Stop Online Piracy Act（简称 SOPA）以及 Protect Intellectual Property Act（简称 PIPA）。

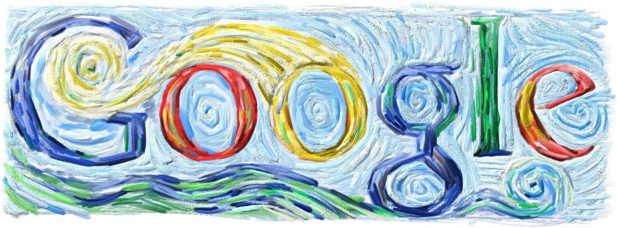


图 7 梵高诞辰 152 周年纪念（2005 年 3 月 29 日，全球）

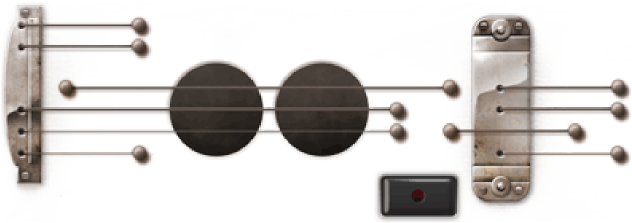


图 10 保罗诞辰 96 周年纪念（2011 年 6 月 9 日，全球）

图 8 梵高作品《星空》

图 11 万籁鸣、万古蟾诞辰 112 周年（2012 年 2 月 18 日，日本、台湾、澳大利亚、中国和香港）

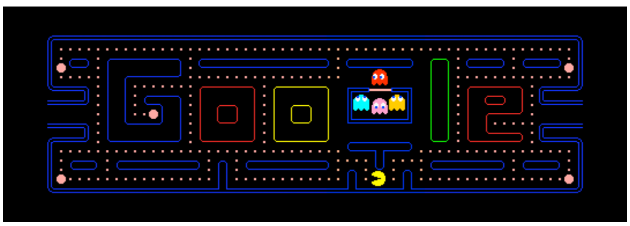


图 9 吃豆人游戏发行 30 年纪念（2010 年 5 月 21 日，全球）

图 12 七夕纪念（2011 年 8 月 6 日，文莱、台湾、新加坡、中国和香港）

电吉他录制了 4000 万首曲子，

4. 2012 年 2 月 18 日谷歌中国的涂鸦为孙悟空大闹天宫的动画（偷吃仙桃、猴子尾巴变旗杆等），这是为了纪念创作出中国经典动画《大闹天宫》的导演万籁鸣、万古蟾兄弟诞辰 112 周年。谷歌中国还纪念过端午节、七夕、中秋节和元宵节等具有民族特色的节日以及梅兰芳、张大千、鲁迅、钱学森和李小龙等名人诞辰。

好的徽标是一个公司的无形资产，有助于提升公司的整体形象。一般而言，任何公司都应该保持品牌形象的连贯统一，严肃对待其徽标。“涂鸦”的字面意思是随意涂抹色彩，胡乱书写。在涂鸦初创时期，确实引发了一些争议。然而谷歌却以涂鸦这种看似不严肃、多变的方式赢得了很好的效果。事实上谷歌对待每一个涂鸦都是认真的，要做很多研究工作，比如查阅资料、咨询专家等。有的涂鸦制作更是花费了上百天的功夫。即使如此，也有时会出错，但出错了都及时更改。

Google 涂鸦设计师黄正穆（又名丹尼斯 • 黄，Dennis Hwang）曾经讲述 DNA 双螺旋结构发现 50 周年纪念涂鸦发布的故事，也可以看出涂鸦与用户的互动。在双螺旋涂鸦刚刚发布几分钟之内，涂鸦设计组就收到了世界各地的基因专家发来的电子邮件和打来的电话，称“这不是双螺旋结构”、“非常紧急”等。在涂鸦设计组意识到是那些小彩条出错了之后，迅速更正并重新发布涂鸦。

谷歌涂鸦经历了从无到有，从简单到丰富的发展。1998 年，刚刚创立谷歌公司的斯坦福大学博士生拉里 • 佩奇（Larry Page）和谢尔盖 • 布林（Sergey Brin）在准备和员工去参加内华达州的火人节（Burning Man Festival）时突发奇想，决定在谷歌搜索主页的徽标上加上一个火人的图像以表达若系统崩溃不能及时修复是因为主人外出了。第一个涂鸦形式的徽标就这样诞生了！ 1998 年还有两个涂鸦分别纪念谷歌 Beta 版和感恩节。1999 年也只有 5 个涂鸦作品。

图 13 DNA 双螺旋结构发现 50 周年纪念（2003 年 4 月 25 日，全球，上图为修改后的版本，下图为最初将双螺旋结构画反了的版本）

图 14 火人节（1998 年 8 月 30 日，全球）

图 15 金星凌日纪念（2004 年 6 月 7 日，美国）

但 2000 年当佩奇、布林邀请黄正穆为法国国庆日（Bastille Day）设计的节日徽标发布之后，由于大受欢迎，谷歌成立了以黄为涂鸦长的涂鸦小组。接下来的几年，不但涂鸦数量增加（现在每年发布 200 多个涂鸦），而且内容也更加丰富，表现形式更加精彩。自第一个涂鸦出现 10 来年之后，谷歌涂鸦作为“一个可以诱惑用户访问一个网站的系统和办法”终于在 2011 年获得专利。

到 2012 年底，谷歌就已经发布了大约 1800 个涂鸦作品。谷歌搜索在许多国家和地区都有各自的本地版本，相应地，

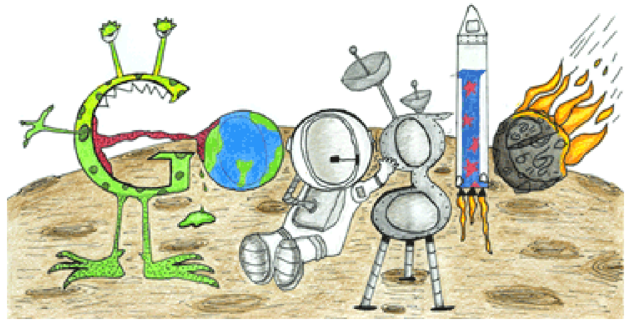


图 16 太空生活（Space Life，2011 年 5 月 20 日，美国）

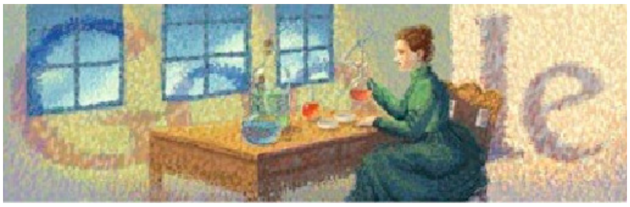
图 17 我的六一（2012 年 6 月 1 日，中国）

涂鸦除了一部分是全球通用的外，还有不少本地化涂鸦。

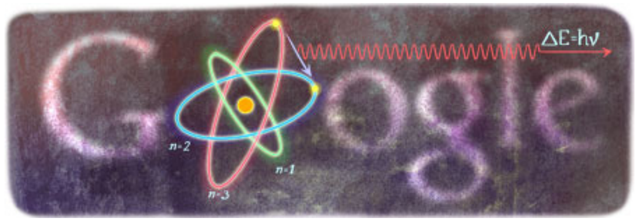
谷歌涂鸦的设计也很开放，其设计小组乐于收到用户的创意。2004 年纪念金星凌日的涂鸦（人们可以在这个涂鸦中看到一个仿佛绕太阳缓缓移动的黑点）就是在一位用户的建议下赶制出来的。这位用户告诉谷歌，金星凌日现象大约 122 年出现一次，不容错过（实际上，2012 年也出现了金星凌日现象，但此现象下次出现确实要等上百年，直到 2117 年）。涂鸦发布后的 6 月 9 日，黄正穆还在谷歌官方博客（http://googleblog.blogspot.de）上特别写了一篇名为“Oodles of doodles”的短文，记载了这一个故事，鼓励人们向他们提出好的主意。

特别，为提升谷歌涂鸦的创新意识，自 2008 年开始谷歌每年组织涂鸦设计比赛——“Doodle 4 Google”（“4”的英文“four”与表示“为了”意义的英文“for”同音）。这是一项面向世界各国中小学生的绘画创意大赛，比赛获奖作品将在该国谷歌搜索首页展示 24 小时。

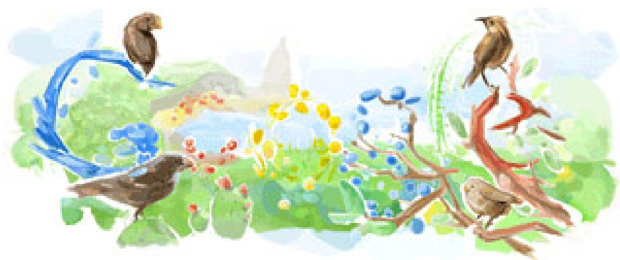
2011 年 5 月 20 日谷歌美国的涂鸦即为 2011 年度美国区“Doodle 4 Google”涂鸦大赛获奖作品，作者为来自南旧金山年仅 7 岁的小朋友 Matteo Lopez。该作品描绘了人们在未来宇航、在月球上行走、与外星人成为好朋友的情景。作者因此而赢得



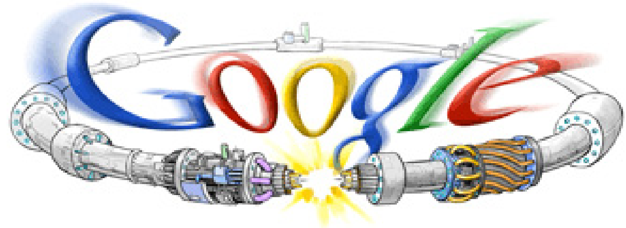
(a) 居里夫人诞辰 144 周年纪念（2011 年 11 月 7 日，全球）



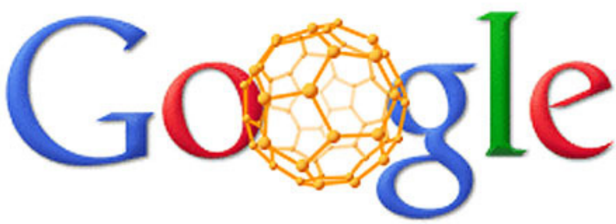
(b) 尼尔斯•玻尔（Niels Bohr）诞辰 127 周年纪念（2012 年 10 月 7 日，全球）



(c) 查尔斯•达尔文（Charles Darwin）诞辰 200 周年纪念（2009 年 2 月 12 日，全球）



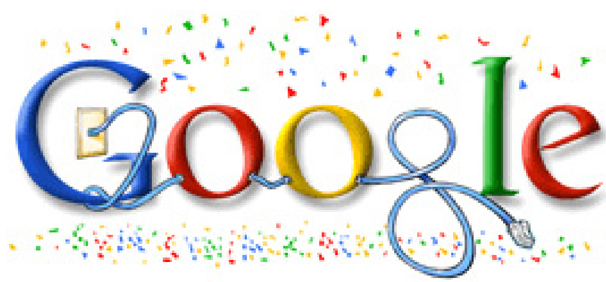
(d) 大型强子对撞器正式开始运作纪念（2008 年 9 月 10 日，全球）



(e) 庆祝巴克球（碳 60）发现 25 周年（2010 年 9 月 4 日，全球）

(f)“血月”月全食（2011 年 6 月 16 日，全球）

(g) 美国宇航局成功发射哈勃太空望远镜 20 周年纪念（2010 年 4 月 24 日，全球）



(h) 新年和 TCP/IP 协议使用 25 周年纪念（2008 年 1 月 1 日，全球）

图 18 谷歌涂鸦中部分科技相关涂鸦

了 15,000 美元奖学金和一个上网本，而他所在的蒙特韦尔德小学(Monte Verde Elementary School)也获得了 25,000 美元奖金。

2012 年谷歌中国“Doodle 4 Google”的比赛主题是“我的六一”，获得金奖的是深圳患有自闭症的 13 岁少年刘冠泽。他的作品中有汽车、孩子、树木、青草地等。就如他所述说，作品表达了“想和学校的伙伴们一起去郊游，或者去动物园看猴子、大象、老虎……。我们是一群残障的孩子，我们也想要和其他孩子一样，出去玩一玩，看看外面的世界！”刘冠泽的作品很有创意地用车窗、车门等来示意“Google”这几个字母，这是他获奖的一个原因。2012 年“六一”儿童节期间，这幅作品在中国的搜索首页显示。

谷歌涂鸦的初衷是为了装饰简单的搜索框，给用户带来不同的体验。现在谷歌涂鸦已经成了谷歌的传统，吸引了众多爱好者。涂鸦不仅有数亿谷歌搜索引擎使用者浏览，也

图 19 2011 年 6 月 19 日百度徽标纪念父亲节

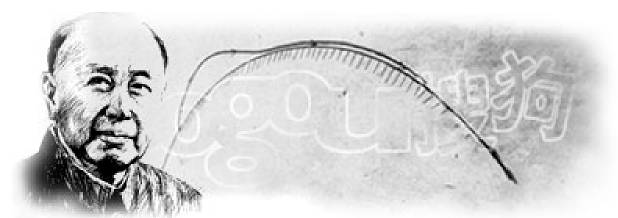


图 20 2011 年 12 月 11 日搜狗徽标纪念中国“航天之父”钱学森诞辰 100 周年（该涂鸦设计类似于谷歌中国在 2009 年 12 月 11 日纪念钱学森诞辰 98 周年的涂鸦）

如同邮票一样因其寓知识于艺术中的独特魅力而吸引着网民的眼球。同时，谷歌涂鸦还比静态的邮票具有如动画、互动游戏等更多的表现手法。如果浏览者不太了解涂鸦的背景，还可以通过点击涂鸦而用谷歌自动搜索相关关键词。谷歌还因势推出徽标商店，出售印有涂鸦作品的水杯、卡片以及 T 恤等物品。

每当一个新的涂鸦发布，总是会引起人们的关注，并且撰文转载分享。人们也常以自己喜欢的人或物能作为谷歌涂鸦的内容出现而激动，一些团体（如女性主义者）甚至列出人物清单，希望得到谷歌涂鸦纪念。谷歌美国在 2009 年以前因从未纪念过美国阵亡将士纪念日还曾引起过争议。当然这也与谷歌的态度有关。

与我们将介绍的众多谷歌数学涂鸦一致的是，谷歌有很多纪念科技事件和科学家的涂鸦。黄正穆说：“我们喜欢把谷歌品牌与发现和科技联系起来，因此我们要纪念詹姆斯 • 沃森（James Watson）博士发现 DNA 结构 50 周年。”谷歌搜索的影响力使得这些涂鸦在无形中成了很好的知识普及方式。

涂鸦上被纪念过的科学家不但有我们将介绍的爱因斯坦、牛顿等，还有如两次获得诺贝尔奖的物理学家和化学家居里夫人、电话的发明人贝尔、俄罗斯博学家罗蒙诺索夫、进化论提出者达尔文、原子结构学说之父和量子力学家玻尔、发明家爱迪生以及航天学家钱学森等。被纪念的科学

图 21 2012 年 5 月 22 日搜狗徽标纪念陈景润诞辰 79 周年

事件有如月全食、大型强子对撞器（Large Hadron Collider, LHC）正式开始运作、DNA 双螺旋链、巴克球（碳 60 球）的发现以及哈勃太空望远镜（Hubble Space Telescope，缩写为 HST）成功发射 20 周年纪念等科技事件。

这些科技涂鸦也都充满趣味。例如随着鼠标的挪动，巴克球会快速旋转。2011 年 6 月 16 日表现月食现象的涂鸦也是动态的，不同地区的用户在打开谷歌首页时即可看到实时的月食进程。2008 年 1 月 1 日的谷歌涂鸦既纪念了 TCP/IP 协议使用 25 周年，同时也用涂鸦画面中的五彩纸屑，隐藏了“SYN SYN/ACK and ACK”以庆祝新年。这些文字在 TCP 协议中表示三次握手（“TCP handshake”），是用来实现虚拟连接的方式。因为篇幅关系，我们这里就不详细介绍这些涂鸦了。

类似于谷歌涂鸦，有道、搜狗、必应、雅虎和百度等搜索引擎也在各自搜索首页放置特殊图片来纪念重要节日或事件。如有不少中文搜索引擎纪念过植树节、清明节、端午节、母亲节、父亲节、儿童节、元宵节等节日以及汶川地震、伦敦奥运等事件。但与谷歌涂鸦相比，毕竟起步晚，影响小，特殊图片的数量也少了许多。虽然我们见到搜狗搜索有纪念钱学森、陈景润的特色徽标，但科学家被纪念的例子还是不多。作为对比，当谷歌纪念图灵时，有道、百度和搜狗等纷纷纪念中国传统佳节端午节；在谷歌纪念华罗庚时，搜狗纪念孙中山诞辰 145 周年。我们无意议论孰轻孰重，但还是期待更多的搜索引擎，特别是中文搜索引擎，可以利用其搜索主页来宣传普及科学知识，这也是搜索引擎提高自身影响力的一种途径，正如谷歌业已证明的。

谷歌对数学的品味，或许和谷歌先天与数学分不开“有关”。不用提谷歌搜索背后的算法主要是数学应用，谷歌的徽标“Google”一词也和数学有联系。原来谷歌最先是想使用“Googol”一词，表示 10 的 100 次幂（方）10^{100}，写出来即为数字 1 后跟 100 个零，显示公司想征服网上无穷无尽资料的雄心。Googol 是美国数学家 Edward Kasner 九岁的侄子 Milton Sirotta 发明的，后来在数学家 Edward Kasner 和 James Newman 的著作 *Mathematics and the Imagination* 中被引用。只是由于误拼而成就了谷歌现在的徽标。

2 爱因斯坦诞辰 124 周年

图 22 爱因斯坦诞辰 124 周年纪念（2003 年 3 月 13 日，全球）

2003 年 3 月 14 日是 20 世纪杰出的理论物理学家阿尔伯特 • 爱因斯坦（Albert Einstein, 1879 年 3 月 14 日 -1955 年 4 月 18 日）诞辰 124 周年。涂鸦中有爱因斯坦经典的头像和著名的质能方程

$$E = mc^2,$$

其中 E 表示能量，m 表示质量，c 表示光速。这个公式来自 1905 年爱因斯坦创立的狭义相对论，揭示了质量与能量的关系，可以用来解释核反应所释放的巨大能量。

1905 年是爱因斯坦“奇迹年”，爱因斯坦不但提出了狭义相对论，以及使得他获得 1926 年度诺贝尔物理学奖的光电效应，还研究了布朗运动。

虽然爱因斯坦不是真正意义上的数学家，但爱因斯坦的工作对随机数学与黎曼几何这两个数学分支的发展有重要的推动作用。

1. 1915 年爱因斯坦创立了广义相对论，用到了黎曼几何和张量分析，使得黎曼几何成了广义相对论的数学基础，引起了人们对黎曼几何的重视。
2. 1905 年爱因斯坦研究了布朗微粒满足的扩散方程，提出了分子热运动规律，说明了布朗微粒在一段时间内的位移是服从正态分布的。布朗运动可以说是现代随机分析学的基石。

3 埃舍尔诞辰 105 周年

图 23 埃舍尔诞辰 105 周年纪念（2003 年 6 月 17 日，全球）

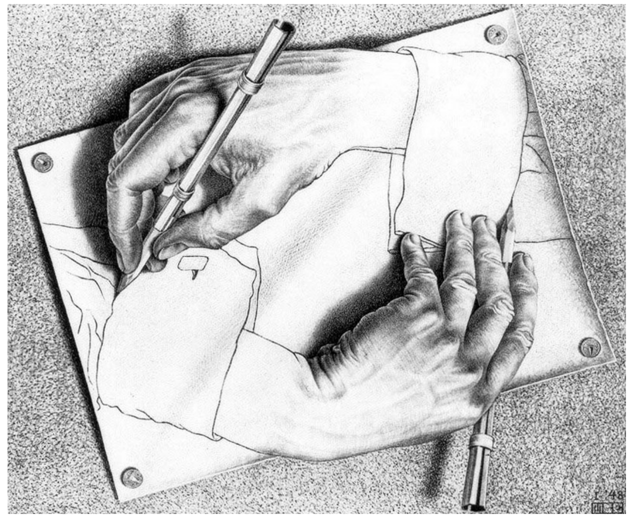


图 24 画手

2003 年 6 月 17 日是荷兰画家莫里茨 • 科内利斯 • 埃舍尔（Maurits Cornelis Escher, 1898-1972）诞辰 105 周年纪念。埃舍尔自称“图形艺术家”，专门从事于木版画和平版画，但他的作品中包含了不少几何图形，表现了分形、对称、不可能物件、密铺平面和多面体等数学内容。谷歌涂鸦使用了他著名的《画手》(*Drawing Hands*)来呈现两个字母“o”。《画手》中有两只都正在执笔画画的手，一只右手正执笔画左手；同时，左手也正执笔描绘右手，亦将结束。

曾获得普利策奖的名著《哥德尔、埃舍尔、巴赫：集异璧之大成》(*Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*) 就引用了埃舍尔的作品，讲述了逻辑学家哥德尔、艺术家埃舍尔和作曲家巴赫如何用不同的方式表达相同的本质。

埃舍尔其它著名的画作有表现非欧几里得几何的《圆极限》，以及表现当时刚刚兴起的拓扑学的《莫比乌斯带》等。《圆极限》明显源自庞加莱的圆盘模型。“天使或魔鬼”生活在看起来有限但实际上无限的世界。它们能感知圆盘中心温度最高，随着与中心距离的增大，温度减小至边缘的绝对零度。《莫比乌斯带》上的蚂蚁则永远爬行在同一面上。

埃舍尔的四位兄长都是科学家，这或许影响了他对数学的兴趣。埃舍尔自己也确实对数学还有一定的研究，与数学家有所交往。埃舍尔曾说：“虽然我绝无精确科学的训练与知识，但我常常看起来与数学家而不是我的艺术同行有更多共同点。”

1954 年在阿姆斯特丹举行的“国际数学家大会”是埃舍尔在数学界出名的重要契机。此前在荷兰之外只有少数数学家注意到埃舍尔。在这次大会期间 N. G. de Bruijin 安排了一个埃舍尔的画展，获得很大成功。特别是著名数学家彭罗斯（Roger Penrose）被埃舍尔的画作《相对论（*Relativity*）》

(a) 圆极限　　　　(b) 莫比乌斯带

图 25 埃舍尔作品中的数学

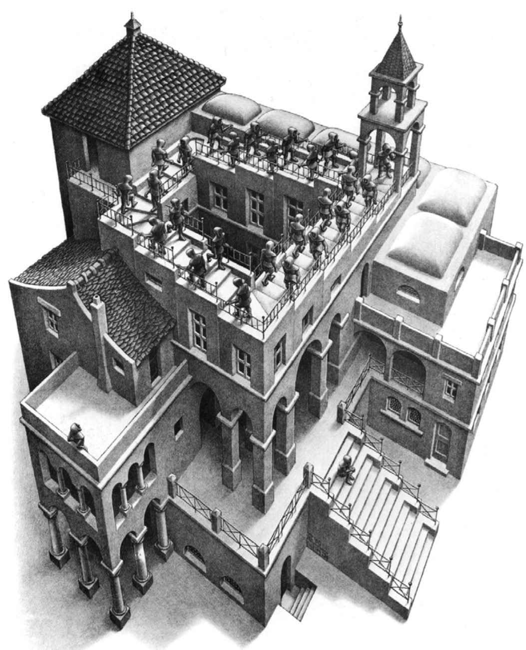
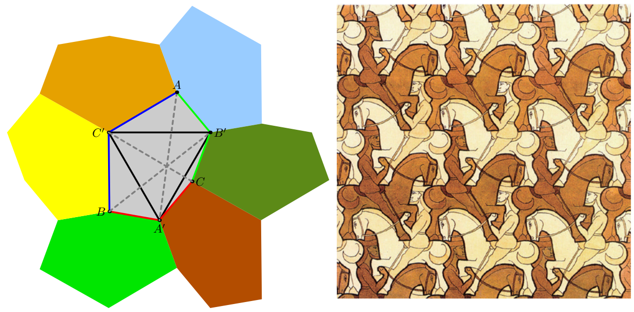


图 26 埃舍尔的作品《上升与下降》

吸引了。回到英国的彭罗斯构造了现在著名的彭罗斯三角形。后来又与其身为著名遗传学家的父亲设计了“无尽的阶梯”。彭罗斯将这些发现寄给埃舍尔，后者用之于著名的画作“瀑布”和“上升与下降”。2010 年有影响的电影《盗梦空间》中有不少数学元素，其中就有彭罗斯 / 埃舍尔的

[3]http://paulbourke.net



(a)　　　　(b)

图 27 （a）埃舍尔定理（b）埃舍尔作品《骑士》中的密铺

阶梯：盗梦小队的成员亚瑟在酒店中，利用了彭罗斯阶梯欺骗一个追逐他的防御者。Cobb 的助手 Arthur 向 Ariadne 演示了一个无限的楼梯。Ariadne 走了 4 段，一直感觉向上，实际上走了一个死圈，这其实便是借鉴了画家埃舍尔著名的旋转楼梯。

埃舍尔的作品中有不少作品（如《骑士》）表现了高超的密铺技巧。在他的笔记本中也出现了可以用于密铺的数学内容，被后人命名为埃舍尔定理：

1. 假设三角形 $A'B'C'$ 为等边三角形，B 为任意一点。设点 C 使得 $A'B = A'C$ 且 $\angle CA'B = 120°$，点 A 使得 $B'A = B'C$ 且 $\angle CB'A = 120°$。则 $C'A = CB$ 且 $\angle AC'B = 120°$。
2. 六边形 $AC'BA'CB'$ 的相同拷贝可以密铺平面。
3. 直线 AA', BB', CC' 共点。

4 朱利亚诞辰 111 周年

图 28 朱利亚诞辰 111 周年（2004 年 2 月 2 日，全球）

2004 年 2 月 2 日谷歌涂鸦纪念法国数学家加斯顿•朱利亚（Gaston Julia, 1893 年 2 月 3 日 -1978 年 3 月 19 日）诞辰 111 周年。这个涂鸦曾经导致一次网络事故。原来该涂鸦链接至了“Julia Fractal（朱利亚分形）”的谷歌图像搜索的结果页面，而结果中排在前面的是澳大利亚斯文伯恩大学 Paul Bourke 的个人主页[3]，因此谷歌发布该涂鸦当天，这个

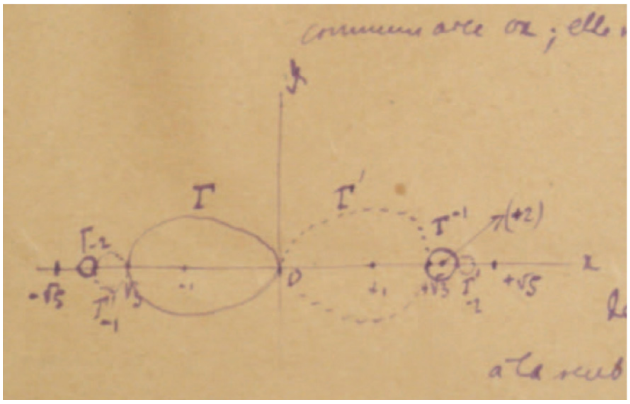


图 29 朱利亚手绘朱利亚集（图片来自 Audin 的书）

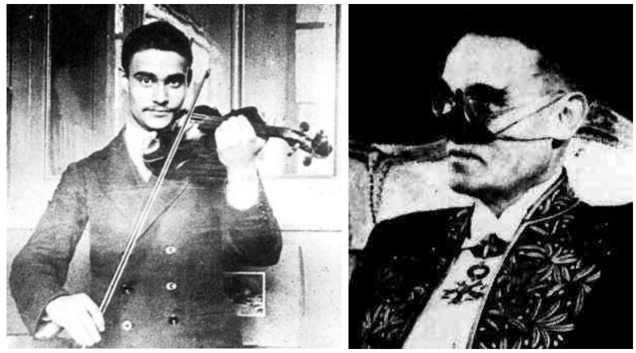
图 30 圣马可教堂及其水中影像

网站瞬间就被从谷歌涌来的流量所挤垮。为了恢复服务器功能，Bourke 无奈删除了被请求的页面，并代之以一个说明页面。但 Slashdot 网站对此事件的报道再次导致了无数网民的注意，Bourke 的网站又一次被摧垮。

这个涂鸦以称为朱利亚集的分形构造了黄色字母 o，同时用芒德勃罗（Mandelbrot）分形等图形来装饰字母 G 和 l。背景中还可以见到构造分形的迭代方程：

$$Z_{n+1}=Z_n^2+C,$$

其中 C 为复常数。根据这个简单的二次迭代，从复平面上任意一个初值 Z_0 出发可以得到序列 $\{Z_n, n\geq 0\}$，该序列称为 Z_0



(a) (b)

图 31 受伤前后的朱利亚

的轨迹。朱利亚集是使得上述迭代序列有界的所有初值的集合。而芒德勃罗集则是使得 0 的轨迹有界的所有复数 C 的集合。

芒德勃罗在他的文章中将 $C=-3/4$ 时的抛物朱利亚集（Parabolic Julia Set）称为巴西利卡（Basilica）或圣马可分形（San Marco Fractal），因其形状类似于水城威尼斯圣马可教堂及其在溢水的广场上的倒影。而 $C=-0.123+0.745i$ 时的朱利亚集则因其形似兔子而常被称为 Douady 兔子分形（Douady's Rabbit Fractal）。

1914 年，第一次世界大战爆发，许多数学家和数学学生也都参与了战争。例如法国著名数学家保罗 • 皮埃尔 • 莱维（Paul Pierre Lévy, 1886-1971）以及埃米尔 • 博雷尔（Émile Borel, 1871-1956）曾在炮兵部队中服役，莫里斯 • 弗雷歇 (Maurice Fréchet, 1878-1973) 则在前线为英军做翻译。受伤甚至献出生命的数学家也很多。以加托导数知名的年轻数学家勒内 • 加托（René Eugène Gateaux, 1889-1914）在 1914 年 10 月 3 日就牺牲了。值得一提的是，敌对方的德国也有数学家参与并做出牺牲。例如著名数学家柯朗曾在一战中应征入伍并负伤。

1914 年的朱利亚年仅 21 岁，刚刚结束在巴黎高等师范学院（Ecole Normale Superieure，简称高师）的学习。在爱国主义的召唤下，朱利亚也参战了。但 1915 年 1 月，作为步兵中尉，他的脸部正中心严重受伤而失去了鼻子，不得不终身戴着皮革面具。朱利亚算是不幸中的万幸，高师有许多人献出了生命。在巴黎高师可以见到一面 1923 年 12 月 9 日落成的战争纪念碑，这是为了纪念高师的众多牺牲者。

受伤后的朱利亚没有停止数学研究。1915 年 12 月 27 日，法国科学院设立了一个奖金为 3000 法郎，截止到 1918 年的大奖赛，奖励函数迭代性质的研究。

法国同时在对函数迭代进行研究的还有天文学家法图（Pierre Fatou, 1878-1929）。学过实分析或测度论的读者都会学习到的法图引理即是以他的名字命名的。但法图没有参

图 32 葛饰北斋诞辰 250 周年（2010 年 10 月 31 日，日本）

与竞争。1918 年，25 岁的朱利亚凭借发表在《纯粹数学与应用数学杂志》上长达 199 页的论文 *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*（《有理函数迭代论》）而轻松获奖。朱利亚的工作虽然引起了很大的轰动，但遗憾的是，拥有众多学生的朱利亚并没有引导任何学生继续这方面的研究。而法图却根本没有学生。德国的豪斯多夫对此也有一些相关的研究，但因为战争带来的仇恨而导致两国数学家的交流终止。此外，计算设备的落后也是一个重要原因。朱利亚曾经手绘过朱利亚集轮廓。直到 1975 年，芒德勃罗在朱利亚的研究基础上，开创分形这一全新的领域，朱利亚的工作才得以受到重视。

朱利亚曾获得过很多荣誉，如五次法国科学院奖励，两次主持法国 Peccot 课程（Peccot Course），1932 年苏黎世国际数学家大会上的特邀报告等。

2011 年法国数学家、数学历史学家 Audin 在斯普林格出版的一本专著 *Fatou, Julia, Montel: The Great Prize of Mathematical Sciences of 1918, and Beyond* 中对这位现代动力系统的先驱有很多介绍。有兴趣的读者可以阅读。

我们以谷歌与分形相关的一些题外话来结束本节。

分形的研究得益于现代计算机的发展，也反过来推动计算机的应用。现在谷歌为了测试新的 HTML5 技术，有一个实验项目使得我们可以通过浏览器得到朱利亚集合[4]。

谷歌涂鸦后来另有一个与分形有联系的涂鸦。谷歌日本在 2010 年 10 月 31 日发布了一个涂鸦用以纪念日本江户时代浮世绘派大师葛饰北斋（1760 年 10 月 31 日－ 1849 年 5 月 10 日）诞辰 250 周年。这个涂鸦所用的背景是北斋的名作《神奈川冲浪里》。

一般认为北斋这幅画里的巨浪具有分形的特征。确实，芒德勃罗在其 1977 年出版的《大自然的分形几何》一书中，曾经给出过由计算机模拟的北斋“巨浪”分形图形。

[4] 即 http://juliamap.googlelabs.com

5 达 • 芬奇诞辰 553 周年

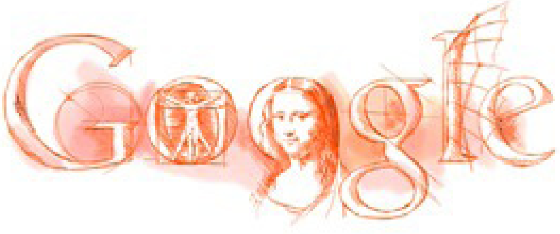


图 33 达 • 芬奇诞辰 553 周年（2005 年 4 月 14 日，意大利）

2005 年 4 月 14 日谷歌意大利涂鸦纪念列奥纳多 • 达 • 芬奇(Leonardo da Vinci, 1452 年 4 月 15 日 -1519 年 5 月 2 日）诞辰 553 周年。

我们对达 • 芬奇并不陌生。我们知道少年达 • 芬奇刻苦画蛋的故事，也知道他的名画《最后的晚餐》以及分别构成第一个、第二个字母 "o" 的《维特鲁威人》（*Vitruvian Man*）以及《蒙娜丽莎》（*Mona Lisa*）。

如同文艺复兴时代中许多人一样，达 • 芬奇是通才。他

图 34 年轻版蒙娜丽莎《艾尔沃斯 • 蒙娜丽莎》（*Isleworth Mona Lisa*）与《蒙娜丽莎》(2013 年 2 月，瑞士“蒙娜丽莎基金会”表示，经过最新几何学及碳测定分析，可提供新证据证明 2012 年 9 月首次曝光的《艾尔沃斯 • 蒙娜丽莎》是达 • 芬奇的真迹，符合他绘画人体的黄金比例）

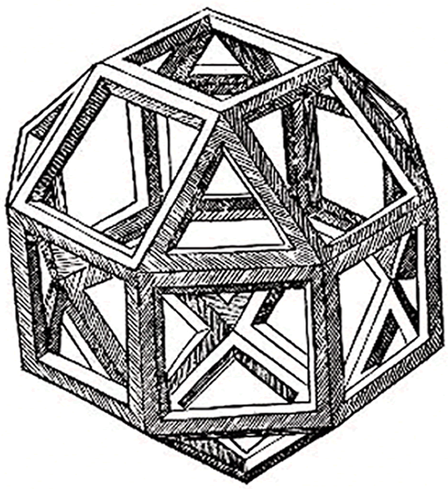


图 35 达·芬奇绘菱方八面体（Rhombicuboctahedron），见于帕乔利的《神圣比例》

图 36 意大利一欧元硬币上的“维特鲁威人”

虽然没发表任何科学论文，但从他长达 7000 多页的手稿中（现存约 5000 多页）中可以看出他对光学、建筑学、解剖学、机械设计、飞行理论等都有很深刻的研究。达·芬奇也常被看做是数学家，而且师出名门——他的朋友兼数学老师为意大利著名数学家帕乔利（Luca Pacioli, 约 1445-1517）。他曾为帕乔利 1509 年出版的《神圣比例》（*Divina Proportione*）一书作插图。

达·芬奇和丢勒是透视画法的杰出代表，这需要他们熟悉几何学。实际上，以他们为代表的透视画法是后来射影几何发展的直接推动力。达·芬奇甚至曾说“欣赏我的作品的人，没有一个不是数学家”。

涂鸦引用的画作《维特鲁威人》和《蒙娜丽莎》中所蕴含的精准比例，也依赖于精确的数学计算。特别是其中人体各部位的黄金分割比例充满魅力，这也是《蒙娜丽莎》特别吸引人的一个原因。而《维特鲁威人》（*Vitruvian Man*）原本就是根据古罗马杰出的建筑家马可·维特鲁威（Marcus Vitruvius Pollio）在他的名著《建筑十书》中对人体比例和黄金分割的赞美而作。这个标准的人体像被广泛使用，例如它就出现在意大利一欧元硬币上，也出现在德国最大的公立健康保险 TK 卡上。

所谓黄金分割比是指

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}:1\approx 0.6180339887\cdots.$$

它在美学上有很多应用。例如五角星中一些线段长度关系符合黄金分割比。笔记本流行的宽屏液晶显示屏长宽比一般为 16:9 或 16:10，近似于所谓的黄金矩形，即其长宽比近似为 1:0.618 的矩形。这样的比例在视觉上使人很舒服。

请让我举一个书法上应用黄金分割的例子。现代已故著名书法家，北京师范大学教授启功的书法精美，遒劲有力。他常常讲述黄金分割在结字，或说字的间架结构方面的应用。

间架结构历来为书家所重。如赵子昂（元代书法家赵

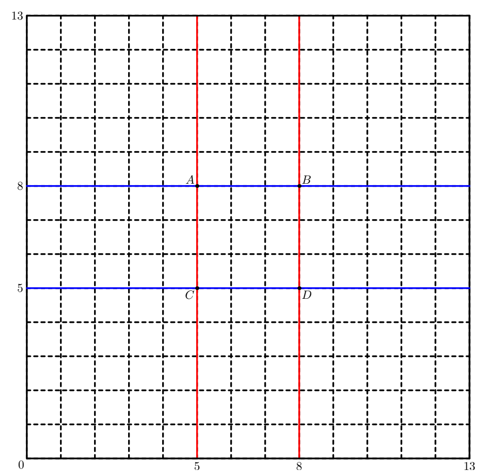


图 37 启功“黄金律”示意图——图中 A, B, C, D 为字之重点

图 38 启功“黄金律”写字实例（摘自启功著《启功丛稿：艺论卷》之“论书随笔”）

孟頫）说“书法以用笔为上，而结字亦须用功”。唐代大书法家欧阳询就总结有楷书间架结构三十六法（后来的黄自元推广为九十二法）。

对于初学者，启功更以“结字所关，尤甚于用笔”来强调结字的重要。启功对结字又引入五八分之“黄金分割之理”[5]：“将一个大方格纵横各画十三小方格，中间三小格纵横成十字路，每行小格为五三五。自左上一交叉点言，其上其左俱为五，其下其右俱为八。此十字路中四交叉点，各为五比八之位置，合乎黄金分割之理焉。”启功认为“字中重点，并不在中心一处”，而这四个符合黄金分割比例的交叉点都可以为重点。这和世俗通行用来辅助书写的九宫格和米字格不同。启功在其《论书绝句》之九九中总结道：

用笔何如结字难，纵横聚散最相关。
一从证得黄金律，顿觉全牛骨隙宽。

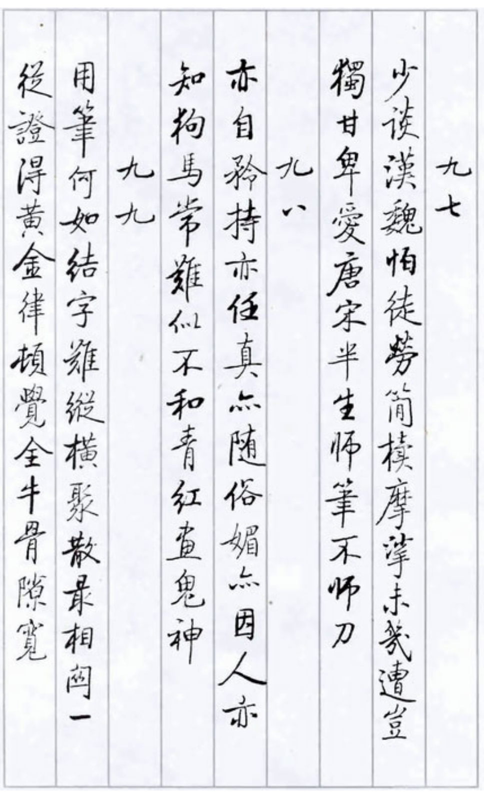

九七
少談漢魏怕徒勞簡牘摩挲未幾遭豈獨甘卑愛唐宋半生師筆不師刀
九八
亦自矜持亦任真亦隨俗媚亦因人亦知狗馬常難似不和青紅畫鬼神
九九
用筆何如結字難縱橫聚散最相關一從證得黃金律頓覺全牛骨隙寬

图 39《论书绝句》之九七至九九

[5] 启功关于结字与黄金律的谈话可以参考中华书局出版启功著的《启功丛稿：艺论卷》（2004）或《启功给你讲书法》（2005）。

[6] http://www.google.com/mars

6 罗威尔诞辰 151 周年

图 40 罗威尔诞辰 151 周年（2006 年 3 月 13 日，全球）

2006 年 3 月 13 日谷歌发布涂鸦纪念美国天文学家帕西瓦尔 • 劳伦斯 • 罗威尔（Percival Lawrence Lowell, 1855 年 3 月 13 日 -1916 年 11 月 12 日）诞辰 151 周年。

涂鸦中有望远镜以及火星、火星人等元素。罗威尔于 1876 年毕业于哈佛大学数学专业。他在读过卡米伊 • 弗拉马利翁（Camille Flammarion）的著作《火星》后对火星产生了极大的兴趣，于是利用个人的财富和影响力在美国亚利桑那州弗来格斯塔夫（Flagstaff, Arizona Territory ）建立了罗威尔天文台，专门研究火星。他绘制了大量火星表面图，提出火星上有外星生物（火星人）的假说。

在这个涂鸦发布当日，谷歌把谷歌地图技术和到当时为止一些最详尽的火星表面资料图整合了起来，发布了谷歌火星[6]。

罗威尔在晚年将他的兴趣转向寻找海王星外的太阳系第九颗行星。在罗威尔死后，天文台继续这项工作，终于在 1930 年找到了冥王星（Pluto）。

7 Unix 时间特殊秒

图 41 Unix 时间特殊秒（2009 年 2 月 14 日，全球）

2009 年 2 月 14 日谷歌搜索主页出现了一个延续仅约半小时的简单涂鸦以纪念 Unix 时间特殊秒。严格来说，这不算涂鸦，在谷歌的涂鸦档案库中没有收藏它。

Unix 时间（Unix epoch, Unix time, POSIX time 或 Unix timestamp）是 UNIX 或类 UNIX 系统使用的时间表示方式。它记录从世界标准时（Coordinated Universal Time，简称 UTC）1970 年 1 月 1 日 0 时 0 分 0 秒起至现在不包括闰秒的总秒数。世界标准时 2009 年 2 月 13 日 23 时 31 分 30 秒（即北京时间 2009 年 2 月 14 日 07 时 31 分 30 秒）的 Unix 时间恰为“1234567890”。这个涂鸦提示，在某个恰当的时间，在 Unix 终端上输入命令“date +%s”可以得到这个特殊表示。

8 惠更斯诞辰 380 周年

图 42 惠更斯诞辰 380 周年纪念（2009 年 4 月 16 日，荷兰）

2009 年 4 月 16 日的谷歌荷兰涂鸦纪念的是荷兰数学家、物理学家、天文学家和钟表学家克里斯蒂安 • 惠更斯(Christiaan Huygens, 1629 年 04 月 14 日 -1695 年 07 月 08 日)诞辰 380 周年。

涂鸦用一个钟表元素纪念他在钟表设计方面的贡献。1583 时，19 岁的伽利略发现了摆的等时性，即摆动所经历的时间独立于摆幅。这为设计摆钟提供了基础。惠更斯分别在 1657 和 1673 年先后发表《摆钟》和《摆式时钟或用于时钟上的摆的运动的几何证明》。著名的单摆周期公式就是由他提出来的。

惠更斯研究过圆、二次曲线、复杂曲线、悬链线等平面曲线。他在数学上最出名的贡献是 1657 年发表的《论赌博中的计算》（*Tractatus de ratiociniis in aleae ludo*）。这是概率论的第一本著作。概率论源于法国数学家帕斯卡与费马对赌博中产生的问题的讨论。在此启发下，惠更斯经研究而写出这本著作。因而惠更斯和帕斯卡、费马被认为是概率论先驱。惠更斯最知名的数学“学生”是莱布尼兹。1672 年惠更斯与莱布尼兹在巴黎相遇，好学的莱布尼兹从惠更斯那里学到了不少数学知识，从此开始了对数学的研究。

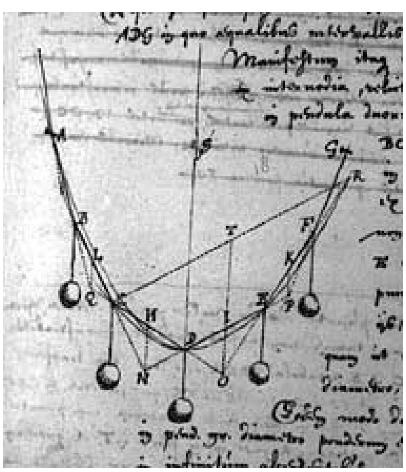


图 43 惠更斯手稿中的悬链线

图 44 惠更斯

惠更斯终身未婚，研究成果丰硕，涉及数学、光学、天文学和力学等众多领域。我第一次在图书馆见到共有 22 卷，摆了两层书架的《惠更斯全集》（*Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*）时，就深切地感受到何谓著作等身。

介绍一件轶事。这个涂鸦的原设计者在其设计的此涂鸦以及一些其它涂鸦中暗藏了一个有特殊含义的三角记号。后来被发现而删除。

9 祖冲之诞辰 1580 周年

图 45 祖冲之诞辰 1580 周年纪念（2009 年 4 月 20 日，中国大陆）

2009 年 4 月 20 日谷歌中国纪念我国杰出的数学家和天文学家祖冲之（429 年 4 月 20 日 -500 年）诞辰 1580 周年。祖冲之是在谷歌涂鸦上出现的第一个中国古代名人，也是迄今仅有的几个中国古代名人之一（另有李白、孔子等的纪念涂鸦）。

这个涂鸦作品用圆周长 C 与直径 d 以及涂鸦下方所附近似等式

$$\pi \approx 355/113$$

揭示祖在圆周率 $\pi = C/d$ 方面的贡献：第一次将圆周率 π 的值精确到小数点后六位，得出 π 介于 3.1415926 到 3.1415927 之间，并且首次提出密率 355/113（他另外提出约率 22/7）。密率值

$$355/113 \approx 3.14159292$$

准确到六位小数，令人惊奇地接近圆周率，而且比欧洲早 1100 年。

理论上，利用刘徽的割圆术，祖冲之是可以得到这个结果。但计算量会很大。现存有关祖冲之的这两项结果的唯一历史记载见于《隋书》（律历上，志第十一，隋书一六）：

“古之九数，圆周率三，圆径率一，其术疏舛。自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷。宋末，南徐州从事史祖冲之，更开密法，以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间。密率，圆径一百一十三，圆周三百五十五。约率，圆径七，周二十二。又设开差幂，开差立，兼以正圆参之。指要精密，算氏之最者也。所著之书，名为《缀术》，学官莫能究其深奥，是故废而不理。”

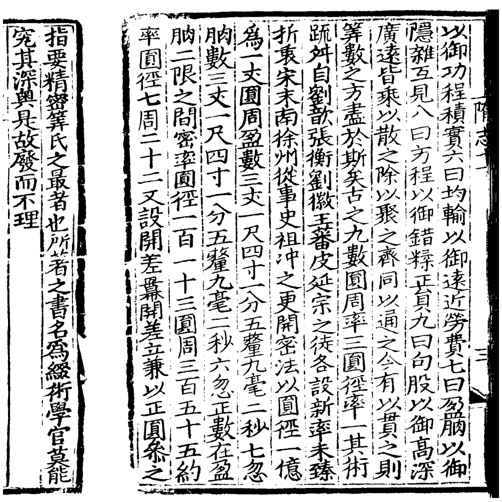

以御功程積實六曰均輸以御遠近勞費七曰盈朒以御
隱雜互見八曰方程以御錯糅正負九曰句股以御高深
廣遠皆乘以散之除以聚之齊同以通之今有以貫之則
筭數之方盡於斯矣古之九數圓周率三圓徑率一其術
疏舛自劉歆張衡劉徽王蕃皮延宗之徒各設新率未臻
折衷宋末南徐州從事史祖冲之更開密法以圓徑一億
為一丈圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽
朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽正數在盈
朒二限之間密率圓徑一百一十三圓周三百五十五約
率圓徑七周二十二又設開差冪開差立兼以正圓參之
指要精密筭氏之最者也所著之書名為綴術學官莫能
究其深奧是故廢而不理

图 46 百衲本二十四史《隋书》中有关祖冲之圆周率的记载

图 47 昆山亭林公园内祖冲之像

密率的计算是一个用有理数最佳逼近实数的问题。祖冲之的密率的特点就在于分母比 113 小的分数中（夏道行在其《π 与 e》中证明分母比 8000 小的分数中），没有比它更接近圆周率的分数的了。华罗庚曾说：“（密率）孕育着不少道理，这道理可以用来推算天文上很多现象，无怪乎祖冲之祖孙三代都是算历的专家。”祖冲之在天文学上的主要成就有：编制《大明历》，第一次将“岁差”引进历法，提出在 391 年中设置 144 个闰月，推算出一回归年的长度为 365.24281481 日，误差只有 50 秒左右。

祖冲之曾出任娄县（现为昆山市）令，为官清正，很受百姓爱戴。2012 年 3 月 14 日，昆山举行了盛大的纪念活动。不但将昆山蓬朗中心小学天文台正式命名为祖冲之天文台，而且昆山将从 2012 年起将每年的 3 月 14 日确定为祖冲之纪念日。

有兴趣的读者可以进一步阅读夏道行著《π 与 e》以及华罗庚著《从祖冲之的圆周率谈起》（可见《华罗庚科普著作选集》）。

10 陈景润诞辰 76 周年

图 48 陈景润诞辰 76 周年纪念（2009 年 5 月 22 日，中国）

2009 年 5 月 22 日谷歌中国的涂鸦很简洁，纪念的是我国著名数学家陈景润（1933 年 5 月 22 日 -1996 年 3 月 19 日）诞辰 76 周年。涂鸦中有方程“1+2”，散落的稿纸，以及厚

图 49 厦门大学海韵园内数学科学学院前的陈景润纪念雕像（笔者摄于 2012 年 10 月 29 日）

图 50 1999 年中国发行纪念陈景润邮票（邮票中央为陈的头像剪影，上方为“陈氏定理”公式，背景为其论文手稿）

厚的一叠文稿及其上的一副眼镜。这自然使人浮想起一位戴着眼睛，埋头执笔孜孜不倦地进行演算的数学家形象来。

陈景润出生于福建福州，从厦门大学数学系毕业后分配到北京四中任教。但他不善讲课，而且体弱多病，患有结核病。在北京一年，住医院六次，做了三次手术。最后陈景润被迫回到家乡摆书摊。厦大校长王亚南听说他的情况后，将其调回厦大当了一名图书馆资料员。

陈景润利用工作之暇，研读华罗庚的著作，在数论方面取得了很好的结果。这引起了与陈景润有过类似经历的华罗庚的重视，从而得以调到科学院工作。

陈景润在 1966 年发表《表达偶数为一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和》。其中的主要结果被称为“陈氏定理”：任何一个足够大的偶数，都可以表示成一个奇素数与不超过两个奇素数的乘积之和。简言之，即“1+2”。

陈景润是中国家喻户晓的“科学英雄”，全民偶像。他也得到了邓小平等的关心。邓小平曾说：“中国要是有一千个陈景润就不得了，对他要爱护、赞扬。”

陈景润的名望一定程度上归功于徐迟于 1978 年发表在《人民文学》的报告文学作品《哥德巴赫猜想》。这篇文章的时代背景是人们对“科学的春天”的强烈渴望，曾激起了很多人投身数学的热情。2007 年出版的《巨人不死的密码》介绍了当代商界名人史玉柱是如何受陈景润的事迹鼓励而在 1980 年上大学时选择浙江大学数学系的。

今日读起徐迟的这篇作品，我们仍能感受到其中的力量：

“他废寝忘食，昼夜不舍，潜心思考，探测精蕴，进行了大量的运算。”

“一张又一张的运算稿纸，像漫天大雪似的飞舞，铺满了大地。数字、符号、引理、公式、逻辑、推理，积在楼板上，有三尺深。忽然化为膝下群山，雪莲万千。他终于登上了攀登顶峰的必由之路，登上了（1+2）的台阶。”

2003 年福建电视台、中央电视台播放了十四集电视连续剧《陈景润》，再次感动了亿万观众。

陈景润的工作在国际上也得到普遍赞扬，美国著名数学家韦伊（André Weil）曾称赞道：“陈景润的每一项工作，都好像是在喜马拉雅山山巅上行走。”虽然陈景润的数学论文对于一般读者是难的，但陈景润写有普及性的书籍，如《数学趣味谈》、《组合数学》与《初等数论》，有兴趣的读者可以阅读。

11 条形码的发明

图 51 条形码发明 57 周年纪念（2009 年 10 月 7 日，全球）

2009 年 10 月 7 日的涂鸦纪念的是条形码发明 57 周年。1952 年的这一天，伯纳德•席尔瓦（Bernard Silver）和诺曼•约瑟夫•伍德兰德（Norman Joseph Woodland）获得该项专利。

条形码是一组宽度不等，按照一定的编码规则平行排列，用来表达一组信息的多个黑白条纹。条形码的下端常常

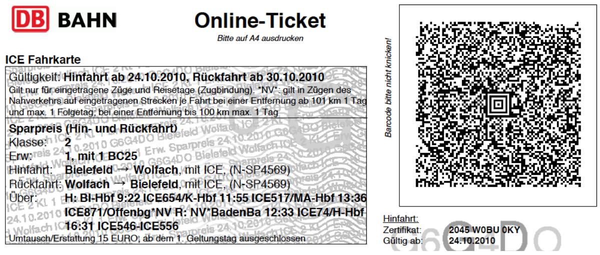


图 52 德国火车票（网络购票，A4 纸打印）上的矩阵式二维条码

图 53 包含网址 http://www.google.com/doodles/ 的 QR 码

又有数字编码。在超市大多数物品的包装、出版物的封底、火车票和机票、某些证件（如图书馆借书卡）上我们都可以看到条形码的身影。这些条形码经过扫描、译码就可以转换成有意义的信息。如在超市购物，结账时通过扫描条形码就可以迅速获取物品的名称、价格等信息。

将信息编成条形码使得计算机更容易识别。但即使这样，也有可能发生识别错误。因此条形码中往往有“冗余码”来检错或纠错，分别叫做检错码（校验码）和纠错码。这些都要用到数学。

例如，我们的身份证号码上的最后一位就是检错码。通过将身份证号码前面的各位做加权求和，所得结果除以 11 得到的余数就按一定规则对应了这个检错码。

纠错码则可以使条形码在传输过程中发生的错误仍能在接收端自行纠正。举个简单的例子，假设我们想传达两个信息，最有效的方法是用“1”和“0”来分别编码。但若发生错误，“1”误为“0”，则无法区分。现增加码元，用“111”

图 54 摩尔斯诞辰 218 周年纪念（2009 年 4 月 27 日，全球）

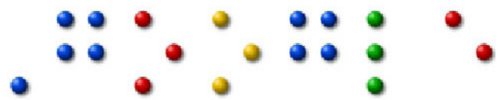


图 55 布莱叶诞辰 197 周年纪念（2006 年的 1 月 4 日，全球）

和“000”来分别编码，假设每个编码中有两位或更多的码元同时发生错误的概率很小（按此假设“111”几乎不会误为“100”），则若收到“100”，我们可以认定原码为“000”，因此我们仍可以将“100”“看作“000”，从而纠正错误。这只是一个玩具模型，对复杂的情况，要获得有效的纠错码，需更多的数学。

目前通行各种各样的编码方式。谷歌的这个涂鸦是用 128 码（Code 128）来编码“Google”。这种编码是一种长度可变、连续性的字母数字条码，可以提供标准 ASCII 中 128 个字元的编码。

在智能手机普及的今天，另外一种应用日益广泛的编码方式是 QR 码[7]。这是一种二维码，广泛用于存储网址、谷歌地图地址等信息。例如，越来越多的报纸、杂志，张贴的海报和通知，甚至有的校园导游指示牌（如厦门大学）等，都印出 QR 码以表示网站信息、地址等内容，读者利用智能手机拍照，用相应的软件解码就可以直接用手机上网购物、使用谷歌地图查找路线了。

有兴趣的读者可以通过网站 on line barcode reader[8] 上传条形码图片而获取条形码的编码方式以及所包含的信息。也可以通过网站 free online barcode generator[9] 选取编码方式对信息进行编码以得到条形码。

谷歌涂鸦此前另有两个与编码有关的涂鸦。

2009 年 4 月 27 日用摩尔斯码编码了“Google”。这是为了纪念美国发明家、摩尔斯电码的创立者萨缪尔 • 摩尔斯（Samuel Morse, 1791 年 4 月 27 日 -1872 年 4 月 2 日）诞辰 218 周年。席尔瓦与伍德兰德的条形码最早是用同心圈来编码，后来在摩尔斯码的启发下而改用不等宽线条。

2006 年的 1 月 4 日，谷歌用布莱叶点字法编码了“Google”这六个字母[10]，这是为了纪念法国发明世界通用

---

[7] QR 是英文中快速反应（Quick Response）码的缩写
[8] http://www.onlinebarcodereader.com
[9] http://www.morovia.com/free-online-barcode-generator
[10] 这里使用的是常见的六点制盲文，每个盲符由 2 行 3 列呈长方形排列的六个位置组成，每个位置或凸或不凸。这里 Google = ，其中 G = （大写盲符加表示 g 的盲符），o = ，l = ，e = ）。

盲人及视觉障碍者使用的文字系统——布莱叶点字法的路易•布莱叶（Louis Braille, 1809 年 1 月 4 日 -1852 年 1 月 6 日）诞辰 197 周年。

这个涂鸦上线后，加拿大的一家致力于帮助视力障碍者的非营利机构写信给谷歌，说因为这个涂鸦，他们的网站访问量增长了十倍。这也是小涂鸦产生大影响的另一个例子。

12 牛顿诞辰 367 周年

图 66 牛顿诞辰 367 周年（2010 年 1 月 4 日，全球）

2010 年 1 月 4 日谷歌涂鸦纪念英国数学家、物理学家艾萨克•牛顿爵士（Sir Isaac Newton, 1643 年 1 月 4 日 -1727 年 3 月 31 日）诞辰 367 周年。这是一个动态涂鸦，挂着苹果的树枝有一个苹果会从页面中间落下，且在地上弹了多下直至静止。

牛顿在 1687 年发表《自然哲学的数学原理》，提出了万有引力定律和三大运动定律。万有引力定律指出任何物体之间都有相互吸引力，这个力的大小与各个物体的质量成正比例，而与它们之间距离的平方成反比。从此出发就可以解释开普勒行星运动定律等天体运动规律以及地面上物体的运动规律。

牛顿的万有引力定律可以解释苹果为什么会掉下来，而不是向上飞到月球。能否将树上的苹果类比到遥远的月球，其实是需要思考和计算的。

传说牛顿是受到苹果落地的启发而偶然发现万有引力的。因为这个故事，剑桥大学种植的牛顿苹果树的后代成了一个著名的景点。在英国发行的众多纪念牛顿的邮票中也有很多以苹果为元素。例如，英国邮政于 1987 年 3 月 24 日发行了四张纪念《自然哲学的数学原理》出版 300 周年纪念邮票，其中之一的背景为苹果。

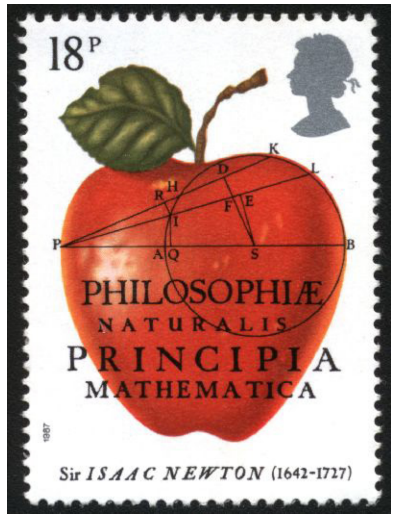


图 67《自然哲学的数学原理》出版 300 周年纪念邮票

牛顿在物理学上的贡献推动了科学革命。贯穿《自然哲学的数学原理》一书的数学方法——现在称为微积分的“流数”——也是牛顿（与莱布尼兹共享）的伟大贡献。其要点是将前人已有很多研究的切线问题与求积问题联系在一起，这两个问题分别是微分学和积分学的中心问题。

牛顿在其它许多方面也有很深刻的研究，例如他发明了反射式望远镜，研究光学，发展了颜色理论，证明了广义二项式定理等。

13 圆周率日

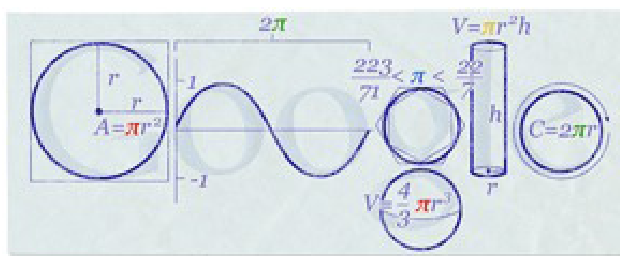


图 56 圆周率日纪念（2010 年 3 月 14 日，加拿大、德国、意大利、日本、美国、韩国和中国等近 60 个国家和地区）

每年的 3 月 14 日是数学爱好者的节日——圆周率日（π 日），因为 3.14 是 π 的前几位数字。2010 年 3 月 14 日这个圆周率日纪念涂鸦列出了与 π 相关的圆面积以及周长的计算公式、正弦函数图像（周期为 2π）、球体和圆柱体体积计算公式以及阿基米德提出来的圆周率上下界（分别为 22/7 和 223/71）等。

圆周率从来都吸引着人们的兴趣，用一个节日来庆祝

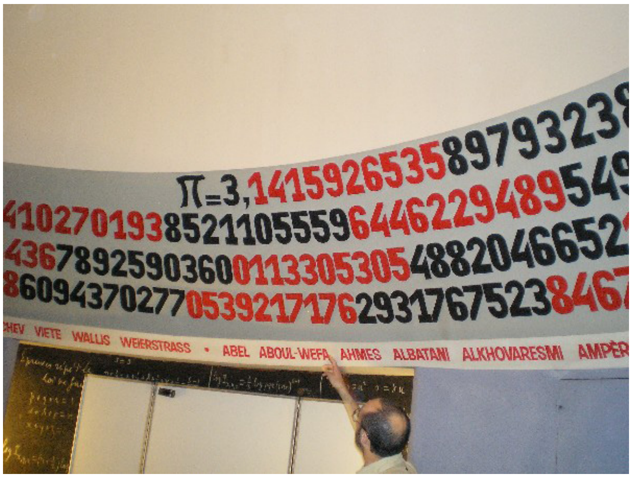


图 57 巴黎探索皇宫圆周率室

就已凸显了 π 这一常数的地位。常见有人以背诵圆周率来表演记忆力。最近发生的一件事也可以见得公众对圆周率的兴趣。美国人口普查局于 2012 年 8 月 14 日公布，美国人口已经达到 314159265 人，这是圆周率前面有限位的一亿倍。该局呼吁 :“这是千载难逢的大事件，让我们一起欢呼庆祝这一天吧！”

圆周率的计算则是严肃的数学问题。巴黎探索皇宫有个圆周率室，上方有 707 位用木质数字组成的圆周率，这是英国数学家 William Shanks（1812-1882）发现的（不过只有前 527 位正确）。这个圆周率甚至还曾在 1937 年巴黎世博会主题展馆科学发现展馆展出。在纸和笔的时代，这是一个伟大的发现。在随后的计算机时代，圆周率的计算显得轻而易举了。1999 年，Kanada, Takahashi 利用计算机将圆周率计算到了 206158430000 位。

但即使是用计算机计算，好的算法也很重要。最早的算法是阿基米德的正多边形逼近算法。祖冲之的算法已经失传。微积分的发展为圆周率的计算提供了更多方法。最早的计算公式是英国数学家瓦利斯（Wallis, 1616-1703）的公式

$$\frac{2}{\pi}=\frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdots}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots}.$$

另一个著名的公式是莱布尼兹 - 格里高利（Leibniz, 1646-1716 ; James Gregory,1638-1675）利用反正切函数得到的级数表示公式 :

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

利用级数可以得到许多以反正切函数来表示 π 的公式。一个很流行的公式是 1706 年由 John Machin 所发现的用两个反正切函数的公式

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}.$$

这也不难用级数展开来证明。另外，印度天才数学家拉马努金于 1914 年也提出的另一个用级数来表示的高效算法。20 世纪 70 年代有人发现了利用几何 - 算法平均进行迭代的非常好的算法，但事实上 200 年前高斯就已经发现了此算法。

为什么圆周率这样重要？除了前述计算体积、面积等明显涉及圆周率的例子，圆周率还在数学其他地方自然出现。

物理学家维格纳（Eugene Paul Wigner, 1902-1995）在他著名的文章“数学在自然科学中不合理的有效性”中开始就讲了个故事。两位曾经的同班同学开始介绍各自的工作。一位是统计学家，研究人口趋势。他给朋友看了最近的文章，文章开篇即是高斯分布。朋友很不解，指着高斯分布 [11] 中的 π 问道，

“这是什么？”

“这是圆周长与其直径之比。”

“你太会开玩笑了，人口怎么会和圆的周长有关系呢？”

我们知道高斯分布可以用来解释很多自然规律。如上述故事所示，π 有不合理的有效性。实际上我们可以找出许多有关 π 的不可思议的公式来。其中最令人着迷的或许是欧拉公式

$$e^{i\pi}+1=0.$$

因为它联系了数学中五个最重要的常数。

但还有很多与圆周率有关的问题没有答案，等待我们去发现。例如，在 π 的展开系列中，数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 是否出现无穷多次？某处是否会连续出现 1000 个连续的数字 0 ？每个数字出现的频率是否相同？某等长的数字串出现的频率是否相同？

14 阿尔夫诞辰 100 周年

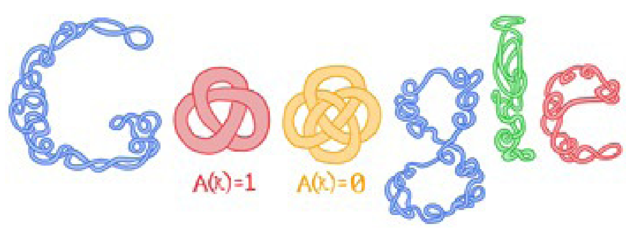


图 58 阿尔夫诞辰 100 周年（2010 年 10 月 11 日，土耳其）

[11] 一维标准高斯分布密度函数形如：$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$。

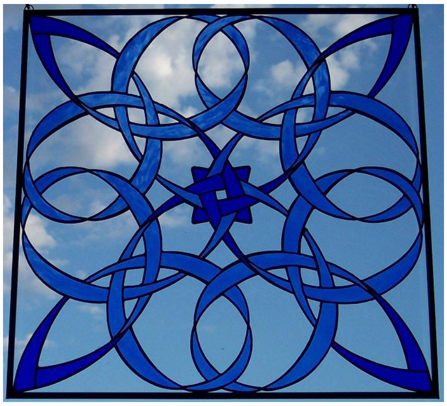


图 59 凯尔特结修饰的窗花

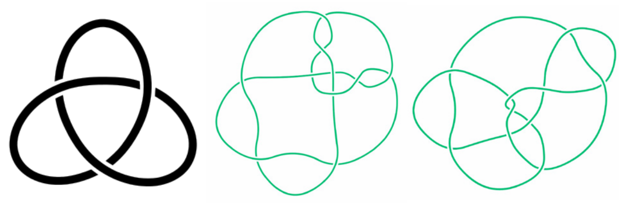
图 60 圣帕特里克节纪念（2010 年 3 月 17 日，加拿大、英国、澳大利亚、丹麦、法国、美国、爱尔兰、新西兰）

图 61 圣帕特里克节纪念（2012 年 3 月 17 日，加拿大、英国、澳大利亚、丹麦、美国、爱尔兰、新西兰、阿根廷）

2010 年 10 月 11 日是土耳其著名数学家卡西特 • 阿尔夫（Cahit Arf, 1910 年 10 月 11 日 -1997 年 11 月 26 日）诞辰 100 周年，当日谷歌土耳其推出了纪念涂鸦。阿尔夫的主要工作在代数数论方面，他发现的阿尔夫不变量（Arf Invariant）在拓扑学中有很多应用。

该涂鸦以凯尔特结（Celtic Knot）作为元素，而代表两个字母“o”的纽结下方的公式正是这两个纽结的阿尔夫不变量。

凯尔特结是凯尔特文化中最著名的传统艺术之一，和中国结有些类似，常用于各种装饰。凯尔特结还与宗教仪式相关，现今还留存有凯尔特结装饰的石制十字架。



(a) (b) (c)

图 62 (a) 右手三叶结(谷歌纪念阿尔夫涂鸦中表示的第一个字母“o”的结为左手三叶结)；(b) 和 (c) 为 Perko 对

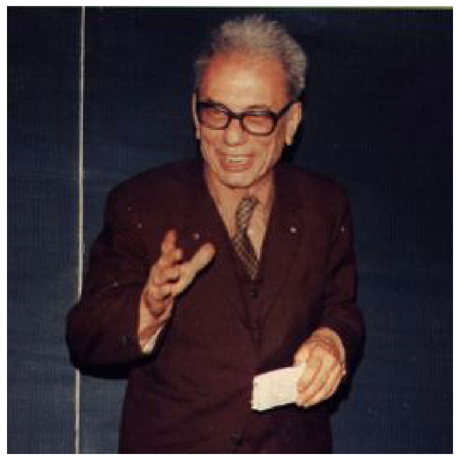


图 63 阿尔夫

谷歌还有其它两个含有凯尔特结的涂鸦。这是为了纪念圣帕特里克节（Saint Patrick's Day）。圣帕特里克节是有凯尔特人血统的爱尔兰人在每年的 3 月 17 日为了纪念 493 年的这一天逝世的爱尔兰主保圣人——圣帕特里克主教——而举行的盛大节日。谷歌发表了很多这个节日的纪念涂鸦，但大多都用三叶草做装饰。2010 年的圣帕特里克节纪念涂鸦全用的是凯尔特结；另外，2012 年的纪念涂鸦则以《凯尔经》（*Book of Kells*）为装饰，放大其中细节也可以看到凯尔特结。《凯尔经》是一本装饰华丽的圣经福音手抄本，其中用充满了基督教象征的人类、动物、神兽、凯尔特结等元素来装饰。这本书是爱尔兰最珍贵的国宝。

纽结理论是代数拓扑的一个分支，研究如何把若干个圆环嵌入三维实欧氏空间中。纽结理论已经在统计力学以及分子生物学如 DNA 研究等领域获得了应用。

如果一个纽结可以在不剪断、不粘连的情况下变化为另一个纽结，我们就说这两个纽结是相同的。例如，有重要应用的三叶结就分为左手三叶结和右手三叶结两种情形，在不剪断绳子的前提下不能把左手三叶结变到右手三叶结。

如何将各种纽结进行分类正是纽结理论中最核心然而也很困难的问题。例如，著名的 Perko 对，其实是相同的，

但曾被数学家误认为不同而长时间列在纽结表中。不变量方法是研究纽结分类的重要方法。所谓不变量，就是纽结在连续变化时保持不变的某种性质。两个纽结的某个不变量如果不相同，那么它们就不是相同的纽结。纽结理论中有各种不变量，有时互为补充。例如，纪念阿尔夫的这个涂鸦中，表示两个字母“o”的纽结的阿尔夫不变量分别为 1 和 0，因此这两个纽结是不同的。但纽结的阿尔夫不变量总是取值为 0 或 1，显然不能区分所有纽结。左手三叶结和右手三叶结这两个不同的纽结的阿尔夫不变量就都是 1。然而，利用琼斯多项式，就可以区分这两个纽结（左右手三叶结的琼斯多项式分别为 $t^{-1}+t^{-3}-t^{-4}$ 和 $t+t^3-t^4$。）。

1923 年土耳其共和国在凯末尔的领导下建国时，阿尔夫还是一位年少的中学生。他的成长和中国老一辈数学家的经历有些相似，年轻时在法国、德国等数学强国学习，回到土耳其又积极发挥自己的影响力。

1926 年，阿尔夫的父亲通过购买贬值的法郎送阿尔夫到法国学习数学。因为数学成绩突出，两年中阿尔夫学完了别人三年的课程。但阿尔夫的父亲得不到更多法郎，只好要他返回土耳其。之后阿尔夫赢得奖学金，得以继续到法国学习，阿尔夫从巴黎高师毕业后返回土耳其任教。1937 年，他到哥廷根学习，一年后在那里取得博士学位。

阿尔夫是土耳其科技研究委员会的初创人，并长期担任该委员会的部长。阿尔夫对土耳其数学家的培养也有着很大的贡献。虽然他自己没有多少学生，但不少人都与阿尔夫有过讨论，受到过阿尔夫的鼓励。

阿尔夫也出现在面值为 10 里拉的土耳其新里拉纸币上。本文介绍的牛顿和惠更斯等也在其祖国的纸币上出现过。我将另文详述纸币上的数学家，这里暂且不表。

15 孟德尔诞辰 189 周年

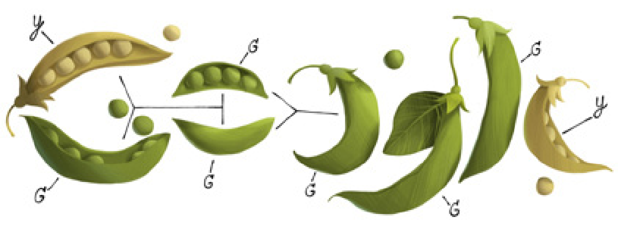


图 64 孟德尔诞辰 189 年周年（2011 年 7 月 20 日，全球）

孟德尔（Gregor Johann Mendel, 1822 年 7 月 20 日 -1884 年 1 月 6 日）是奥地利天主教圣职人员，遗传学家，被称为“现代遗传学之父”。2011 年 7 月 20 日谷歌涂鸦纪念孟德尔诞辰 189 周年。

图 65 孟德尔

涂鸦中的豌豆，指的是他约从 1856 年到 1863 年进行了 8 年的豌豆杂交实验。孟德尔通过统计豌豆的各种性状，如豌豆的茎的高度，豌豆种子的形状、颜色以及豌豆豆荚的形状和颜色等，发现豌豆的性状由遗传因子（基因）来控制的，具有显性性状、隐性性状的差别，而且表现性状由显性基因控制。后人将他总结的规律称为孟德尔遗传定律。

涂鸦中豆荚的颜色就是孟德尔研究过的豌豆性状。涂鸦中有 6 个绿色（G：Green）2 个黄色（Y：Yellow）的豆荚，比例为 3:1。实际上孟德尔的豌豆实验中，有 428 个绿色豆荚，152 个黄色豆荚，比例约为 2.82:1，接近 3:1。

孟德尔是应用统计学进行研究的先驱。但也正是统计学，导致了英国著名遗传学家和统计学家费歇对孟德尔这位在修道院中从事科学研究的“民科”的质疑。1936 年，费歇发表了一篇著名的论文《孟德尔的工作是否已被重新发现？》。文中他根据孟德尔论文中的实验数据，用 x^2 检验，发现孟德尔的数据太好而令人起疑。

遗传学中用到了很多数学。著名的群体遗传学定律“哈代 - 温伯格定律”提出者就有著名数学家哈代。

德国比勒费尔德和知屋
2013 年 2 月 10 日

正态分布的前世今生(上)

靳志辉

神说，要有正态分布，就有了正态分布。
神看正态分布是好的，就让随机误差服从了正态分布。
创世纪——数理统计

一、正态分布——熟悉的陌生人

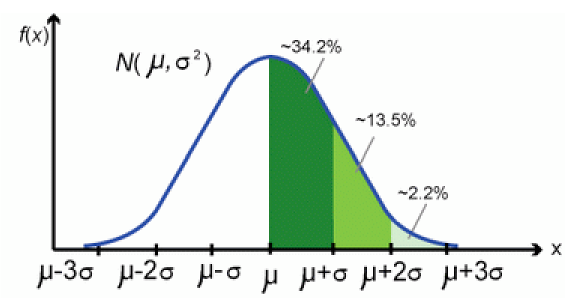
学过基础统计学的同学大都对正态分布非常熟悉。这个钟形的分布曲线不但形状优雅，其密度函数写成数学表达式

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

也非常具有数学的美感。其标准化后的概率密度函数

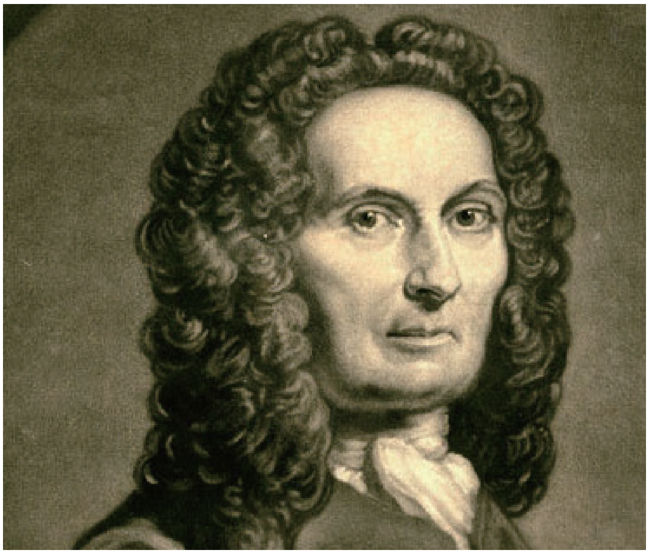
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

更加的简洁漂亮，两个最重要的数学常量 π, e 都出现在这公式之中。在我个人的审美之中，它也属于 top-N 的最美丽的数学公式之一，如果有人问我数理统计领域哪个公式最能让人感觉到上帝的存在，那我一定投正态分布的票。因为这个分布戴着神秘的面纱，在自然界中无处不在，让你在纷繁芜杂的数据背后看到隐隐的秩序。



正态分布曲线

正态分布又通常被称为高斯分布，在科学领域，冠名权那是一个很高的荣誉。2002 年以前去过德国的兄弟们还会发现，德国 1991 年至 2001 年间发行的的一款 10 马克的纸币上印着高斯（Carl Friedrich Gauss, 1777-1855）的头像和正态密度曲线，而 1977 年东德发行的 20 马克的可流通纪



棣莫弗（1667-1754）

拉普拉斯（1749-1827）

念钢镚上，也印着正态分布曲线和高斯的名字。正态分布被冠名高斯分布，我们也容易认为是高斯发现了正态分布，其实不然，不过高斯对于正态分布的历史地位的确立是起到了决定性的作用。

正态曲线虽然看上去很美，却不是一拍脑袋就能想到的。我们在本科学习数理统计的时候，课本一上来介绍正态分布就给出密度分布函数，却从来不说明这个分布函数是通过什么原理推导出来的。所以我一直搞不明白数学家当年是怎么找到这个概率分布曲线的，又是怎么发现随机误差服从这个奇妙的分布的。我们在实践中大量地使用正态分布，却对这个分布的来龙去脉知之甚少，正态分布真是让人感觉既熟悉又陌生。直到我读研究生的时候，我的导师给我介绍了陈希孺院士的《数理统计学简史》这本书，看了之后才了解到正态分布曲线从发现到被人们重视进而广泛应用，也是经过了几百年的历史。

正态分布的这段历史是很精彩的，我们通过讲一系列的故事来揭开她的神秘面纱。

二、邂逅——正态曲线的首次发现

第一个故事和概率论的发展密切相关，主角是棣莫弗（(Abraham de Moivre, 1667-1754）和拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace, 1749-1827）。拉普拉斯是个大科学家，被称为法国的牛顿；棣莫弗名气可能不算很大，不过大家应该都熟悉这个名字，因为我们在高中数学学复数的时候都学过棣莫弗公式 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$。

古典概率论发源于赌博，惠更斯（Christiaan Huygens, 1629-1695）、帕斯卡 (Blaise Pascal, 1623-1662)、费马（Pierre de Fermat, 1601-1665）、雅可比 • 贝努利（Jacob Bernoulli, 1654-1705）都是古典概率的奠基人，他们那会儿研究的概率问题大都来自赌桌上，最早的概率论问题是赌徒梅累在1654年向帕斯卡提出的如何分赌金的问题。统计学中的总体均值之所以被称为期望（Expectation），就是源自惠更斯、帕斯卡这些人研究平均情况下一个赌徒在赌桌上可以期望自己赢得多少钱。

有一天一个哥们，也许是个赌徒，向棣莫弗提了一个和赌博相关的问题：A、B 两人在赌场里赌博，A、B 各自的获胜概率是 $p, q=1-p$，赌 n 局，两人约定：若 A 赢的局数 $X>np$，则 A 付给赌场 $X-np$ 元，若 $X<np$，则 B 付给赌场 $np-X$ 元。问赌场挣钱的期望值是多少？

问题并不复杂，本质上是一个二项分布，若 np 为整数，棣莫弗求出最后的理论结果是

$$2npqb(n,p,np).$$

其中

$$b(n,p,i)=\binom{n}{i}p^iq^{n-i}$$

是常见的二项概率。但是对具体的 n，因为其中的二项公式中有组合数，要把这个理论结果实际计算出数值结果可不是件容易的事，这就驱动棣莫弗寻找近似计算的方法。

与此相关联的另一个问题，是遵从二项分布的随机变量 $X\sim B(n,p)$，求 X 落在二项分布中心点一定范围的概率 $P_d=P(|X-np|\le d)$。

对于 $p=1/2$ 的情形，棣莫弗做了一些计算并得到了一些近似结果，但是还不够漂亮，幸运的是棣莫弗和斯特林（James Stirling, 1692-1770）处在同一个时代，而且二人之间有联系，斯特林公式是在数学分析中必学的一个重要公式：

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

事实上斯特林公式的形式其实是棣莫弗最先发现的，但是斯特林改进了这个公式，改进的结果为棣莫弗所用。1733 年，棣莫弗很快利用斯特林公式进行计算并取得了重要的进展。考虑 n 是偶数的情形，二项概率为

$$b(n,\frac{1}{2},i)=\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

以下把 $b(n,\frac{1}{2},i)$ 简记为 $b(i)$，通过斯特林公式做一些简单的计算容易得到

$$b\left(\frac{n}{2}\right)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi n}},\qquad \frac{b(\frac{n}{2}+d)}{b(\frac{n}{2})}\approx e^{-\frac{2d^2}{n}}.$$

于是有

$$b\left(\frac{n}{2}+d\right)\approx\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{2d^2}{n}}.$$

使用上式的结果，并在二项概率累加求和的过程中近似地使用定积分代替求和，很容易就能得到

$$\begin{aligned}P\left(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{2}\right|\le\frac{c}{\sqrt{n}}\right)&=\sum_{-c\sqrt{n}\le i\le c\sqrt{n}}b\left(\frac{n}{2}+i\right)\\&\approx\sum_{-c\sqrt{n}\le i\le c\sqrt{n}}\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{2i^2}{n}}\\&=\sum_{-2c\sqrt{n}\le\frac{2i}{\sqrt{n}}\le 2c}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2i}{\sqrt{n}}\right)^2}\frac{2}{\sqrt{n}}\qquad(1)\\&\approx\int_{-2c}^{2c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx\end{aligned}$$

看，正态分布的密度函数的形式在积分公式中出现了！这也就是我们在数理统计课本上学到的一个重要结论：二项分布的极限分布是正态分布。

以上只是讨论了 $p=1/2$ 的情形，棣莫弗也对 $p\neq 1/2$ 做了一些计算，后来拉普拉斯对 $p\neq 1/2$ 的情况做了更多的分析，并把二项分布的正态近似推广到了任意 p 的情况。这是第一次正态密度函数被数学家刻画出来，而且是以二项分布的极限分布的形式被推导出来的。熟悉基础概率统计的同学们都知道这个结果其实叫棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理。

[棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理] 设随机变量 $X_n(n=1,2,\cdots\cdots)$ 服从参数为 n 和 p 的二项分布，则对任意的 x，恒有

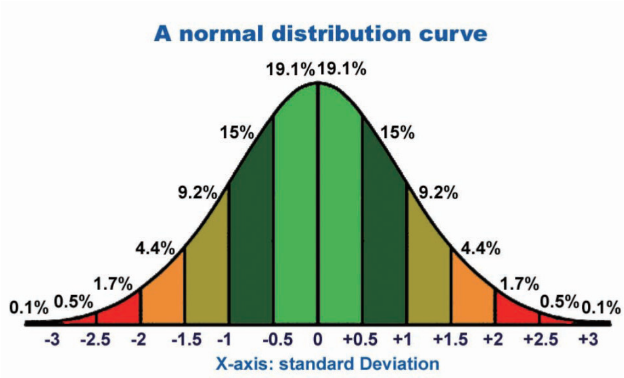
陈希孺编著的《数理统计学简史》

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-t^2}{2}}dt.$$

我们在大学学习数理统计的时候，学习的过程都是先学习正态分布，然后才学习中心极限定理。而学习到正态分布的时候，直接就描述了其概率密度的数学形式，虽然数学上很漂亮，但是容易困惑数学家们是如何凭空就找到这个分布的。读了陈希孺的《数理统计学简史》之后，我才明白正态分布的密度形式首次发现是在棣莫弗-拉普拉斯的中心极限定理中。数学家研究数学问题的进程很少是按照我们数学课本的安排顺序推进的，现代的数学课本都是按照数学内在的逻辑进行组织编排的，虽然逻辑结构上严谨优美，却把数学问题研究的历史痕迹抹得一干二净。DNA双螺旋结构的发现者之一詹姆斯•沃森（James D. Watson, 1928-）在他的名著《DNA双螺旋》序言中说：“Science seldom proceeds in the straightforward logical manner imagined by outsiders.（科学的发现很少会像门外汉所想象的那样按照直接了当合乎逻辑的方式进行。）”

棣莫弗给出他的发现后 40 年（大约是 1770 年），拉普拉斯建立了中心极限定理较一般的形式，中心极限定理随后又被其他数学家们推广到了其他任意分布的情形，而不限于二项分布。后续的统计学家发现，一系列的重要统计量，在样本量 N 趋于无穷的时候，其极限分布都有正态的形式，这构成了数理统计学中大样本理论的基础。

棣莫弗在二项分布的计算中瞥见了正态曲线的模样，不过他并没有能展现这个曲线的美妙之处。棣莫弗的这个工作



最小二乘法的一个例子

当时并没有引起人们足够的重视，原因在于棣莫弗不是个统计学家，从未从统计学的角度去考虑其工作的意义。正态分布（当时也没有被命名为正态分布）在当时也只是以极限分布的形式出现，并没有在统计学，尤其是误差分析中发挥作用。这也就是正态分布最终没有被冠名棣莫弗分布的重要原因。那高斯做了啥了不起的工作导致统计学家把正态分布的这项桂冠戴在了他的头上呢？这先得从最小二乘法的发展说起。

三、最小二乘法——数据分析的瑞士军刀

第二个故事的主角是欧拉（Leonhard Euler, 1707-1783）、拉普拉斯、勒让德（Adrien-Marie Legendre, 1752-1833）和高斯，故事发生的时间是十八世纪中到十九世纪初。十七、十八世纪是科学发展的黄金年代，微积分的发展和牛顿万有引力定律的建立，直接地推动了天文学和测地学的迅猛发展。当时的大科学家们都在考虑许多天文学上的问题。几个典型的问题如下：

* 土星和木星是太阳系中的大行星，由于相互吸引对各自的运动轨道产生了影响，许多大数学家，包括欧拉和拉普拉斯都基于长期积累的天文观测数据计算土星和木星的运行轨道。
* 勒让德承担了一个政府给的重要任务，测量通过巴黎的子午线的长度。
* 海上航行经纬度的定位。主要是通过对恒星和月面上的一些定点的观测来确定经纬度。

这些天文学和测地学的问题，无不涉及到数据的多次测量、分析与计算；十七、十八世纪的天文观测，也积累了大量的数据需要进行分析和计算。很多年以前，学者们就已经经验性地认为，对于有误差的测量数据，多次测量取算术平均是比较好的处理方法。虽然缺乏理论上的论证，也不断

勒让德（1752-1833）

地受到一些人的质疑，取算术平均作为一种异常直观的方式，已经被使用了千百年，在多年积累的数据的处理经验中也得到相当程度的验证，被认为是一种良好的数据处理方法。

以上涉及的问题，我们直接关心的目标量往往无法直接观测，但是一些相关的量是可以观测到的，而通过建立数学模型，最终可以解出我们关心的量。这些问题都可以用如下数学模型描述：我们想估计的量是 $\beta_0, \cdots, \beta_p$，另有若干个可以测量的量 $x_1, \cdots, x_p, y$，这些量之间有线性关系

$$y = \beta_0+\beta_1 x_1+\cdots+\beta_p x_p,$$

如何通过多组观测数据求解出参数 $\beta_0, \cdots, \beta_p$ 呢？欧拉和拉普拉斯采用的都是求解线性方程组。

$$\begin{cases} y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \cdots + \beta_p x_{p1} \\ y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_{12} + \cdots + \beta_p x_{p2} \\ \vdots \\ y_n = \beta_0 + \beta_1 x_{1n} + \cdots + \beta_p x_{pn} \end{cases} \tag{2}$$

但是面临的一个问题是，有 n 组观测数据，p+1 个变量，如果 $n>p+1$，则得到的线性矛盾方程组无法直接求解。所以欧拉和拉普拉斯采用的方法都是通过对数据一定的观察，把 n 个线性方程分为 p+1 组，然后把每个组内的方程线性求和后归并为一个方程，从而就把 n 个方程的方程组化为 p+1 个方程的方程组，进一步解方程求解参数。这些方法初看有一些道理，但是都过于经验化，无法形成统一处理这一类问题的通用解决框架。

以上求解线性矛盾方程的问题在现在的本科生看来都

不困难，这就是统计学中的线性回归问题，直接用最小二乘法就解决了。可是即便如欧拉、拉普拉斯这些数学大牛，当时也未能对这些问题提出有效的解决方案。可见在科学研究中，要想在观念上有所突破并不容易。有效的最小二乘法是勒让德在 1805 年发表的，基本思想就是认为测量中有误差，所以所有方程的累积误差为

$$\text{累积误差} = \sum(\text{观测值} - \text{理论值})^2$$

我们求解出导致累积误差最小的参数：

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \arg\min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \\ &= \arg\min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_p x_{pi}) \right]^2\end{aligned} \tag{3}$$

勒让德在论文中对最小二乘法的优良性做了几点说明：

* 最小二乘法使得误差平方和最小，并在各个方程的误差之间建立了一种平衡，从而防止某一个极端误差取得支配地位。
* 计算中只要求偏导后求解线性方程组，计算过程明确便捷。
* 最小二乘法可以导出算术平均值作为估计值。

对于最后一点，推理如下：假设真值为 $\theta, x_1, \cdots, x_n$ 为 n 次测量值，每次测量的误差为 $e_i = x_i - \theta$，按最小二乘法，误差累积为

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2,$$

求解 θ 使得 $L(\theta)$ 达到最小，正好是算术平均

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

由于算术平均是一个历经考验的方法，而以上的推理说明，算术平均是最小二乘法的一个特例，所以从另一个角度说明了最小二乘法的优良性，使我们对最小二乘法更加有信心。

最小二乘法发表之后很快得到了大家的认可接受，并迅速地在数据分析实践中被广泛使用。不过历史上又有人把最小二乘法的发明归功于高斯，这又是怎么一回事呢。高斯在 1809 年也发表了最小二乘法，并且声称自己已经使用这个方法多年。高斯发明了小行星定位的数学方法，并在数据分析中使用最小二乘法进行计算，准确地预测了谷神星的位置。

扯了半天最小二乘法，没看出和正态分布有任何关系啊，离题了吧？单就最小二乘法本身，虽然很实用，不过看上去更多的算是一个代数方法，虽然可以推导出最优解，对于解的误差有多大，无法给出有效的分析，而这个就是正态分布粉墨登场发挥作用的地方。勒让德提出的最小二乘法，确实是一把在数据分析领域披荆斩棘的好刀，但是刀刃还是不够锋利；而这把刀的打造后来至少一半功劳被归到高斯，是因为高斯不但独自地给出了造刀的方法，而且把最小二乘法这把刀的刀刃磨得无比锋利，把最小二乘法打造成了一把瑞士军刀。

高斯拓展了最小二乘法，把正态分布和最小二乘法联系在一起，并使得正态分布在统计误差分析中确立了自己的地位，否则正态分布就不会被称为高斯分布了。那高斯这位神人是如何把正态分布引入到误差分析之中，打造最小二乘法这把瑞士军刀的呢？

四、众里寻她千百度：误差分布曲线的确立

俄罗斯游行队伍里的正态分布标语

第三个故事有点长，主角是高斯和拉普拉斯，故事的主要内容是寻找随机误差分布的规律。

天文学是第一个被测量误差困扰的学科，从古代至十八世纪天文学一直是应用数学最发达的领域，到十八世纪，天文学的发展积累了大量的天文学数据需要分析计算，应该如何来处理数据中的观测误差成为一个很棘手的问题。我们在数据处理中经常使用平均的常识性法则，千百年来的数据使用经验说明算术平均能够消除误差，提高精度。算术平均有如此的魅力，道理何在，之前没有人做过理论上的证明。算术平均的合理性问题在天文学的数据分析工作中被提出来讨论：测量中的随机误差应该服从怎样的概率分布？算术平均的优良性和误差的分布有怎样的密切联系？

伽利略在他著名的《关于两个主要世界系统的对话》中，对误差的分布做过一些定性的描述，主要包括：

* 观测数据存在误差；
* 误差是对称分布的；
* 大的误差出现频率低，小的误差出现频率高。

用数学的语言描述，也就是说误差分布密度函数 $f(x)$ 关于 0 对称分布，概率密度随 $|x|$ 增加而减小，这两个定性的描述都很符合常识。

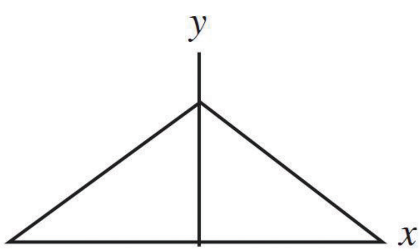
许多天文学家和数学家开始了寻找误差分布曲线的尝试。托马斯•辛普森（Thomas Simpson, 1710-1761）先走出了有意义的一步。设真值为 θ，而 $x_1, \cdots, x_n$ 为 n 次测量值，每次测量的误差为 $e_i = x_i - \theta$，若用算术平均 $\overline{x}=(\sum_{i=1}^{n}x_i)/n$ 去估计，其误差为 $\overline{e}=(\sum_{i=1}^{n}e_i)/n$。辛普森证明了，对于如下的一个概率分布，有下面的结论：

$$P(|\overline{e}|<x)\geq(|e_1|<x).$$

也就是说，$|\overline{e}|$ 相比于 $|e_1|$ 取小值的机会更大。辛普森的这个工作很粗糙，但是这是第一次在一个特定情况下，从概率论的角度严格证明了算术平均的优良性。

在 1772-1774 年间，拉普拉斯也加入到了寻找误差分布函数的队伍中。拉普拉斯假定误差分布函数 $f(x)$ 满足

$$-f'(x)=mf(x).$$

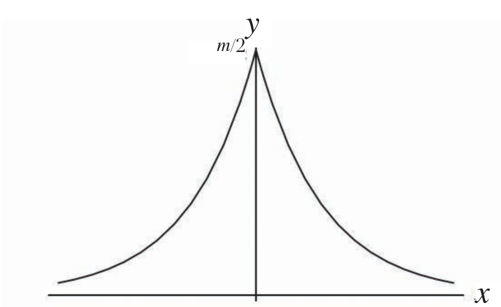


辛普森的误差分布曲线

由此可求得分布函数

$$f(x)=\frac{m}{2}e^{-m|x|} \qquad (4)$$

这个概率密度函数现在被称为拉普拉斯分布。



拉普拉斯的误差分布曲线

以这个函数作为误差分布，拉普拉斯开始考虑如何基于测量的结果去估计未知参数的值。拉普拉斯可以算是一个贝叶斯主义者，他的参数估计的原则和现代贝叶斯方法非常相似：假设先验分布是均匀的，计算出参数的后验分布后，取后验分布的中值点，即 1/2 分位点，作为参数估计值。可是基于这个误差分布函数做了一些计算之后，拉普拉斯发现计算过于复杂，最终没能给出什么有用的结果。

拉普拉斯可是概率论的大牛，写过在概率发展历史中极有影响力的《分析概率论》，不过以我的数学审美，实在无法理解拉普拉斯这样的大牛怎么找了一个零点不可导的误差的分布函数，拉普拉斯最终还是没能搞定误差分布的问题。

现在轮到高斯登场了，高斯在数学家中的地位极高，年轻的时候号称数学王子，后来被称为数学家中的老狐狸，数学家阿贝尔（Niels Henrik Abel, 1802-1829）对他的评论是："他像狐狸一样，用其尾巴把其在沙滩上的踪迹清除掉（He is like the fox, who effaces his tracks in the sand with his tail）。"我们的数学大师陈省身把黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866）和庞加莱（Jules Henri Poincaré, 1854-1912）称为数学家中的菩萨，而称自己为罗汉；高斯是黎曼的导师，数学圈里有些教授把高斯称为数学家中的佛。在数学家中既能仰望理论数学的星空，又能脚踏应用数学的实地的可不多见，高斯是数学家中少有的顶"天"立"地"的人物，他既对纯理论数学有深刻的洞察力，又极其重视数学在实践中的应用。在误差分布的处理中，高斯以极其简单的手法确立了随机误差的概率分布，其结果成为数理统计发展史上的一块里程碑。

高斯的介入首先要从天文学界的一个事件说起。1801 年 1 月，天文学家朱塞普•皮亚齐（Giuseppe Piazzi, 1746-1826）发现了一颗从未见过的光度 8 等的星在移动，这颗现在被称作谷神星（Ceres）的小行星在夜空中出现 6 个星期，扫过八度角后就在太阳的光芒下没了踪影，无法观测。而留下的观测数据有限，难以计算出它的轨道，天文学家也因此无法确定这颗新星是彗星还是行星，这个问题很快成了学术界关注的焦点。高斯当时已经是很有名望的年轻数学家了，这个问题也引起了他的兴趣。高斯以其卓越的数学才能创立了一种崭新的行星轨道的计算方法，一个小时之内就计算出了谷神星的轨道，并预言了它在夜空中出现的时间和位置。1801 年 12 月 31 日夜，德国天文爱好者奥伯斯（Heinrich Olbers, 1758-1840）在高斯预言的时间里，用望远镜对准了这片天空。果然不出所料，谷神星出现了！

高斯为此名声大震，但是高斯当时拒绝透露计算轨道的方法，原因可能是高斯认为自己的方法的理论基础还不够成熟，而高斯一向治学严谨、精益求精，不轻易发表没有思考成熟的理论。直到 1809 年高斯系统地完善了相关的数学

理论后，才将他的方法公布于众，而其中使用的数据分析方法，就是以正态误差分布为基础的最小二乘法。那高斯是如何推导出误差分布为正态分布的？让我们看看高斯是如何猜测上帝的意图的。

设真值为 θ，而 $x_1, \cdots, x_n$ 为 n 次独立测量值，每次测量的误差为 $e_i = x_i - \theta$，假设误差 e_i 的密度函数为 $f(e)$，则测量值的联合概率为 n 个误差的联合概率，记为

$$\begin{aligned} L(\theta) &= L(\theta; x_1, \cdots, x_n) = f(e_1)\cdots f(e_n) \\ &= f(x_1-\theta)\cdots f(x_n-\theta). \end{aligned}$$

但是高斯不采用贝叶斯的推理方式，而是直接取 $L(\theta)$ 达到最大值的 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$ 作为 θ 的估计值，即

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} L(\theta).$$

现在我们把 $L(\theta)$ 称为样本的似然函数，而得到的估计值 $\hat{\theta}$ 称为极大似然估计。高斯首次给出了极大似然的思想，这个思想后来被统计学家费希尔（R. A. Fisher）系统地发展成为参数估计中的极大似然估计理论。

数学家波利亚（George Pólya, 1887-1985）说过："要成为一个好的数学家，……你必须首先是一个好的猜想家（To be a good mathematician, … you must be a good guesser）。"历史上一流的数学家都是伟大的猜想家。高斯接下来的想法特别牛，他开始揣度上帝的意图，而这充分体现了高斯的数学天才。他把整个问题的思考模式倒过来：既然千百年来大家都认为算术平均是一个好的估计，那我就认为极大似然估计导出的就应该是算术平均！所以高斯猜测上帝在创世纪中的旨意就是：

误差分布导出的极大似然估计 ＝ 算术平均值

然后高斯去找误差密度函数 f 以迎合这一点，即寻找这样的概率分布函数 f，使得极大似然估计正好是算术平均 $\hat{\theta}=\bar{x}$。通过应用数学技巧求解这个函数 f，高斯证明（证明不难，后续给出）了所有的概率密度函数中，唯一满足这个性质的就是

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

瞧，正态分布的密度函数 $N(0, \sigma^2)$ 被高斯他老人家给解出来了！

进一步，高斯基于这个误差分布函数对最小二乘法给出了一个很漂亮的解释。对于最小二乘公式中涉及的每个误差 e_i［见前面的公式 (3)］，由于误差服从概率分布 $N(0,\sigma^2)$，则 $(e_1, \cdots, e_n)$ 概率为

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2\right\}$$

德国 1977 年发行的 20 马克钢镚

的要使得这个概率最大，必须使得 $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$ 取最小值，这正好就是最小二乘法的要求。

高斯所拓展的最小二乘法成为了十九世纪统计学的最重要成就，它在十九世纪统计学的重要性就相当于十八世纪的微积分之于数学。而与勒让德就最小二乘法的发明权之争，成了数学史上仅次于牛顿、莱布尼茨微积分发明权的争端。相比于勒让德 1805 年给出的最小二乘法描述，高斯基于误差正态分布的最小二乘理论显然更高一筹，高斯的工作中既提出了极大似然估计的思想，又解决了误差的概率密度分布的问题，由此我们可以对误差大小的影响进行统计度量了。高斯的这项工作对后世的影响极大，而正态分布也因此被冠名高斯分布。估计高斯本人当时是完全没有意识到他的这个工作给现代数理统计学带来的深刻影响。高斯在数学上的贡献特多，去世前他要求给自己的墓碑上雕刻上正十七边形，以说明他在正十七边形尺规作图上的杰出工作。而后世的德国钞票和钢镚上是以正态密度曲线来纪念高斯，这足以说明高斯的这项工作在当代科学发展中的分量。

十七、十八世纪科学界流行的做法，是尽可能从某种简单明了的准则（first principle）出发进行逻辑推导。高斯设定了准则"最大似然估计应该导出优良的算术平均"，并导出了误差服从正态分布，推导的形式上非常简洁优美。但是高斯给的准则在逻辑上并不足以让人完全信服，因为算术平均的优良性当时更多的是一个经验直觉，缺乏严格的理论支持。高斯的推导存在循环论证的味道：因为算术平均是优良的，推出误差必须服从正态分布；反过来，又基于正态分布推导出最小二乘法和算术平均，来说明最小二乘法和算术平均的优良性。这陷入了一个鸡生蛋蛋生鸡的怪圈，逻辑上算术平均的优良性到底有没有自行成立的理由呢？

高斯的文章发表之后，拉普拉斯很快得知了高斯的工作。拉普拉斯看到，正态分布既可以从抛钢镚产生的序列求和中生成出来，又可以被优雅地作为误差分布定律，这难道是偶然现象？拉普拉斯不愧为概率论的大牛，他马上将误差的正态分布理论和中心极限定理联系起来，提出了

元误差解释。他指出如果误差可以看成许多微小量的叠加，则根据他的中心极限定理，随机误差理所当然是高斯分布。而 20 世纪中心极限定理的进一步发展，也给这个解释提供了更多的理论支持。因此以这个解释为出发点，高斯的循环论证的圈子就可以打破。估计拉普拉斯悟出这个结论之后一定想撞墙，自己辛辛苦苦寻寻觅觅了这么久的误差分布曲线就在自己的眼皮底下，自己却长年来视而不见，被高斯占了先机。

至此，误差分布曲线的寻找尘埃落定，正态分布在误差分析中确立了自己的地位，并在整个十九世纪不断地开疆扩土，直至在统计学中鹤立鸡群，傲视其它一切概率分布；而高斯和拉普拉斯的工作，为现代统计学的发展开启了一扇大门。

在整个正态分布被发现与应用的历史中，棣莫弗、拉普拉斯、高斯各有贡献，拉普拉斯从中心极限定理的角度解释它，高斯把它应用在误差分析中，殊途同归。正态分布被人们发现有这么好的性质，各国人民都争抢它的冠名权。因为拉普拉斯是法国人，所以当时在法国被称为拉普拉斯分布；而高斯是德国人，所以在德国叫做高斯分布；中立国的人称它为拉普拉斯 - 高斯分布。后来法国的大数学家庞加莱建议改用正态分布这一中立名称，而随后统计学家卡尔 • 皮尔森使得这个名称被广泛接受：

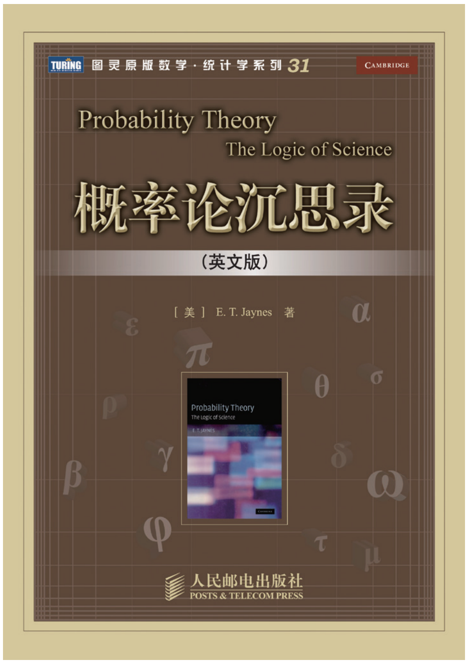
> *Many years ago I called the Laplace-Gaussian curve the normal curve, which name, while it avoids an international question of priority, has the disadvantage of leading people to believe that all other distributions of frequency are in one sense or another "abnormal".*
>
> ——*Karl Pearson*(1920)

不过因为高斯在数学家中的名气实在是太大，正态分布的桂冠还是更多地被戴在了高斯的脑门上，目前数学界通行的用语是正态分布、高斯分布，两者并用。

正态分布在高斯的推动下，迅速在测量误差分析中被广泛使用，然而早期也仅限于测量误差的分析中，其重要性远没有被自然科学和社会科学领域中的学者们所认识，那正态分布是如何从测量误差分析的小溪，冲向自然科学和社会科学的汪洋大海的呢？

五、曲径通幽处，禅房花木深

在介绍正态分布的后续发展之前，我们来多讲一点数学，也许有些人会觉得枯燥，不过高斯曾经说过：“数学是上帝的语言。”所以要想更加深入地理解正态分布的美，唯有借助于上帝的语言。

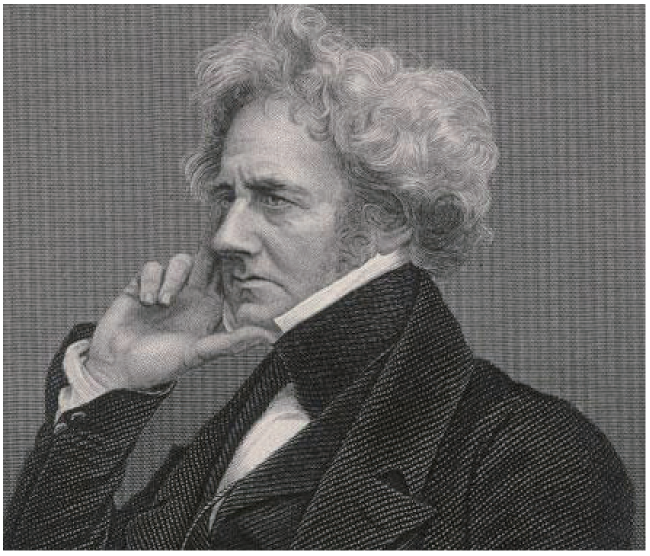


杰恩斯的名著《概率论沉思录》

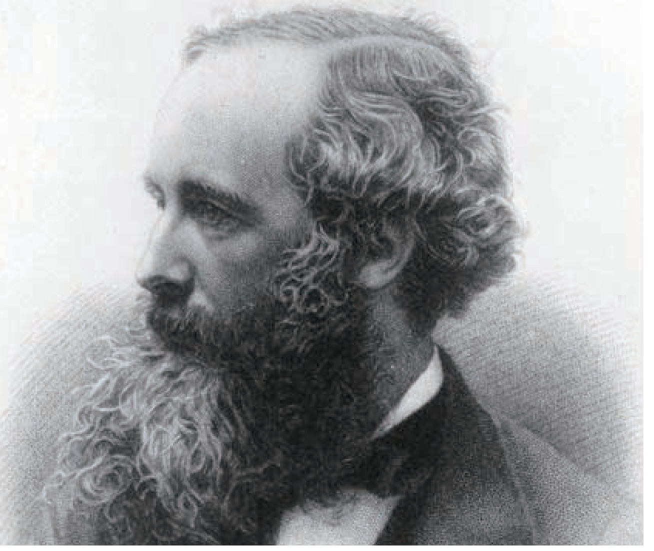
造物主造物的准则往往是简单明了的，只是在纷繁芜杂的万物之中，我们要发现并领会它并非易事。之前提到过，十七、十八世纪科学界流行的做法，是尽可能从某种简单明了的准则出发作为科学探求的起点；而后来的数学家和物理学家们的研究发现，屡次从一些给定的简单的准则出发，我们总是被引领到了正态分布的家门口，这让人感觉到正态分布的美妙。

达尔文的表弟高尔顿是生物学家兼统计学家，他对正态分布非常地推崇与赞美：“我几乎不曾见过像误差呈正态分布这么激发人们无穷想象的宇宙秩序。”当代两位伟大的概率学家保罗 • 利维（Paul Pierre Lévy , 1886-1971）和马克 • 卡茨（Mark Kac, 1914-1984）都曾经说过，正态分布是他们切入概率论的初恋情人，具有无穷的魅力。如果古希腊人知道正态分布，想必奥林匹斯山的神殿里会多出一个正态女神，由她来掌管世间的混沌。

要拉下正态分布的神秘面纱展现她的美丽，需要高深的概率论知识，本人在数学方面知识浅薄，不能胜任。只能在极为有限的范围内尝试掀开她的面纱的一角。棣莫弗和拉普拉斯以抛钢镚的序列求和为出发点，沿着一条小径第一次把我们领到了正态分布的家门口，这条路叫做中心极限定理。而这条路上风景秀丽，许多概率学家都为之倾倒。这条路在二十世纪被概率学家们越拓越宽，成为了通往



约翰 • 赫歇尔（1792-1871）



詹姆斯 • 麦克斯韦（1831-1879）

正态曲线的一条康庄大道。而数学家和物理学家们发现：条条小路通正态。著名的物理学家杰恩斯（Edwin Thompson Jaynes, 1922-1998）在他的名著《概率论沉思录》（Probability Theory: the Logic of Science）中，描绘了四条通往正态分布的小径——曲径通幽处，禅房花木深，让我们一起来欣赏一下四条小径上的风景吧。

1. 高斯的推导（1809）

第一条小径是高斯找到的，高斯以如下准则作为小径的出发点

误差分布导出的极大似然估计 ＝ 算术平均值

设真值为 θ，而 $x_1, \cdots, x_n$ 为 n 次独立测量值，每次测量的误差为 $e_i = x_i - \theta$，假设误差 e_i 的密度函数为 $f(e)$，则测量值的联合概率为 n 个误差的联合概率，记为

$$L(\theta) = L(\theta; x_1, \cdots, x_n) = f(e_1)\cdots f(e_n)$$

$$= f(x_1 - \theta)\cdots f(x_n - \theta).$$

为求极大似然估计，令

$$\frac{d\log L(\theta)}{d\theta} = 0.$$

整理后可以得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{f'(x_i-\theta)}{f(x_i-\theta)} = 0.$$

令 $g(x) = f'(x)/f(x)$，由上式可以得到

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_i - \theta) = 0.$$

由于高斯假设极大似然估计的解就是算术平均$\bar{x}$，把解代入上式，可以得到

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_i - \bar{x}) = 0. \tag{5}$$

在上式中取 $n = 2$，有

$$g(x_1 - \bar{x}) + g(x_2 - \bar{x}) = 0.$$

由于此时有 $x_1 - \bar{x} = -(x_2 - \bar{x})$，并且 x_1, x_2 是任意的，由此得到：$g(-x) = -g(x)$. 再在 (5) 式中取 $n = m+1$，并且要求 $x_1 = \cdots = x_m = -x$，且 $x_{m+1} = mx$，则有 $\bar{x} = 0$，并且

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_i - \bar{x}) = mg(-x) + g(mx).$$

所以得到 $g(mx) = mg(x)$. 而满足上式的唯一的连续函数就是 $g(x) = cx$，从而进一步可以求解出

$$f(x) = Me^{cx^2}.$$

由于 $f(x)$ 是概率分布函数，把 $f(x)$ 正规化一下就得到正态分布密度函数 $N(0, \sigma^2)$。

2. 赫歇尔 (1850) 和麦克斯韦 (1860) 的推导

第二条小径是天文学家约翰 • 赫歇尔（John Frederick William Herschel, 1792-1871）和物理学家詹姆斯 • 麦克斯韦（James Clerk Maxwell, 1831-1879）发现的。1850 年，天文学家赫歇尔在对行星的位置进行测量的时候，需要考虑二维的

误差分布，为了推导这个误差的概率密度分布，赫歇尔设置了两个准则：

* x 轴和 y 轴的误差是相互独立的，即误差的概率在正交的方向上相互独立；
* 误差的概率分布在空间上具有旋转对称性，即误差的概率分布和角度没有关系。

这两个准则对于赫歇尔考虑的实际测量问题看起来都很合理。由第一条准则，可以得到 $p(x, y)$ 应该具有如下形式

$$p(x, y) = f(x)\cdot f(y).$$

把这个函数转换为极坐标，在极坐标下的概率密度函数设为 $g(r, \theta)$，有

$$p(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r, \theta).$$

第二条准则，$g(r, \theta)$ 具有旋转对称性，也就是应该和 θ 无关，所以 $g(r, \theta) = g(r)$。综上所述，我们可以得到

$$f(x)f(y)=g(r)=g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

取 $y = 0$, 得到 $g(x) = f(x)f(0)$, 所以上式可以转换为

$$\log\left(\frac{f(x)}{f(0)}\right)+\log\left(\frac{f(y)}{f(0)}\right)=\log\left(\frac{f\sqrt{x^2+y^2}}{f(0)}\right).$$

令 $\log(f(x)/f(0)) = h(x)$, 则有

$$h(x)+h(y)=h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

从这个函数方程中可以解出 $h(x) = ax^2$, 从而可以得到 $f(x)$ 的一般形式如下

$$f(x)=\sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-ax^2}$$

而 $f(x)$ 就是正态分布 $N(0, 1/\sqrt{2a})$，而 $p(x, y)$ 就是标准二维正态分布函数

$$p(x,y)=\frac{a}{\pi}e^{-a(x^2+y^2)}.$$

1860 年，伟大的物理学家麦克斯韦在考虑气体分子的运动速度分布的时候，在三维空间中基于类似的准则推导出了气体分子运动的分布是正态分布 $\rho(v_x, v_y, v_z) \propto \exp(-a(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2))$。这就是著名的麦克斯韦分子速率分布定律。大家还记得我们在普通物理中学过的麦克斯韦 - 波尔兹曼气体速率分布定律吗？

$$\begin{aligned}F(v)&=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\\&=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}\cdot\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}}\cdot\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}.\end{aligned}\tag{6}$$

所以这个分布其实是三个正态分布的乘积。你的物理老师是否告诉过你其实这个分布就是三维正态分布？反正我是一直不知道，直到今年才明白。

赫歇尔 - 麦克斯韦推导的神妙之处在于，没有利用任何概率论的知识，只是基于空间几何的不变性，就推导出了正态分布。美国诺贝尔物理学奖得主费曼（Richard Feymann, 1918-1988）每次看到一个有 π 的数学公式的时候，就会问：圆在哪里？这个推导中使用到了 $x^2 + y^2$，也就是告诉我们正态分布密度公式中有个 π，其根源在于二维正态分布中的等高线恰好是个圆。

3. 兰登 (1941) 的推导

第三条道是一位电气工程师，弗农 • D • 兰登（Vernon D. Landon ）给出的。1941 年，兰登研究通信电路中的噪声电压，通过分析经验数据他发现噪声电压的分布模式很相似，不同的是分布的层级，而这个层级可以使用方差 σ^2 来刻画。因此他推理认为噪声电压的分布函数形式是 $p(x; \sigma^2)$。假设原来的电压为 X，累加了一个相对其方差 σ 而言很微小的误差扰动 ε，ε 的概率密度是 $q(e)$, 那么新的噪声电压是 $X' = X+\varepsilon$。兰登提出了如下的准则

* 随机噪声具有稳定的分布模式。
* 累加一个微小的随机噪声，不改变其稳定的分布模式，只改变分布的层级（用方差度量）。

用数学的语言描述：如果

$$X \sim p(x; \sigma^2),\quad \varepsilon \sim q(e),\quad X' = X+\varepsilon,$$

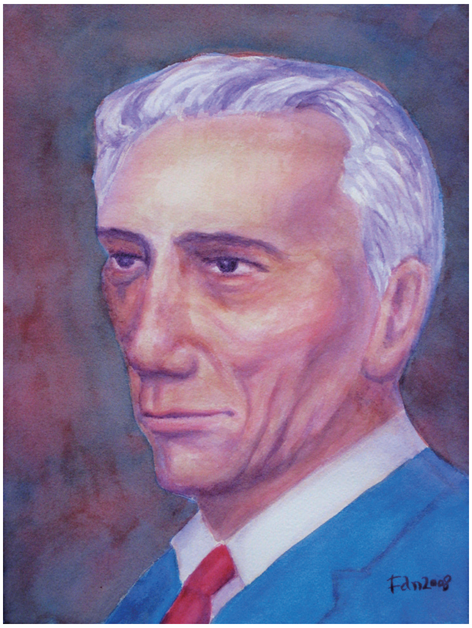
则有

$$X' \sim p(x; \sigma^2+var(\varepsilon)).$$

现在我们来推导函数 $p(x; \sigma^2)$ 应该长成啥样。按照两个随机变量和的分布的计算方式，X' 的分布函数将是 X 的分布函数和 ε 的分布函数的卷积，即有

$$f(x')=\int p(x'-e;\sigma^2)q(e)de.$$

把 $p(x' - e; \sigma^2)$ 在 x' 处做泰勒级数展开（为了方便，展开后把自变量由 x' 替换为 x），上式可以展开为



香农（1926-2001）

$$f(x) = p(x;\sigma^2) - \frac{\partial p(x;\sigma^2)}{\partial x}\int eq(e)de + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(x;\sigma^2)}{\partial x^2}\int e^2 q(e)de + \cdots$$

将 $p(x;\sigma^2)$ 简记为 p, 则有

$$f(x) = p - \frac{\partial p}{\partial x}\overline{\varepsilon} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial^2 x}\overline{\varepsilon^2} + o(\overline{\varepsilon^2}).$$

对于微小的随机扰动 ε, 我们认为它取正值或者负值是对称的，所以 $\overline{\varepsilon} = 0$。所以有

$$f(x) = p + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\overline{\varepsilon^2} + o(\overline{\varepsilon^2}). \tag{7}$$

对于新的噪声电压 $X' = X+\varepsilon$，方差由 σ^2 增加为 $\sigma^2 + var(\varepsilon) = \sigma^2 + \overline{\varepsilon^2}$, 所以按照兰登的分布函数模式不变的假设，新的噪声电压的分布函数应该为 $f(x) = p(x;\sigma^2 + \overline{\varepsilon^2})$。把 $p(x;\sigma^2 + \overline{\varepsilon^2})$ 在 σ^2 处做泰勒级数展开，得到

$$f(x) = p + \frac{\partial p}{\partial \sigma^2}\overline{\varepsilon^2} + o(\overline{\varepsilon^2}). \tag{8}$$

比较 (7) 和 (8) 这两个式子，可以得到如下偏微分方程

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial \sigma^2}.$$

而这个方程就是物理上著名的扩散方程（diffusion equation），求解该方程就得到

$$p(x;\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

又一次，我们推导出了正态分布！

杰恩斯对于这个推导的评价很高，认为兰登的推导本质上给出了自然界的噪音形成过程。他指出这个推导基本上就是中心极限定理的增量式版本，相比于中心极限定理来说，是一次性累加所有的因素，兰登的推导是每次在原有的分布上去累加一个微小的扰动。而在这个推导中，我们看到，正态分布具有相当好的稳定性；只要数据中正态的模式已经形成，他就容易继续保持正态分布，无论外部累加的随机噪声 $q(e)$ 是什么分布，正态分布就像一个黑洞一样把这个累加噪声吃掉。

4. 基于最大熵的推导

还有一条小径是基于最大熵原理的，物理学家杰恩斯（E. T. Jaynes）在最大熵原理上有非常重要的贡献，他在《概率论沉思录》里面对这个方法有描述和证明，没有提到发现者，我不确认这条道的发现者是否是杰恩斯本人。

熵在物理学中由来已久，信息论的创始人香农（Claude Elwood Shannon, 1916-2001）把这个概念引入了信息论，读者中很多人可能都知道目前机器学习中有一个非常好用的分类算法叫最大熵分类器。要想把熵和最大熵的来龙去脉说清楚可不容易，不过这条道的风景是相当独特的，杰恩斯对这条道也是偏爱有加。

对于一个概率分布 $p(x)$，我们定义它的熵为

$$H(p) = -\int p(x)\log p(x)dx.$$

如果给定一个分布函数 $p(x)$ 的均值 μ 和方差 σ^2（给定均值和方差这个条件，也可以描述为给定一阶原点矩和二阶原点矩，这两个条件是等价的）则在所有满足这两个限制的概率分布中，熵最大的概率分布 $p(x|\mu, \sigma^2)$ 就是正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$。

这个结论的推导数学上稍微有点复杂，不过如果已经猜到了给定限制条件下最大熵的分布是正态分布，要证明这个猜测却是很简单的，证明的思路如下。

考虑两个概率分布 $p(x)$ 和 $q(x)$，使用不等式 $\log x \le (x-1)$，得

$$\int p(x)\log\frac{q(x)}{p(x)}dx \le \int p(x)\left(\frac{q(x)}{p(x)} - 1\right)dx = \int q(x)dx - \int p(x)dx = 0.$$

于是

香农和他相关的重要概念：熵

$$\int p(x)\log\frac{q(x)}{p(x)}dx$$
$$=\int p(x)\log\frac{1}{p(x)}dx+\int p(x)\log q(x)dx\le 0;$$

所以

$$H(p)\le -\int p(x)\log q(x)dx \tag{9}$$

熟悉信息论的读者都知道，在数据压缩中，若搞错了符号的概率分布，必然要付出代价。上式要取等号当且仅当 $q(x)=p(x)$。

对于 $p(x)$，在给定的均值 μ 和方差 σ^2 下，我们取 $q(x)=N(\mu,\sigma^2)$ 则可以得到

$$\begin{aligned}H(p)&\le -\int p(x)\log\left\{\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right\}dx\\&=\int p(x)\left\{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}+\log\sqrt{2\pi}\sigma\right\}dx\\&=\frac{1}{2\sigma^2}\int p(x)(x-\mu)^2dx+\log\sqrt{2\pi}\sigma.\end{aligned} \tag{10}$$

由于 $p(x)$ 的均值方差有如下限制：

$$\int p(x)(x-\mu)^2dx=\sigma^2$$

于是

$$H(p)\le\frac{1}{2\sigma^2}\sigma^2+\log\sqrt{2\pi}\sigma=\frac{1}{2}+\log\sqrt{2\pi}\sigma$$

而当 $p(x)=N(\mu,\sigma^2)$ 的时候，上式可以取到等号，这就证明了结论。

杰恩斯显然对正态分布具有这样的性质极为赞赏，因为这从信息论的角度证明了正态分布的优良性。而我们可以看到，正态分布熵的大小，取决于方差的大小。这也容易理解，因为正态分布的均值和密度函数的形状无关，正态分布的形状是由其方差决定的，而熵的大小反应概率分布中的信息量，显然和密度函数的形状相关。

好的，风景欣赏暂时告一段落。所谓“横看成岭侧成峰，远近高低各不同”，正态分布给人们提供了多种欣赏角度和想象空间。法国菩萨级别的大数学家庞加莱对正态分布说过一段有意思的话，引用来作为这个小节的结束：

Physicists believe that the Gaussian law has been proved in mathematics while mathematicians think that it was experimentally established in physics.（物理学家认为高斯分布在数学上得以证明，而数学家则认为高斯分布在物理试验中得以建立。）

——*Henri Poincaré*

作者简介：靳志辉，北京大学计算机系计算语言所硕士，日本东京大学情报理工学院统计自然语言处理方向博士，目前在腾讯科技（北京）有限公司担任研究员，主要参与计算广告学相关的业务，工作内容涉及统计自然语言处理和大规模机器学习方面的工程研究工作。

希尔伯特与广义相对论场方程

卢昌海

一. 引言

众所周知，二十世纪最著名的物理学家是爱因斯坦（Albert Einstein, 1879-1955），爱因斯坦最著名的成就是广义相对论。关于广义相对论的提出，爱因斯坦的晚年合作者、波兰物理学家英菲尔德（Leopold Infeld, 1898-1968）在《爱因斯坦：他的工作及对世界的影响》（Albert Einstein: His Work and Its Influence on Our World）一书中曾经记述过一段有趣的对话：

……我曾对爱因斯坦说："无论您是否提出，我相信狭义相对论的问世都不会有什么延误，因为时机已经成熟了。"爱因斯坦回答说："是的，这没错，但广义相对论的情形不是这样，我怀疑直到现在也未必会有人提出。"

英菲尔德并且评论说，这一回答很好地表述了爱因斯坦在广义相对论发展史上所扮演的角色。

确实，在二十世纪前二十五年所发生的那场影响深远的物理学革命中，狭义相对论、广义相对论和量子力学这三大理论的提出可谓是各有特色：狭义相对论是水到渠成、瓜熟蒂落，量子力学则是群雄并起、共襄盛举——这两者虽很不相同，但似乎都是"离了谁地球照样转"。唯有广义相对论，几乎是爱因斯坦"一个人的战斗"，是没有爱因斯坦就没有广义相对论。这一点不仅有爱因斯坦本人与英菲尔德的上述对话作脚注，也是很多其他物理学家的共同看法。比如著名美国物理学家奥本海默（J. Robert Oppenheimer, 1904-1967）在为纪念爱因斯坦逝世十周年而撰写，后被收录于爱因斯坦诞辰 100 周年纪念文集《爱因斯坦——世纪文集》（Einstein: A Centenary Volume）的题为"论爱因斯坦"（On Albert Einstein）的文章中，就写过一段与英菲尔德的回忆有异曲同工之意的文字：

量子的发现必定会以这种或那种的方式出现…… 对没有任何信号能运动得比光更快的含义的深刻理解也必定会出现…… 直到今天仍未被实验很好证实的广义相对论则除他以外，在很长很长时间内都不会有人能提出。

《爱因斯坦——世纪文集》的主编、以编写物理教材而知名的美国麻省理工学院（MIT）物理学教授弗伦奇（Anthony French, 1920-）也在为该文集撰写的题为"广义相对论的故事"（The Story of General Relativity）的文章中"英雄所见略同"地写道：

有人曾经评论过，在 1905 年之前…… 狭义相对论已经呼之欲出了，如果爱因斯坦没有将之透彻化，用不了多久其他人也会做到。无论这是否正确，可以确定的是：在创立广义相对论时爱因斯坦迈出了自己独一无二的一步。 没有他的引路，这一步也许几十年都不会有人迈出。

这样一场"一个人的战斗"从历史考究的角度看，照说是不该有什么悬疑的，其实却不然。在广义相对论的历史考究中除了探讨爱因斯坦的"心路历程"外，还有一个颇有争议性的话题，那便是究竟谁最先提出了广义相对论场方程？这个争议性话题就是本文的主题，它的主角有两位：一位当然是爱因斯坦，另一位则是德国数学家希尔伯特（David Hilbert, 1862-1943）。

二. 希尔伯特对物理学的兴趣

希尔伯特是二十世纪最著名的数学家之一，也是"数学圣地"哥廷根（Göttingen）的灵魂人物之一，不仅研究领域

爱因斯坦（左）和希尔伯特

希尔伯特（前右）和学生哈尔（后左一，Alfréd Haar，离散小波创始人），儿子 Franz Hilbert（后左二），朋友、合作者闵科夫斯基（前左，Hermann Minkowski），夫人 Käthe Hilbert（前中），学生 Ernst Hellinger（后右一）

极为宽广，研究成果也极为丰硕。单就以他名字命名的数学名词而论，就有不下一打，比如希尔伯特基（Hilbert basis）、希尔伯特特征函数（Hilbert's characteristic function）、希尔伯特立方（Hilbert cube）、希尔伯特矩阵（Hilbert matrix）、希尔伯特模形式（Hilbert modular form）、希尔伯特函数（Hilbert function）、希尔伯特多项式（Hilbert polynomial）、希尔伯特概型（Hilbert scheme）、希尔伯特空间（Hilbert space）、希尔伯特变换（Hilbert transform）、希尔伯特不变积分（Hilbert invariant integral）等等，以及——最后但对本文来说绝非最不重要的——爱因斯坦—希尔伯特作用量（Einstein-Hilbert action）。

对于很多数学家来说，名字能出现在一个数学名词中就已是难得的荣誉了，但对希尔伯特来说，那一打以上的数学名词加在一起，也还只是勾勒出了他研究工作中偏于“战术性”的那部分，而未能包括很多视野更宏大的“战略性”研究——比如对几何基础及数学基础的研究。不仅如此，作为数学家的希尔伯特的研究领域甚至不是数学所能涵盖的，因为除数学外，他对物理学也怀有浓厚的兴趣并从事过研究。

早在 1900 年发表的著名演讲“数学问题”（Mathematische Probleme）中，希尔伯特就把物理学的公理化列为了问题之一（即希尔伯特第六问题）。这个貌似泛泛的问题并非是为了让他的演讲看起来包罗万象而随意引入的，而确确实实是代表了希尔伯特所看重并感兴趣的一个方向。希尔伯特后来的学术轨迹在很大程度上印证了这一点：自 1902 年起，他开始讲授物理学；自 1912 年起，他设立了物理学助手职位，并招收指导了从事理论物理研究的学生；1913 年，他组织了所谓的“哥廷根周”（Göttinger Gastwoche）活动，邀请普朗克（Max Planck, 1858-1947）、德拜（Peter Debye，1884-1966）、能斯特（Walther Nernst, 1864-1941）、索末菲（Arnold Sommerfeld, 1868-1951）、洛仑兹（Hendrik Lorentz, 1853-1928）等众多第一流的物理学家来做报告，介绍了包括气体运动理论及兴起中的量子论在内的诸多课题。1914 年，他邀请物理学家德拜开设了有关物质结构的讲座。

在希尔伯特对物理学的兴趣中，公理化思想是一个很重要的方面，不仅他本人深为重视，受他影响，一些其他数学家也对物理学的公理化展开了研究。比如在哥廷根大学（University of Göttingen）就读过的希腊数学家卡拉西奥多里（Constantin Carathéodory, 1873-1950）在热力学的公理化方面就做了重要工作。除公理化思想外，极小值原理（minimal principle）也极受希尔伯特的器重。极小值原理在物理学上的具体应用有着各种不同形式，那些形式大都为希尔伯特所熟悉。比如在讲授力学时，他曾经使用过高斯最小约束原理（Gauss' principle of least constraint）；在我们将要介绍的有关引力理论的研究中，则使用了在现代物理中被广泛运用的最小作用量原理（principle of least action）。

在对物理学的持续关注中，希尔伯特那颇具识人之明的眼光并没有漏掉一位比他年轻十七岁、正快速成长为大腕的“后起之秀”——爱因斯坦。早在 1912 年，希尔伯特在研究线性积分方程时，就曾与爱因斯坦有过信件往来：他向爱因斯坦索要过气体运动理论及辐射理论方面的论文，并回赠过一本自己新出版的积分方程著作。他也曾邀请爱因斯坦在“哥廷根周”期间访问哥廷根，做一次有关气体运动理论的报告，但爱因斯坦婉拒了。不过，从 1915 年 6 月 28 日至 7 月 5 日，爱因斯坦终于应希尔伯特的邀请对哥廷根进行了为期一周的访问，并作了六次——每次两小时的——报告，介绍他的广义相对论研究。

那次哥廷根之行给爱因斯坦留下了不错的印象，他在 1915 年 7 月 15 日给索末菲的信中描述了自己的观感：

> 在哥廷根，我非常愉快地看到所有的东西都在细节上得到了理解。我对希尔伯特很是着迷，他是一个重要人物！

在给其他同事和朋友的信件中，爱因斯坦也毫不讳言地表示了对希尔伯特的好感，并提到他（在引力理论方面）已完全说服了希尔伯特与克莱因（Felix Klein, 1849-1925）[注 1.1]。

注 1.1

克莱因是一位比希尔伯特更资深的哥廷根的著名数学家（不要与有相同中文译名的美国数学科普作家 Morris Kline 相混淆，此处及后文提到克莱因所指的都是 Felix Klein）。关于爱因斯坦认为自己说服了希尔伯特一事，信件中并未提及细节，如果用后来的情形来印证的话，那么希尔伯特主要是接受了爱因斯坦的广义协变原理及用度规张量描述引力势的想法，但对爱因斯坦理论的若干其它细节，尤其是当时那尚不正确的场方程，是并不认同的。

希尔伯特对爱因斯坦的访问也极为重视。那次演讲之后不久，希尔伯特离开了哥廷根去度暑假。对于他在那段时间中的具体行程史学家们所知不全，但一般认为，在那段时间中希尔伯特的研究重心向引力理论方向作了显著倾斜。这一倾斜使得他与爱因斯坦之间展开了一场无形的——在某些环节上甚至是有形的——竞争，也为史学家们留下了一个小小的谜团。

1915 年 11 月 20 日，希尔伯特在哥廷根皇家科学院（Royal Academy of Science in Göttingen）作了有关引力理论的报告，介绍了他的研究成果。那次报告对于探讨谁最先提出了广义相对论场方程是极为重要的。可惜的是，也许因为听众大都是数学家，报告的主题却是物理学，从而“言者谆谆，听者藐藐”的缘故，后世的史学家们未能收集到有关那次报告的第一手资料——比如听众的反响或有关报告内容的细节性回忆等。早期的史学研究所依据的乃是希尔伯特于 1916 年 3 月 31 日发表在《皇家科学与人文学会新闻》（Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften）上的题为“物理学基础”（Die Grundlagen der Physik）的论文 [注 1.2]。那篇论文明确标注了曾在 1915 年 11 月 20 日的会议上作过报告（Vorgelegt in der Sitzung vom 20 November 1915），从而被视为了有关那次报告的最直接——一度甚至是唯一直接——的资料。

接下来我们就先对希尔伯特的那篇论文作一个简短介绍。

注 1.2

细心的读者也许注意到了，这一论文标题与他的名著《几何基础》(Grundlagen der Geometrie) 的标题是极为相似的。

注 1.3

希尔伯特早年曾倾向于接受所谓的机械观，后来才转而接受电磁观。自 1913 年之后，则更具体地青睐于建立在电磁观之上的米理论（有关机械观与电磁观的简单介绍，可参阅拙作《质量的起源》的第三节）。

注 1.4

米的“世界函数”是一种拉格朗日函数 (Lagrangian)，后者的符号通常取为 L。拉格朗日函数在具体使用时分“拉格朗日量”(Lagrangian) 与“拉格朗日密度”(Lagrangian density) 两种主要情形，前者常用于离散体系，后者常用于场论，希尔伯特所用的是后者。拉格朗日密度有时也称为作用量密度 (action density)，其对不变体积元 $\sqrt{g}\,d^4x$ 的积分则称为作用量。不过为简洁起见，在不会混淆的情形下，我们将把两者统称为作用量。

三 . 希尔伯特的“物理学基础”

希尔伯特对引力理论的研究有两个主要切入点：一个是来自爱因斯坦的广义协变原理及用度规张量描述引力势的想法，这是爱因斯坦自 1907 年开始思索引力问题以来逐步确立起来的想法；另一个则是来自德国物理学家米（Gustav Mie, 1869-1957）的物质理论。米（一个字的中文译名真是别扭）的物质理论（简称米理论）是建立在物质起源于电磁相互作用这一被称为电磁观或电磁世界观（electromagnetic worldview）的观念之上的 [注 1.3]，与建立在电磁观之上的其它理论一样，在昙花一现之后很快就入住了“历史博物馆”。

借助这两个切入点，沿袭物理学公理化的大思路，希尔伯特在论文的开篇中列出了两条公理。其中第一条被称为“米的世界函数公理”（Mie's axiom of the world function），这条公理虽被冠以米的名字，从框架上讲，实际引入的乃是最小作用量原理，只不过用被米称为“世界函数”的函数 H 来表述作用量而已 [注 1.4]。除此之外，该公理还规定世界函数 H 只包含度规张量及其一、二阶导数，以及电磁势及其一阶导数。从而同时体现了爱因斯坦用度规张量描述引力势的想法以及米的建立在电磁观之上的物质理论（因为物质场部分只含电磁场）。而第二条公理则是所谓的“广义不变性公理”（axiom of general invariance），它规定世界函数在任意坐标变换之下为标量。毫无疑问，这条公理体现的是爱因斯坦的广义协变原理，只不过作用量是标量，从而“协变”（covariance）成为了“不变”（invariance）。如果更细致地分析的话，那么第一条公理中的 H 只包含度规张量及其一、二阶导数的限定有可能也是来自爱因斯坦的，因为是他通过对经典极限的研究，发现了引力理论不含有度规张量的二阶以上导数 [注 1.5]。

以这两条公理为基础，希尔伯特给出了一系列数学和物理上的结果。其中数学上的结果包括：

1. 缩并形式——即关于里奇张量（Ricci tensor）——的毕安基恒等式（Bianchi identity）[注 1.6]。

注 1.5

不过场论中通常就不含场量的二阶以上导数，因此这一限定虽有可能来自爱因斯坦，但即便没有爱因斯坦，估计希尔伯特也会做出同样的限定。

注 1.6

毕安基恒等式据说最早乃是意大利数学家里奇 (Gregorio Ricci-Curbastro, 1853-1925) 于 1880 年发现的，后来于 1902 年由意大利数学家毕安基 (Luigi Bianchi, 1856-1928) 重新发现，并因此得名。在广义相对论的早期研究中，无论爱因斯坦还是希尔伯特都不知道这一恒等式，从而未能直接利用它来简化场方程的推导。

2. 诺特定理（Noether's theorem）的维形 [注 1.7]。

而对我们来说更有兴趣的物理上的结果则主要包括：

1. 引力理论的作用量为 $K+L$，其中 K 为曲率标量（现代符号为 R），L 为物质场的作用量，对希尔伯特来说特指为米理论中的电磁作用量。

2. 引力场方程为 $\sqrt{g}\,(K_{\mu\nu}-½Kg_{\mu\nu}) = -\partial(\sqrt{g}\,L)/\partial g^{\mu\nu}$，其中 $K_{\mu\nu}$ 为里奇张量（现代符号为 $R_{\mu\nu}$），$g_{\mu\nu}$ 为度规张量，g 为度规张量的行列式。

这两个物理上的结果正是后来在史学界引发争议乃至风波的核心所在。如前所述，包含这两个结果的论文虽是1916年3月31日发表的，但由于明确标注了曾在1915年11月20日的会议上作过报告，而关于那次报告，又一度并无足够详尽的其它资料可供研究，因此早期的史学家便将这篇论文中的结果视为是希尔伯特不迟于1915年11月20日所得到的。与之相比，爱因斯坦最早得到正确的引力场方程是在1915年11月25日，那一天他向普鲁士科学院（Prussian Academy）报告了正确的场方程，并随即以“引力场方程”（The Field Equations of Gravitation）为题发表在了普鲁士科学院的会议报告（Sitzungsberichte）中。这一时间比希尔伯特作报告的日子晚了五天。因此，一些早期的史学家认为希尔伯特先于爱因斯坦就得到了广义相对论场方程。

不过，对于多数其他人来说，希尔伯特的论文其实并未引起太大反响，这也许是因为——如前所述——聆听他1915年11月20日报告的大都是数学家，对物理学话题相对隔膜。而当希尔伯特的论文正式发表时，不仅爱因斯坦关于引力场方程的最早的短文早已发表，就连他有关广义相对论的著名长篇综述“广义相对论基础”（The Foundation of General Theory of Relativity）也已问世。另外一个可能的原因则是爱因斯坦研究广义相对论所用的数学对当时的物理学家来说虽有些另类，但比起希尔伯特的数学来却可能还算是略显“通俗”的，从而更容易被接受。

由于希尔伯特的论文未引起太大反响，因此关于希尔伯特是否先于爱因斯坦得到广义相对论场方程一事，很多人即便风闻过消息，对细节也大都知之不详。这方面的一个例子，是印度裔美国科学史学家梅拉（Jagdish Mehra, 1937）所提到的。1974年，梅拉在有关这一话题的著作《爱因斯坦、希尔伯特与引力理论》（Einstein, Hilbert, and the Theory of Gravitation）的序言中提到，他之所以研究这一课题，并撰写这一著作，是因为匈牙利数学及物理学家维格纳（Eugene Wigner, 1902-1995）曾风闻过希尔伯特先于爱因斯坦发现广义相对论场方程的说法，并向他寻求证实。维格纳不仅是数学及物理学家，而且曾在哥廷根大学做过希尔伯特的助手，连他都不知道此事的细节，其他人就更可想而知了。

但在转而探讨历史细节之前，有关希尔伯特那篇论文还有其它一些东西值得评述。

在希尔伯特的论文中，除上述结果外，还提出了一个有趣的观点，那就是引力场的作用量对于度规张量的10个分量和电磁势的4个分量分别作变分，一共可以得到14个方程（即10个引力场方程与4个电磁场方程），但由于缩并形式的毕安基恒等式共有4个，因此其中有4个方程是不独立的。希尔伯特对这一结果作出了自己的诠释，他认为这意味着4个电磁场方程可以作为10个引力场方程的推论，从而表明电磁理论可以从引力理论中得到 [注 1.8]。而依据希尔伯特当时所认同的电磁观，电磁理论乃是物质理论的基础，因此电磁理论可以从引力理论中得到，也就意味着全部的物理学都可以归并为引力理论。希尔伯特将自己那篇有关引力理论的论文取名为“物理学基础”，就在一定程度上体现了这一诠释。在论文的末尾，他甚至充满乐观地展望道：

> 通过本文所确立的基本方程式，我相信最深层的、目前还隐藏着的原子内部过程也将得到解释。尤其是将所有物理常数普遍约化为数学常数必定是可能的……物理学在原则上变成像几何那样的科学——这毫无疑问是公理化方法的最高成就。

这种乐观憧憬也是刻在其墓碑上的希尔伯特的毕生信念“我们必须知道，我们必将知道”（Wir müssen wissen. Wir werden wissen）的一个生动写照。

当然，我们现在知道（希尔伯特本人在不久之后也意识到了），希尔伯特的上述看法是完全错误的，因为缩并形式的毕安基恒等式并不意味着电磁理论可以从引力理论中得到。从现代观点来看，4个缩并形式的毕安基恒等式的存在

注 1.7

诺特定理是德国数学家诺特 (Emmy Noether, 1882-1935) 于1918年发表的，不过其证明据说在1915年就完成了。希尔伯特在准备12月20日的报告期间，曾经让诺特做他的助手，因此两人在诺特定理这一课题上可能有过讨论。

注 1.8

有意思的是，希尔伯特的这一结论实际上是逆转了米的观点。米是电磁观的贯彻者，他的理论是单纯的电磁理论，并一度曾希望将引力也归因于电磁理论（因此米也是统一引力与电磁的早期尝试者），这与希尔伯特所得到的结论恰好相反。米后来放弃了将引力归因于电磁理论的努力，转而尝试用四维矢量来描述引力势。

使得 10 个引力场方程中只有 6 个是独立的，从而在求解度规张量时必须添加 4 个坐标条件，仅此而已。这一点实际上是与广义协变性一脉相承的，因为后者意味着引力场方程及其解允许对 4 个时空坐标作任意变换，从而只有在添加 4 个坐标条件后才能得到确定的解。这一切丝毫不意味着从引力理论中可以得到电磁理论，更谈不上能将全部的物理学归并为引力理论（后者还进一步假定了本身也是错误的电磁观），及支持希尔伯特论文末尾那些天马行空般的想象。此外，正确的引力场方程与缩并形式的毕安基恒等式一同确保了协变形式的能量动量守恒定律，而能量动量守恒定律——视具体的物质体系而定——蕴含了物质运动方程的全部或部分信息，这在如今也已是众所周知的结论了，前者在现代广义相对论教材中更是往往作为引力理论所需满足的条件及推导引力场方程的捷径来用。可惜在早期研究中，无论爱因斯坦还是希尔伯特都未能清楚地看到这些。爱因斯坦早年走过的许多弯路（包括一度以为广义协变性无法普遍成立），以及希尔伯特的上述错误都与之不无关系。当然，这绝不能作为后人苛责他们的理由，在黑暗中探索的前辈们所面临的困难是我们这些事后诸葛无法直接体验的，爱因斯坦本人对此有过精辟的评论：

> 在黑暗中探寻真理的那些能够体味却难以描绘的年月，那些强烈的渴望和在信心与疑虑之间的反复徘徊，直至突破后的明晰和领悟，都只有亲身经历过的人才能知晓。

不过，希尔伯特将电磁理论乃至整个物理学归并为引力理论的观点虽然不正确，他的这一做法却可以算是先于爱因斯坦走上了试图统一引力与电磁的道路。当然，在这点上他虽先于爱因斯坦，却也绝非“第一人”，比如笃信电磁观的米在他之前就曾做过类似努力（参阅 [注 1.8]）。希尔伯特本人则将这条道路的开创归功于德国数学家黎曼（Bernhard Riemann, 1826-1866），表示黎曼是“最早探索引力与光之间的理论关联”的人（因为在黎曼手稿中有一篇探讨引力与光的短文），而他自己所得到的结果则是“对黎曼提出的问题的简单且很令人惊讶的解答”。相比之下，爱因斯坦是二十世纪二十年代开始才正式走上同样道路的，不仅比黎曼、米、希尔伯特来得晚，也晚于德国数学家外尔（Hermann Weyl, 1885-1955）、卡鲁查（Theodor Kaluza, 1885-1954）等人——当然，他较晚进入这一“死胡同”对物理学来说乃是不幸中的幸运。

希尔伯特那篇论文的另一个值得评述的特点，是率先用最小作用量原理表述了正确的引力理论。希尔伯特以最小作用量原理为基本出发点（即视为公理）的做法，曾被奥地利物理学家泡利（Wolfgang Pauli, 1900-1958）列为是妨碍物理学家接受他理论的两大障碍之一（另一个障碍是采用了米理论）。不过从现代物理学的观点来看，希尔伯特的做法却极具前瞻性。因为现代物理学上几乎所有的基础理论研究都是从最小作用量原理出发的 [注 1.9]。就连爱因斯坦本人，虽然曾在 1916 年 5 月 24 日给好友艾伦菲斯特（Paul Ehrenfest, 1880-1933）的信中表示不欣赏希尔伯特那“不必要地复杂迂回”的理论，在同年的 10 月却开始了沿这一方向的研究，并且在论文中改称希尔伯特的理论为“特别清晰的形式”。看来外尔在晚年的回忆中把希尔伯特比喻为吹着迷人长笛，引诱一大群老鼠跟随他跳入数学长河的人是颇为贴切的——就连爱因斯坦也挡不住诱惑地跟着他跳了一回。

说到这里，顺便回过头来评述一下本文开头所引述的爱因斯坦本人及其他物理学家的看法，即认为广义相对论如果没有爱因斯坦，在非常长的时间内都无法由别人提出。我早年接触到这一看法时，曾有过完全的认同，因为像广义相对论那样复杂的理论，是不可能像发现牛顿引力定律那样利用观测线索来发现的（那样的线索只能得到一部分后牛顿近似，而不可能反推出广义相对论来），而纯理论的探索则有太多的可能性，米等人的探索就是例子，甚至连爱因斯坦本人的探索，也走过了大量歧途，且最后的成功——如后文将要提到的——仍有一定的歪打正着之处。对于这样的复杂理论，其他人完全独立地提出一模一样的理论似乎确实是不可思议的 [注 1.10]。不过，后来我的看法有了显著改变，理由正是最小作用量原理。从最小作用量原理的角度讲，只要有人想到了坐标变换可以突破狭义相对论的限制（这当然也不容易，但与创立整个广义相对论相比还是容易得多的），则度规张量的引入就是必然的，而度规张量及其低阶导数构成的最简单的标量就是曲率标量，这一数学事实也早晚会被注意到的。如果进一步考虑到在现代物理研究中，对最小作用量原理的运用越来越广泛，对作用量的选取则呈现出穷举性，即认为凡未被基本原理所禁止的项都可以进入作用量中，则曲率标量的进入——从而广义相对论的发现——也几乎是

注 1.9

需要提到的是，爱因斯坦、洛仑兹等人在相对论研究中也使用过最小作用量原理，只不过没有像希尔伯特那样将其地位放得如此之高，而且也没能给出正确的引力理论作用量。

注 1.10

有读者可能会觉得希尔伯特就是一个反例。其实不然，因为——如正文所述——希尔伯特的研究是建立在来自爱因斯坦的许多框架性观点之上的，从而至多只是在我们将要讨论的推导场方程这一环节上独立于爱因斯坦，而并非在整个引力理论的研究上都独立。

必然的。当然，历史只有一次，我的这种看法只能聊作谈资而已。

在结束对希尔伯特那篇论文的介绍之前，还有一点我愿评述一下，那就是一些人（包括爱因斯坦）在评论希尔伯特的理论时，往往会指出该理论不如爱因斯坦的理论来得普遍，理由是希尔伯特采信了建立在电磁观之上的米理论，从而使得物质场被局限于电磁场，丧失了普遍性。与之相比，爱因斯坦在 1915 年 11 月 25 日首次得到正确的场方程时，在论文中明确表示："除了要求它导出守恒定律外，我们无需对物质场的能量张量作出其它假设"。这一评论所涉及的基本事实当然是无可辩驳的，希尔伯特确实对米理论表现出了显著青睐，甚至不惜以米的名字来命名公理。不过，我们也应当看到，将引力理论中的物质场限定为电磁场，甚至特指为米理论，更多地只是一种观念性的限制。希尔伯特的论文从理论框架上讲其实是相当普遍的，米理论虽然在公理中被提及，实质地位却是可有可无的，只要将作用量 K + L 中的物质场部分 L 由仅仅描述米理论中的电磁场推广为一般的物质场，希尔伯特的理论框架无需任何修改就可以适用于更广泛的情形。不仅如此，希尔伯特的理论框架还首次给出了能量动量张量的一个全新的表达式：$T_{\mu\nu} = (1/\sqrt{g})\partial(\sqrt{g}L)/\partial g^{\mu\nu}$。这个表达式用泡利的话说，是"只有在广义相对论中才变得显而易见的"。这个表达式自动保证了能量动量张量的对称性，从而有着独特的优越性。

当我们如今来回顾希尔伯特的理论时，出于尽可能精确地还原历史的目的，虽然毫无疑问地需要指出他曾经青睐过米理论，并将之列为公理这一事实，但却不应由此而忽视他的理论所具有的框架意义上的普适性。在历史上，理论的框架比创始者所设想的更为宏大的情形并不鲜见，比如 1954 年杨振宁（Chen Ning Yang, 1922-）和米尔斯（Robert Mills, 1927-1999）在提出著名的杨 - 米尔斯理论（Yang-Mills theory）时，就曾错误地将理论中的规范变化设定为同位旋（isospin）变换，但这种历史性的错误并不能遮蔽他们理论所具有的框架意义上的普适性，也并不妨碍我们将提出非阿贝尔规范理论（non-Abelian gauge theory）的荣誉归于他们。同样，对希尔伯特当年的论文，我们也不应该由于他所具有的观念上的局限性或错误，而减少应该归于他的荣誉——虽然希尔伯特的荣誉库早就"不差钱"了。

以上就是对希尔伯特那篇论文的已不太简短的简短介绍，现在回到我们的主题上来，即究竟谁最先提出了广义相对论场方程？或者更明确地说，希尔伯特是否先于爱因斯坦提出了广义相对论场方程？这可能是希尔伯特那篇遭受冷遇的论文中后世史学家们关心和讨论得最多的问题。这个问题除了关系到谁最先提出广义相对论场方程外，还可以引发出一些其它的可能性，比如爱因斯坦在提出场方程的过程中，是否有可能受到过希尔伯特的启发？甚至是否有可能"借鉴"了希尔伯特的场方程（假如确实是后者先问世的话）？那样的可能性后来也确实被某些史学家提了出来，并引发了争议乃至风波——这些我们将在后文中提及。

四. 早期研究简述

接下来，我们简单提一下在这一课题上的早期研究。这一课题在早期虽不曾有过显著争论，但人们的看法起初也并不是完全一致的，比如洛仑兹就曾认为希尔伯特的工作只是用变分原理对爱因斯坦的工作做了重新表述而已。不过这些歧见在二十世纪七十年代出现了统一的势头。这势头的出现也许首先要归功于梅拉。如前所述，1974 年，梅拉因受维格纳的垂询而对这一课题进行了研究，并发表了《爱因斯坦、希尔伯特与引力理论》这一著作。不过，梅拉的研究虽缘起于维格纳对细节的垂询，视野却比较宏观，较少辨析历史细节，而更多地着眼于对广义相对论的历史，尤其是对希尔伯特所采用的思想方法及其来龙去脉进行整体阐述上。在梅拉之后，1978 年，科学哲学家厄尔曼（John Earman, 1942-）与格里莫尔（Clark Glymour）也涉猎了这一领域，发表了一篇题为"爱因斯坦与希尔伯特：广义相对论历史上的两个月"（Einstein and Hilbert: Two Months in the History of General Relativity）的文章。由于当时希尔伯特与爱因斯坦的通信已被公布，因此厄尔曼与格里莫尔的文章包含了一些辨析性的内容。不过，侧重点和风格虽各有所异，那两组研究的结论是大体相同的，那就是基本肯定了希尔伯特先于爱因斯坦得到了广义相对论场方程。另外，那两组研究也肯定了希尔伯特与爱因斯坦在提出场方程的过程中虽有过交流，基本工作仍是彼此独立的。1982 年，荷兰裔美国物理学家派斯（Abraham Pais, 1918-2000）在其颇具影响力的爱因斯坦传记《上帝是微妙的》（Subtle is the Lord）中也做出了大体相同的判断，即："爱因斯坦是广义相对论物理理论的唯一提出者，基本方程式的发现则应同时归功于他和希尔伯特"。

这些研究为早期的分歧作了"煞尾"。

但这种"煞尾"只维持了不太长的时间。1997 年，以色列特拉维夫大学（Tel-Aviv University）的科里（Leo Corry）、德国普朗克科学史研究所（Max Planck Institute for the History of Science）的雷恩（Jürgen Renn）以及美国波士顿大学（Boston University）的施塔赫尔（John Stachel）一同在著名学术刊物《科学》（Science）上发表了一篇短文，标题为"希尔伯特—爱因斯坦优先权纠纷的迟到的裁决"（Belated Decision in the Hilbert-Einstein Priority Dispute）。这篇短文以一份从哥廷根档案馆得到的希尔伯特的论文校样为依据，将

这一已尘封多年、堪称冷僻的陈年往事重新翻了开来，并引发了极大的争议。

五．校样风波

科里等人所得到的希尔伯特论文校样与发表稿一样，标注了曾在 1915 年 11 月 20 日的会议上作过报告。除此之外，它还带有一个打印日期：1915 年 12 月 6 日，以及希尔伯特手注的说明“第一遍校样”（参阅下图），从而是一份比发表稿更早的文件。这一文件的发现，在一定程度上填补了研究这一课题所面临的早期文献空白。

通过对校样的研究，科里等人发现了希尔伯特在撰写发表稿过程中所做的若干修改，其中既包括逻辑结构的调整，比如校样包含三条公理 [注 2.1]，而发表稿——如“第三节”所述——只含两条；也包括文字表述的修正，比如在首次提到表示引力势的度规张量时，手写加注了“由爱因斯坦最早引入的”这一说明。这些修改的存在，表明希尔伯特论文的发表稿与 1915 年 11 月 20 日的报告是有差异的，而早期研究将两者混为一谈的做法则是有缺陷的。

注 2.1

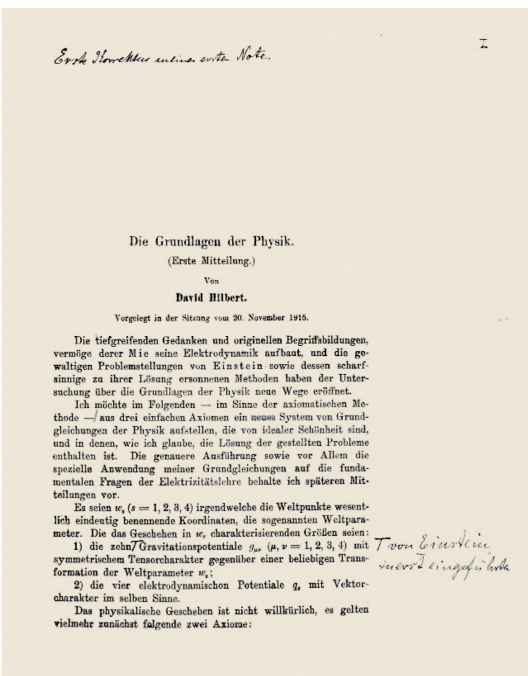
希尔伯特论文校样所包含的第三条公理被称为“时空公理”(axiom of space and time)，它将时空坐标限定为使能量守恒定律成立的坐标。科里等人认为这一公理的使用表明希尔伯特 1915 年 11 月 20 日的报告曾受到爱因斯坦早期观点的影响，认为广义协变性无法普遍成立，从而需要对时空坐标附加额外限定。这一解读后来受到了其他人的质疑，因与本文主题关系不大，就不详述了。希尔伯特本人在给克莱因的信中表示，在发表稿中舍弃这一公理乃是因为它“不够成熟”。

问题是：缺陷大到什么程度？

对此，科里等人做出了一个他们称之为“迟到的裁决”的有一定颠覆性的结论，那就是希尔伯特并未先于爱因斯坦提出广义相对论场方程。具体地说，科里等人发现在希尔伯特的论文校样中，只包含了我们在“第三节”中提到的两条物理结果中的第一条——即引力理论的作用量为 $K+L$，以及引力场方程可以通过对度规张量做变分而得到这一泛泛说明，却没有包含第二条——即引力场方程的具体形式。

以这一发现为基础，外加对另一处细节的分析（参阅 [注 2.8]），科里等人还提出了一个更具颠覆性的观点，那就是在希尔伯特提出广义相对论场方程的过程中，有可能“借鉴”过爱因斯坦的场方程。这样，他们就不仅逆转了希尔伯特与爱因斯坦得到广义相对论场方程的时间顺序，还冲击了早期研究中一致认定的希尔伯特与爱因斯坦彼此独立地得到广义相对论场方程的结论，从而在史学界引起了极大的争议。

颠覆性结论引发极大的争议乃是常见现象，本不足为



Erste Korrektur meiner ersten Note.

I

Die Grundlagen der Physik.

(Erste Mitteilung.)

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. November 1915.

Die tiefgreifenden Gedanken und originellen Begriffsbildungen, vermöge derer Mie seine Elektrodynamik aufbaut, und die gewaltigen Problemstellungen von Einstein sowie dessen scharfsinnige zu ihrer Lösung ersonnenen Methoden haben der Untersuchung über die Grundlagen der Physik neue Wege eröffnet.

Ich möchte im Folgenden — im Sinne der axiomatischen Methode — aus drei einfachen Axiomen ein ~~neues~~ System von Grundgleichungen der Physik aufstellen, die von idealer Schönheit sind, und in denen, wie ich glaube, die Lösung der gestellten Probleme enthalten ist. Die genauere Ausführung sowie vor Allem die spezielle Anwendung meiner Grundgleichungen auf die fundamentalen Fragen der Elektrizitätslehre behalte ich späteren Mitteilungen vor.

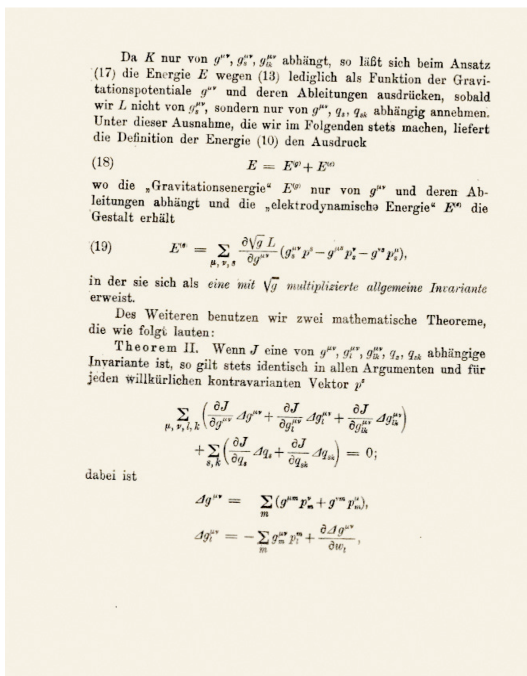
Es seien w_s $(s=1,2,3,4)$ irgendwelche die Weltpunkte wesentlich eindeutig benennende Koordinaten, die sogenannten Weltparameter. Die das Geschehen in w_s charakterisierenden Größen seien:

1) die zehn von Einstein zuerst eingeführten Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=1,2,3,4)$ mit symmetrischem Tensorcharakter gegenüber einer beliebigen Transformation der Weltparameter w_s;

2) die vier elektrodynamischen Potentiale q_s mit Vektorcharakter im selben Sinne.

Das physikalische Geschehen ist nicht willkürlich, es gelten vielmehr zunächst folgende zwei Axiome:

希尔伯特论文校样的第 1 页



Da K nur von $g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}_s, g^{\mu\nu}_{lk}$ abhängt, so läßt sich beim Ansatz (17) die Energie E wegen (13) lediglich als Funktion der Gravitationspotentiale $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen ausdrücken, sobald wir L nicht von $g^{\mu\nu}_s$, sondern nur von $g^{\mu\nu}, q_s, q_{sk}$ abhängig annehmen. Unter dieser Ausnahme, die wir im Folgenden stets machen, liefert die Definition der Energie (10) den Ausdruck

$$E = E^{(g)} + E^{(e)} \tag{18}$$

wo die „Gravitationsenergie“ $E^{(g)}$ nur von $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen abhängt und die „elektrodynamische Energie“ $E^{(e)}$ die Gestalt erhält

$$E^{(e)} = \sum_{\mu,\nu,s} \frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}}\left(g^{\mu\nu}_s p^s - g^{\mu s} p^\nu_s - g^{\nu s} p^\mu_s\right), \tag{19}$$

in der sie sich als *eine mit* $\sqrt{g}$ *multiplizierte allgemeine Invariante* erweist.

Des Weiteren benutzen wir zwei mathematische Theoreme, die wie folgt lauten:

Theorem II. Wenn J eine von $g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}_l, g^{\mu\nu}_{lk}, q_s, q_{sk}$ abhängige Invariante ist, so gilt stets identisch in allen Argumenten und für jeden willkürlichen kontravarianten Vektor p^s

$$\sum_{\mu,\nu,l,k}\left(\frac{\partial J}{\partial g^{\mu\nu}}\Delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial J}{\partial g^{\mu\nu}_l}\Delta g^{\mu\nu}_l + \frac{\partial J}{\partial g^{\mu\nu}_{lk}}\Delta g^{\mu\nu}_{lk}\right) + \sum_{s,k}\left(\frac{\partial J}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial J}{\partial q_{sk}}\Delta q_{sk}\right) = 0;$$

dabei ist

$$\Delta g^{\mu\nu} = \sum_m \left(g^{\mu m} p^\nu_m + g^{\nu m} p^\mu_m\right),$$

$$\Delta g^{\mu\nu}_l = -\sum_m g^{\mu\nu}_m p^m_l + \frac{\partial \Delta g^{\mu\nu}}{\partial w_l},$$

希尔伯特论文校样的第 8 页

奇。不过，这场有关希尔伯特与广义相对论场方程的争议却有一个奇特之处，那就是它的切入点出现在了一个几乎没人猜得到的地方。用旁观者的眼光来看，科里等人的研究中有一样东西堪称铁证，那就是希尔伯特的论文校样，这也是他们整篇文章的核心证据。但出人意料的是，争议的切入点居然就出现在了这核心证据上，并演变成了一场风波！

科里等人的短文发表后的第二年（1998 年），加州理工学院（California Institute of Technology）的爱因斯坦文献专家索尔（Tilman Sauer）发表了一篇题为“发现的相对性：希尔伯特关于物理学基础的第一份笔记”（The Relativity of Discovery: Hilbert's First Note on the Foundations of Physics）的文章。在这篇文章中，他披露了一个令人吃惊的事实，那就是希尔伯特论文校样的第 7、8 两页（那是同一页的正反面）的上方有一部分是缺失的（参阅上页图），而对引力场的作用量或场方程的叙述——如果有的话——恰好位于第 8 页的缺失部分中！

这情节简直赶上武侠小说了——在古龙小说《陆小凤传奇之金鹏王朝》中陆小凤怀疑有人冒充大金鹏王，判断的方法是查验脚趾，因为真的大金鹏王是六趾。但当陆小凤揭开了盖在大金鹏王腿上的毯子时，发现他的双腿是锯掉的！

索尔虽披露了这一缺失，却未作发挥，只简单地假定为是希尔伯特本人为了“偷懒”将之裁贴到了其它地方以节省时间[注 2.2]。但几年之后，这一缺失却不仅引发争议，而且演变成了风波。2003 年，美国内华达大学（University of Nevada）的物理学教授温特伯格（Friedwardt Winterberg）发表了一篇题为“论‘希尔伯特 - 爱因斯坦优先权纠纷的迟到的裁决’”的文章，对科里等人的短文进行了严厉驳斥，并对希尔伯特论文校样中的缺失作了阴谋论解读，认为缺失乃是近期发生的蓄意行为，目的是抹杀希尔伯特对广义相对论的贡献。这一阴谋论解读得到了另外几位作者的响应，比如美国作者毕尔克尼斯（Christopher Bjerknes）和德国作者沃恩茨（Daniela Wuensch）在分别于 2003 年和 2005 年出版的书中，对这一“阴谋”进行了详细剖析，甚至像福尔摩斯还原犯罪过程一样，“还原”了“阴谋”的各个环节，其中包括采用何种工具，以何种方式裁去文字，其间犯过何种错误，采取过何种补救措施等。他们甚至详细“还原”了“作案者”的心理活动。

这些阴谋论解读因细节丰富到了可笑的地步，就不在这里重复了。它们的致命伤不仅在于缺乏与细节相匹配的证据，更在于无法解释“作案动机”，即为何有人甘冒身败名裂的风险来对希尔伯特的论文校样做手脚？阴谋论者认为那是为了能提出如科里等人所提出的那种颠覆性的观点。但事实上，且不说在这一冷僻领域中提出颠覆性观点的收益与身败名裂的巨大风险根本就不成比例，即便真想提出颠覆性观点，也完全没必要做那样的手脚。因为在对缺失部分的篇幅及上下文的内容进行分析之后，史学界已提出了极强的分析理由，表明缺失部分只包含引力理论的作用量，而不包含引力场方程。这首先是因为引入后者及相关说明所需的额外篇幅绝非缺失部分所能容纳（发表稿中相应内容的篇幅也印证了这一点）；其次还因为在后文提到缺失部分中的公式时，表示由它对度规张量做变分可得到引力场方程，这说明缺失部分包含的是作用量，而不是场方程（发表稿同样印证了这一点，引力场方程是在作出上述表示之后才给出的）。这一方面说明科里等人的核心证据虽一度成为争议的切入点，由铁证蜕变成了分析证据，实质内容却并无问题；另一方面也说明提出如科里等人所提出的那种颠覆性观点，根本就无需对校样作手脚[注 2.3]。此外，还有一点对阴谋论者很不利，那就是除无需对校样作手脚的科里等人外，这一领域并无其他人提出过类似的颠覆性观点（因此阴谋论的影射对象是极为鲜明的），从而根本找不到能从“阴谋”中获益的“作案者”，阴谋论的荒谬也就不言而喻了。

另外有一点需要指出的是，阴谋论者在驳斥科里等人

注 2.2

这一说法并非全无依据，因为希尔伯特曾做过类似事情，即从一篇文稿中裁去一部分内容，贴到其它地方以节省时间。

注 2.3

不过，科里等人的短文只字不提校样中的缺失，依然是一件奇怪的事情。有些史学家猜测科里等人撰写论文时校样仍是完整的。但毕尔克尼斯声称自己曾写信向作者之一的施塔赫尔求证过，后者表示之所以未提校样中的缺失，乃是因为那篇短文只是一份不完整的初步报告 (施塔赫尔等人在 2002 年确实发表过更详细的文章，其中提到了校样中的缺失)。这一信息如果可靠，则表明科里等人撰写短文时校样中的缺失已经存在，从而他们以陈述事实的语气来陈述校样中不含引力场方程这一需分析才能得到的结论就显得难以理解。施塔赫尔的回答，即那篇短文只是一份不完整的初步报告，也并不能自圆其说 (比如毕尔克尼斯就指出该回答与短文标题中的“迟到的裁决”那样的强势用语不相吻合)。但奇怪归奇怪，这件事情无论如何上升不到阴谋论的高度 (因为科里等人的短文根本无需“阴谋”来作后盾)。

注 2.4

阴谋论者中的有些人原本就对爱因斯坦持有很负面的看法。比如毕尔克尼斯早在 2002 年就出版过一本书，书名为《爱因斯坦：无可救药的剽窃者》(Albert Einstein: The Incorrigible Plagiarist)。说到毕尔克尼斯，还有必要提到这样一点，那就是此人持有一些通常由妄想家持有的观念，比如认为人类正受到共济会 (Freemasonry) 等组织的威胁，而他自己的知识是拯救人类所必需的。

时，自己也提出了一个颠覆性观点，那就是明示或暗示爱因斯坦在提出广义相对论场方程的过程中，有可能“借鉴”过希尔伯特的场方程[注 2.4]。这一观点与科里等人的恰好相反，却同样冲击了早期研究中一致认定的希尔伯特与爱因斯坦彼此独立地得到广义相对论场方程的结论。这一对“互为镜像”的颠覆性观点，我们将在后文中加以讨论。

阴谋论提出后，被作为影射对象的科里等人在普朗克科学史研究所（即作者之一的雷恩所在的研究所）发表了一份针对温特伯格的措辞激烈的答复，不仅指责温特伯格的文字风格偏执（paranoid），而且将其观点与昔日纳粹德国的反相对论运动联系起来，指控其试图重回纳粹时代反“犹太物理学”的老路。至此，争议演变成了风波。科里等人的这份答复因涉嫌人身攻击而遭到温特伯格的抗议，后来被普朗克科学史研究所“和谐”掉了，取而代之的是一份以研究所名义发表的对双方争议保持中立的声明。

由希尔伯特的论文校样引发的风波就介绍到这里，其基本结论是，希尔伯特的论文校样只包含引力理论的作用量，而不包含引力场方程。

六 . 信件辨析

由科里等人的短文引发的争议中，虽出现了荒谬的阴谋论和令人遗憾的人身攻击，却也涉及了一些细节性的辨析，且引起了不少认真讨论。接下来我们就对细节性辨析作一些介绍。

细节性辨析主要集中在对几封信件的解读上。其中第一封是 1915 年 11 月 18 日爱因斯坦给希尔伯特的信。这封信的背景是：希尔伯特于 11 月 13 日写信邀请爱因斯坦出席自己的报告，并表示该报告将对爱因斯坦提出的“大问题”（great problem）给出一个与爱因斯坦完全不同的公理化解答；爱因斯坦于 11 月 15 日回信以胃痛和疲惫为由婉拒；11 月 16 日，希尔伯特给爱因斯坦发了一张如今已遗失了的明信片。爱因斯坦 11 月 18 日的信就是对该明信片的回复，其中包含这样的文字：

> 您给出的体系——就我所见——与我最近几个星期发现并向科学院报告过的完全一致。困难之处并不在于找到 $g_{\mu\nu}$ 所满足的广义协变方程，因为这可以在黎曼张量的帮助下很容易地得到，而是在于证明那些方程是一种推广，即对牛顿定律的简单而自然的推广。

针对希尔伯特表示自己的解答与爱因斯坦完全不同这一点，爱因斯坦这段文字有明显的宣示优先权并强调（自己的）物理重于（希尔伯特的）数学的意味。这段文字很早就引起过关注，但自科里等人用希尔伯特的论文校样推翻了原先基于发表稿作出的“希尔伯特先于爱因斯坦提出广义相对论场方程”的结论之后，这段文字有了更重要的地位，被一些人视为了希尔伯特曾在 11 月 16 日的明信片中给出过广义相对论场方程的间接证据（因为否则的话，爱因斯坦所说的“完全一致”就失去了比较对象）。由于明信片比论文校样更早，假如它包含了场方程，那么希尔伯特就依然是先于爱因斯坦得到了广义相对论场方程。比如温特伯格就表示爱因斯坦的这段文字“证明了希尔伯特先于爱因斯坦得到了正确的场方程”；沃恩茨则以这段文字为由，用肯定的语气列举了希尔伯特明信片的内容，其中包括场方程。

但细究起来，事情却又不那么简单，因为爱因斯坦写下这段文字时他自己尚未得到正确的场方程。他当时以为正确的乃是一星期前（11 月 11 日）发表的题为“关于广义相对论（补遗）”[On the General Theory of Relativity（Addendum）] 的短文中提出的错误方程：$R_{\mu\nu}=-\kappa T_{\mu\nu}$，它与正确方程之间相差一个正比于曲率标量的项：$-½g_{\mu\nu}R$[注 2.5]。这就产生了一个问题：既然爱因斯坦尚未得到正确的场方程，那么他所说的“完全一致”究竟是什么意思呢？对此，有人提出，是因为爱因斯坦当时正处于——用他自己的话说——“一生中最激动、最紧张的时期之一”，没时间仔细推敲希尔伯特的场方程，从而误以为它与自己的（错误的）场方程相一致。至于这种“误以为”的根源，有人认为是单纯的粗心大意，即漏看了希尔伯特的（正确的）场方程所多出来的 $-½g_{\mu\nu}R$

注 2.5

不难证明，$-½g_{\mu\nu}R$ 在能量动量张量的迹 $T=0$ 时为零，因此爱因斯坦的场方程在一般情形下虽是错误的，在 $T=0$ 时却成立。这一点爱因斯坦自己也有所察觉，因为他发现自己的场方程在 $T\neq 0$ 时会出现问题（无法满足能量动量守恒）。为避免这一问题，他破天荒地短暂接受了电磁观（因为电磁场的能量动量张量满足 $T=0$，而电磁观意味着物质起源于电磁，从而保证了物质场的能量动量张量也满足 $T=0$）。另外要指出的是，这一错误场方程其实三年前就由爱因斯坦与格罗斯曼 (Marcel Grossmann) 一同提出过，只是因为计算牛顿极限时出现错误而遭到了放弃（这是爱因斯坦犯低级错误的一个例子）。爱因斯坦在 11 月 18 日的信中特意强调了这一点（目的也许是巩固优先权），从而证实了他信中所指的自己的场方程乃是这一错误方程。

注 2.6

从逻辑上讲还有一种可能性，那就是希尔伯特在明信片中给出了一个跟爱因斯坦错得一模一样的场方程。不过，由于希尔伯特的任何文稿中都从未出现过那样的错误方程，其理论体系中也看不到出现这种错误的温床，忽略这一可能性是有较充足的理由的。

项；也有人认为是爱因斯坦注意到了 $-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ 项在能量动量张量的迹 $T=0$ 时为零，而他当时恰好短暂地接受了能保证 $T=0$ 的电磁观（参阅 [注 2.5]），从而认为该项的有无并不重要 [注 2.6]。

这后一种猜测不无道理，在早期研究中也确实是对爱因斯坦所说的“完全一致”的合理解释。但希尔伯特论文校样的发现却为这一猜测带来了疑问，因为这一猜测假定了希尔伯特在 11 月 16 日的明信片中给出过场方程。如果那样的话，为什么在比明信片稍晚的论文校样中反而没有场方程呢？对此，有人认为是场方程在希尔伯特心中没什么重要性。但这种说法是没有说服力的，因为希尔伯特若果真认为场方程没什么重要性，又怎会在小小的明信片中都不忘记写上呢？这些问题的存在，使得“明信片包含场方程”这一假定陷入了窘境。如果小结一下的话，那么这一假定的有利之处是可以解释爱因斯坦回信中的“完全一致”这一说法，不利之处则是无法解释论文校样不包含场方程。两者相比，不利之处显得更为突出，因为对“完全一致”这一说法可以有多种解释（下面就将给出另外一种），而且基于“明信片包含场方程”这一假定所做的解释虽不无道理，却也仅仅是不无道理而已；而论文校样不包含场方程这一点在“明信片包含场方程”的假定下却几乎不存在合理解释（尤其是从时间上讲，该明信片应该是对论文校样的概述，从而更不可能包含超乎后者的内容）。因此，“明信片包含场方程”这一假定虽被一些人寄予厚望，可靠性却并不高。

那么，希尔伯特的明信片究竟包含什么呢？从上面的分析来看，更有可能的只是引力理论的作用量，以及引力场方程可以通过对度规张量做变分而得到这一泛泛说明，而并不包含场方程。这不仅与论文校样相一致，而且也同样有可能解释“完全一致”这一说法。因为引力场的作用量对 $g^{\mu\nu}$ 的变分，若没时间推敲的话，是有可能被误认为或错算成 $R_{\mu\nu}$，从而与爱因斯坦的（错误的）场方程相一致的（事实上，除去无贡献的全微分项，作用量密度 R 的变分所给出的恰好是 $R_{\mu\nu}$，$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ 则来自不变体积元中 $\sqrt{g}$ 的变分）。而且爱因斯坦当时甚至认为自己的（错误的）场方程是“唯一可能的广义协变方程”（他在 11 月 18 日的信中就强调了这一点），从而还有可能仅凭两者都广义协变这一特点就粗略地判断两者一致。当然，有人也许会说：这种低级错误是爱因斯坦有可能犯的吗？对此当然谁也不敢肯定。高手虽然会犯低级错误（关于爱因斯坦犯低级错误的一个例子，参阅 [注 2.5]），但没有铁证谁也不敢肯定某个特定的低级错误是高手犯的，而只能猜测，这是此类历史探究所无法避免的不确定性。但上述可能性比起爱因斯坦漏看希尔伯特场方程中的 $-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ 项来，恐怕还是大得多的可能性。另外，在我看来还有一个未被其他作者注意到的理由，可以支持希尔伯特的明信片不包含场方程这一结论，感兴趣的读者可以参阅 [注 2.10]。

另一封引起广泛讨论的信件则是爱因斯坦 1915 年 11 月 26 日（即得到他自己的正确场方程的第二天）给好友仓格尔（Heinrich Zangger）的信，其中包含这样的文字：

> 这一理论的美丽是无可比拟的，然而只有**一位**同事真正理解了它，而他正以一种聪明的方式试图“分享”它（亚伯拉罕的表述）。在我的个人经历中，从未有比这一理论及相关一切所遭遇的更好地让我见识到了人性的卑劣。

这封信转译自《爱因斯坦全集》（The Collected Papers of Albert Einstein）的英译部分，其中“分享”一词来自英译 partake（德文原词为 nostrifizieren，另一种常用的英译为 nostrify，含义为“吸纳”），对该词的引号来自原文。“亚伯拉罕的表述”是指德国大学将其它大学的学位“吸纳”为自己学位的做法，其中的“亚伯拉罕”是指经典电子论的代表人物、德国物理学家亚伯拉罕（Max Abraham）。“卑劣”一词则来自英译 wretchedness。撇开可能因翻译而受损的精微词义不论，关于这段文字，有两点是史学界公认的：一是“一位同事”指的是希尔伯特（对“一位”的着重来自原文）；二是这段文字有抱怨希尔伯特抢夺荣誉之意。除这封信外，爱因斯坦 1915 年 11 月 30 日给好友贝索（Michael Besso）也写了一封信，其中提到“我的同事在此事中表现得很丑恶”（“丑恶”一词来自英译 hideously），也印证了上述抱怨。

这些信也被一些人解读为希尔伯特先于爱因斯坦得到广义相对论场方程的证据，比如德国康斯坦茨大学（University of Konstanz）的物理学教授艾伯纳（Dieter W. Ebner）在 2006 年发表的文章“希尔伯特如何先于爱因斯坦发现爱因斯坦方程及对希尔伯特校样的伪造”（How Hilbert has found the Einstein equations before Einstein and forgeries of Hilbert's page proofs）中就这样解释爱因斯坦的愤怒：“他必定对自己为解决‘大问题’工作了八年，而希尔伯特只用几个星期就先于他优雅地找到答案感到非常愤怒。爱因斯坦的愤怒表明希尔伯特 11 月 16 日的明信片对他有过显著帮助。”这种解释的逻辑是：倘若希尔伯特没有先于爱因斯坦得到广义相对论场方程，爱因斯坦就不会如此愤怒，因此爱因斯坦的愤怒反证出了希尔伯特先于他得到广义相对论场方程。

这种解读的最大问题，除采信了希尔伯特明信片包含广义相对论场方程这一本身就并不可靠的假定外，还与世所公认的爱因斯坦人品有着巨大矛盾。因为假如这种解读成立，那么爱因斯坦就不仅“借鉴”了希尔伯特的场方程，而且还在给朋友的信中倒打一耙，反诬希尔伯特“丑恶”，

其人品可就不是一般的无耻了。在没有铁证之前，对世所公认的爱因斯坦人品做出如此颠覆性的推测，是极度草率的。因此，这种以爱因斯坦的抱怨信为依据反证希尔伯特先于爱因斯坦得到广义相对论场方程的做法，是非常可疑的。相反，如果我们认为世所公认的爱因斯坦的人品更有公信力的话，倒是恰恰应该由抱怨信推证出爱因斯坦不可能“借鉴”希尔伯特的场方程。

而更平和的说法也许是，无需对爱因斯坦的人品作任何极端假设，就有很多理由可以解释爱因斯坦为什么会写下那样的抱怨信。比如前面提到的误以为希尔伯特的体系与他自己的“完全一致”（如前所述，这并不意味着希尔伯特在明信片中给出了场方程），就有可能对处于冲刺阶段的爱因斯坦造成极大的危机感和恼怒感，因为那意味着希尔伯特这位听了他几次报告后半路杀出的竞争者有可能分享优先权。某些传记作者喜欢渲染爱因斯坦对名利的超脱，其实爱因斯坦起码对广义相对论的优先权是非常在乎的，别说希尔伯特，就连对昔日的“亲密战友”格罗斯曼的贡献，他也曾在 1915 年 7 月 15 日给索末菲的信中近乎冷酷地表示：“格罗斯曼永远无法宣称是［广义相对论的］共同发现者，他只是在数学文献方面引导过我，而对结果没有任何重要贡献。”[注 2.7] 对格罗斯曼尚且如此，希尔伯特这样一个“陌生人”分享优先权的可能性，自然不会让爱因斯坦开心，在给朋友的信中有所流露也就不足为奇。他信中的措辞虽然严苛，但与对格罗斯曼的评价相比，考虑到彼此关系的亲疏之别，并不能算出格。而且他不仅隐去了希尔伯特的名字，所选择的倾诉对象也都是圈外人士（仓格尔是法医学教授，贝索是专利局职员）。更何况，他当时恐怕不会想到自己四年后会成为每封私信都被人细细推敲的公众人物。将这些因素综合起来，那两封抱怨信并没有什么不可理解的地方，需要靠颠覆爱因斯坦的人品，及采信希尔伯特明信片包含广义相对论场方程那样的假定才能解释。

以上就是对受到较多关注的爱因斯坦信件的分析，其基本结论是：爱因斯坦的信件并不构成对“希尔伯特先于爱因斯坦提出广义相对论场方程”的有效支持。

注 2.7

爱因斯坦在晚年时对格罗斯曼表示出了更多的感激。比如 1936 年格罗斯曼去世后，爱因斯坦在给格罗斯曼遗孀的信中表示“感谢他（格罗斯曼）和他父亲的帮助，…… 要不然，即使未必死去，我也会在智力上被摧毁了。”而在爱因斯坦自己去世前一个月所撰的回忆中，他则写道：“我需要在自己在世时至少再有一次机会来表达我对格罗斯曼的感激之情”。不过，即使在这些表示中，他也没有在广义相对论的贡献上给予格罗斯曼更高的评价。

七．“借鉴”之争

在前文中，我们多次触及了希尔伯特与爱因斯坦是否彼此独立地得到广义相对论场方程的问题。这个问题在早期研究中曾有过肯定答案，但在科里等人的短文发表后却出现了两种针锋相对的否定看法：一种是认为希尔伯特有可能“借鉴”了爱因斯坦的场方程；另一种则认为爱因斯坦有可能“借鉴”了希尔伯特的场方程。下面我们就对这两种观点做一些介绍与分析。

认为希尔伯特有可能“借鉴”了爱因斯坦场方程的人从某种意义上讲，是早期就有过的诸如“希尔伯特的工作只是用变分原理对爱因斯坦的工作作了重新表述”（参阅第四节）之类泛泛看法的延续。只不过利用希尔伯特的论文校样不包含引力场方程这一新证据，具体提出了希尔伯特在看到爱因斯坦 11 月 25 日的论文之后才添加场方程，且添加过程“借鉴”了爱因斯坦场方程的观点。这种观点的前半部分从现有资料来看是成立的，因为希尔伯特的论文确实是在校样之后才添加场方程的，不仅时间上晚于爱因斯坦 11 月 25 日的论文，而且还援引了后者，从而表明希尔伯特看过爱因斯坦 11 月 25 日的论文（以希尔伯特当时对引力理论的关注，这是显而易见的）。在这种情况下，希尔伯特确实有可能因受到爱因斯坦 11 月 25 日论文的影响，而对自己的论文作出调整。不过，认为希尔伯特在添加场方程的过程中“借鉴”了爱因斯坦的场方程，却仍是缺乏依据的。

在说明这一点之前，让我们稍稍离题一下，先介绍另一个本身也值得一提的争议。科里等人的短文发表之后，有人提出了这样一个观点，那就是希尔伯特既然给出了广义相对论的作用量，就应该算是给出了场方程，因为后者不过是前者的变分而已，而且那变分用某些持这一见解的人的话说，乃是“普通研究生就能完成的常规练习”。这个说法有道理吗？应该说既有道理又没道理。说它有道理，是因为作用量确实可以算是间接确定了场方程，而变分计算也确实不是很困难的问题；说它没道理，则是因为如今很简单的东西在初次探索时未必简单。比如广义相对论的牛顿极限如今正是“普通研究生就能完成的常规练习”，当年却让爱因斯坦和格罗斯曼栽了跟斗（参阅 [注 2.5]）。广义相对论中的变分计算也是如此，起码在当年绝非是“普通研究生就能完成的常规练习”（参阅 [注 2.10]）。另外，对广义相对论来说，场方程是一切物理计算的基础，重要性远高于作用量，这一点与现代读者所熟悉的量子场论之类以作用量为核心的理论完全不同。因此，在广义相对论的场方程尚未被提出之时，将它的提出归附于作用量的提出是很不恰当的。

现在回到希尔伯特对场方程的推导上来，这一推导实质上就是计算变分。如上所述，这在当年绝非是“普通研究生就能完成的常规练习”。但尽管如此，要说像希尔伯特那样的数学大师在决定由变分原理推导场方程时，会要“借鉴”爱因斯坦的场方程，却是令人难以置信的。而且，爱因斯坦在短短一个月的时间里就提出了好几种不同的场方程，我们这些事后诸葛虽然知道 11 月 25 日那个是正确的，对当年的希尔伯特来说却未必显而易见，他又怎会将自己的荣誉压在上面，“借鉴”其结果而不亲自计算变分呢？不仅如此，爱因斯坦对正确场方程的推导——如第三节所提到，并即将介绍的——有一定的“歪打正着”的意味，与希尔伯特对严密性的要求相距甚远，极不可能使他萌生“借鉴”之意。因此，希尔伯特得到广义相对论场方程的时间虽晚于爱因斯坦，说他“借鉴”爱因斯坦的场方程却是缺乏依据的[注 2.8]。

认为爱因斯坦有可能“借鉴”希尔伯特场方程这一观点则基本上是近年才出现的。在早期，哪怕是曾经显著贬低过爱因斯坦狭义相对论贡献的英国数学家惠特克（Edmund Whittaker），在其 1953 年出版的《以太和电学的历史》（A History of the Theories of Aether and Electricity）的第二卷中述及广义相对论时，也不曾提出过那样的观点。持这一观点的人除了利用我们前面辨析过的那些信件外，还提出了一个理由，那就是爱因斯坦给出正确的场方程时没有进行推导。前文提到过的艾伯纳、哥廷根大学的理论物理学家托德洛夫（Ivan T. Todorov）等人都持此见。但这种理由却是相当粗心的，因为事实上，爱因斯坦在给出正确的场方程时是进行了推导的，只不过那推导有一定的歪打正着之处。

粗略地说，爱因斯坦的推导是这样的：利用 $\sqrt{-g}=1$ 这一他在那些年时常使用的简化条件，将真空场方程 $R_{\mu\nu}=0$ 用一个被他称为引力场的“能量分量”（energy components）的量 $t_{\mu\nu}$ 来改写，在改写的结果中出现了 $t_{\mu\nu}-½g_{\mu\nu}t$ 这一组合。然后他假定物质场的能量动量张量 $T_{\mu\nu}$ 与引力场的“能量分量” $t_{\mu\nu}$ 应该以相同方式出现在理论中。这就导致了 $T_{\mu\nu}-½g_{\mu\nu}T$ 这一构成正确场方程 $R_{\mu\nu}=-k(T_{\mu\nu}-½g_{\mu\nu}T)$ 的关键组合[注 2.9]。之所以说这一推导有一定的歪打正着之处，是因为引力场的“能量分量” $t_{\mu\nu}$ 并非张量，而物质场的能量动量张量 $T_{\mu\nu}$ 则是张量，假定两者以相同方式进入理论是没有充分依据的。爱因斯坦自己也在 1916 年 1 月 17 日给洛仑兹的信中承认：“基本表述终于正确了，但推导仍是糟糕的”[注 2.10]。确实，爱因斯坦直至 11 月 25 日为止的所有广义相对论论文在结构上都远不如希尔伯特的论文严整。但正是那种不严整，与他过去若干年中近乎于用试错法寻找场方程的努力一脉相承，从而深具“爱因斯坦特色”（这一点爱因斯坦自己也知道，并在给洛仑兹的那封信中表示“我那一系列有关引力的论文是一条错误足迹的链条”）。更何况，爱因斯坦“借鉴”希尔伯特场方程的前提是“希尔伯特先于爱因斯坦得到广义相对论场方程”，而如前所述，目前的证据并不支持这一前提。因此，认为爱因斯坦有可能“借鉴”希尔伯特的场方程也同样是缺乏依据的。

以上是对希尔伯特与爱因斯坦在推导场方程这一环节上是否相互“借鉴”的分析，其基本结论是：**希尔伯特与爱因斯坦在推导广义相对论场方程这一环节上是相互独立的。**

注 2.8

这里还有一个细节需要提一下，那就是希尔伯特论文的发表稿在给出场方程时写了这样一句话（已改用现代记号）：“利用在由 $g^{\mu\nu}$ 及其一、二阶微商构成的量中，$R_{\mu\nu}$ 是除 $g_{\mu\nu}$ 之外唯一的二阶张量，以及 R 是唯一的不变量这一事实，无需计算就可得到”。这句话被科里等人视为是希尔伯特没有亲自计算变分，从而有可能“借鉴”爱因斯坦场方程的证据。应该说，这一看法不无道理，因为仅凭这句话是得不到场方程的，还必须辅以能量守恒的要求。但以此认定希尔伯特“借鉴”了爱因斯坦的场方程，比起正文所述的相反理由来，是仍显薄弱的，因为这有可能只是希尔伯特采取的一种在他看来更容易传递给读者的表述方式。很难想象在这种严肃论文中，崇尚严密性的希尔伯特会不进行严密的计算，而“借鉴”爱因斯坦那屡经变更且推导很不严密的场方程。

注 2.9

广义相对论场方程有两种常用的等价形式，爱因斯坦当时得到的是 $R_{\mu\nu}=-k(T_{\mu\nu}-½g_{\mu\nu}T)$，希尔伯特得到的则是 $R_{\mu\nu}-½g_{\mu\nu}R=-kT_{\mu\nu}$（两者形式上的差别来自推导方法的截然不同，从而本身也体现了两人在这一环节上的独立性）。需要指出的是，爱因斯坦对场方程的推导在 11 月 25 日的论文中写得很简略（$t_{\mu\nu}$ 在该论文中被称为“能量张量”），在 1916 年的长篇综述“广义相对论基础”中才详细给出（$t_{\mu\nu}$ 的名称则改为了“能量分量”）。不过两篇论文的逻辑传承还是很明显的。

注 2.10

爱因斯坦给洛仑兹的这封信（以及两天后的另一封信）还有两个值得一提的地方：一个是在表示了“推导仍是糟糕的”之后，爱因斯坦开始叙述用作用量原理表述理论的尝试。这一点似乎间接证明了希尔伯特在 11 月 16 日的明信片中并未给出场方程。因为否则的话，爱因斯坦写信时由于已得到了正确的场方程，从而也应该已经意识到正确的场方程才与希尔伯特的相一致，以及希尔伯特的作用量是正确的（因为希尔伯特的场方程来自作用量）。但爱因斯坦给洛仑兹的这封信却丝毫没有显示出这种知识。另一个是他表示自己没有计算作用量对 $g^{\mu\nu}$ 的变分，因为那太复杂。这说明此类计算在当时绝非是“普通研究生就能完成的常规练习”（参阅第七节）。

八.尾声

至此，本文就接近尾声了。由希尔伯特论文校样激起的争议也许还不能算是尘埃落定，但倘若没有新的原始资料被发现，那么透过飞扬的尘土我们已可大致窥见结果。总体来说，与早期研究相比，以较高可信度被改变的结论只有一个，那就是希尔伯特并未先于爱因斯坦得到广义相对论场方程。早期研究中的其它结论，比如希尔伯特与爱因斯坦在推导广义相对论场方程这一环节上是彼此独立的，则虽有新争议，却不足以推翻早期结论；而“爱因斯坦是广义相对论物理理论的唯一提出者”（派斯语）则更是无可撼动。

如果考虑到一些人提出的“给出了广义相对论的作用量，就应该算是给出了场方程”这一并未完全没有道理的观点，对那段历史中的优先权部分也许可以作这样一个无争议的表述：希尔伯特最先得到了广义相对论的作用量。有意思的是，对这段历史的研究虽不无波折，学术界对若干术语的命名却似乎早就预见到了结果：广义相对论的场方程通常被称为爱因斯坦场方程（Einstein field equations），而作用量则被称为爱因斯坦 - 希尔伯特（或希尔伯特 - 爱因斯坦）作用量（最先得到作用量的虽是希尔伯特，爱因斯坦作为整个理论的奠基者，享有共同“冠名权”应该不算过分）。

在本文的最后，让我们提一下那段历史对希尔伯特与爱因斯坦个人关系的影响，爱因斯坦的抱怨信可能会让某些读者为这两位大师级人物的关系捏一把汗，担心他们之间会出现李杨之争那样的局面。不过幸运的是，爱因斯坦的抱怨信虽折射出对优先权的敏感，他的整体人品与智慧终究还是让他摆脱了优先权之争的泥潭。 而更值得称道的则是希尔伯特，他不仅在诸多场合公开承认广义相对论是爱因斯坦的理论，而且还在评选第三届波尔约奖（Bolyai Prize）时推荐了爱因斯坦，并提名使爱因斯坦当选了哥廷根数学学会（Göttingen Mathematical Society）的通讯会员（corresponding member）[注 2.11]。 1915 年 12 月 18 日，希尔伯特写信将当选消息告知了爱因斯坦。 两天后，爱因斯坦给希尔伯特回了这样一封信[注 2.12]：

> 感谢您友好地告知我当选了通讯会员。借此机会，我觉得有必要跟您说一件对我来说比这更重要的事情。我们之间近来有着某种我不愿分析其原因的不良感觉。我一直在努力抵御这种感觉带来的苦涩，并取得了完全的成功。我已在心中恢复了与您的往日友谊，并希望您也这样待我。两个已在一定程度上将自己从这个肮脏世界中解脱出来的真正的研究者若不能彼此欣赏，那将是一种真正的耻辱。

让史学界争议了近一个世纪的话题在那两位睿智的当事人之间，就这样放下了。

他们都放下了，我们还放不下吗？ 就让这封信也成为本文的终结吧。

注 2.11

这里所说的“哥廷根数学学会”在文献中有多个英译名，甚至有可能就是第二节中提到过的“哥廷根皇家科学院”。

注 2.12

关于爱因斯坦写这封信的原因，除回复希尔伯特的友好来信外，有史学家认为还有可能是因为他在此之前已看到了更强调他的贡献、且援引他所有论文的希尔伯特论文的修改稿，从而情绪有所缓和。另外，这封信的口气似乎意味着两人之间的“不良感觉”已达到了彼此察觉的程度。 派斯在《上帝是微妙的》一书中甚至转述了与爱因斯坦有过接触的美国物理学家斯特劳斯 (Ernst G. Straus) 提供的一条据说得自爱因斯坦的消息，声称那种“不良感觉”曾使希尔伯特给爱因斯坦写过辩解信，表示自己已不记得爱因斯坦的哥廷根演讲。这则消息在我看来有些八卦，因为很难相信希尔伯特会忘记由他亲自请来的爱因斯坦的哥廷根演讲，并以此为由进行辩解。那样的“辩解”不仅太过拙劣，而且只会火上浇油（因为那相当于进一步抹杀了爱因斯坦的贡献），完全不像希尔伯特的风格。

互联网数学开放教育发展近况

杨经晓

开头语

一年前，本刊登载了笔者《网上学数学》一文，介绍了网络开放数学课程。北京师范大学陈木法院士对互联网数学开放教育非常关心。前不久，笔者有幸受陈院士之邀，以互联网数学开放教育为题与陈木法院士，保继光、李仲来、唐梓洲、李增沪等教授进行了交流，从中获益匪浅。后对此次交流的内容进行了整理并形成本文，文中主要介绍了网络数学开放教育新的进展及发展现状，希望能有更多人关注网络数学教育，进一步提高我国网络数学开放教育的水平。

1 互联网开放教育发展概况

互联网开放教育是将教育资源（视频、教材、课件等）上传至互联网，实现教育资源的全球免费共享。这里的“开放”是指“免费”，互联网开放教育就是“网上免费教育”。由于中小学已逐步实现免费义务教育，因此网络开放教育一般是指高等教育的免费开放。

在知识爆炸的信息时代，人类对教育的需求日益强烈，但教育资源不足，费用也不断上涨，很多人被拒之于大学校门之外。据纽约美联储银行估计，美国人在助学贷款上欠债总额达到了1万亿美元，比全美国的信用卡债务还要多。在《时代周刊》对1000名美国人的调查中，80%的人认为在大学里受的教育抵不上所支付的学费。面对民众对接受优质高等教育的迫切需求和优质教育资源的稀缺及高昂的学费，从上世纪90年代起，有关国际组织发起了免费共享科学资源的开放获取（Open Access）运动，并发布了《布达佩斯开放获取宣言》和《柏林宣言》，联合国经济合作和发展组织和教科文组织也分别发布了《OECD宣言》与《科朗伯格宣言》。目前已有很多大学、科研机构及政府都宣布支持知识免费开放政策。

上世纪90年代，网上出现了网友上传的大学数学视频课程。由于当时的网速低，视频的分辨率低，只能下载后观看，加上课程来源少，网络开放教育发展一直停滞不前。网络开放教育发展的转机来自于本世纪初宽带上网的普及和视频网站的出现，解决了视频传输与存储问题，网络信息载体也由原来的文字和图片转向视频，网络开放教育也由网民自发行为发展为大学、企业、政府的参与，使课程数量激增，网络开放教育进入快速发展期。

到目前为止，还没有大学或机构准备开办完整的网络开放数学教育，只有零星的数学课程（称为开放课程资源或公开课）散布在互联网上。从表面看，互联网上的数学开放教育并不存在。但如果站在全网的角度，把整个互联网看成一个大学，综合全网的数学课程资源，可以提取出一个完整的数学课程体系，形成一个全网的从小学到大学的“网络开放数学教育”。

2 互联网开放教育的新进展

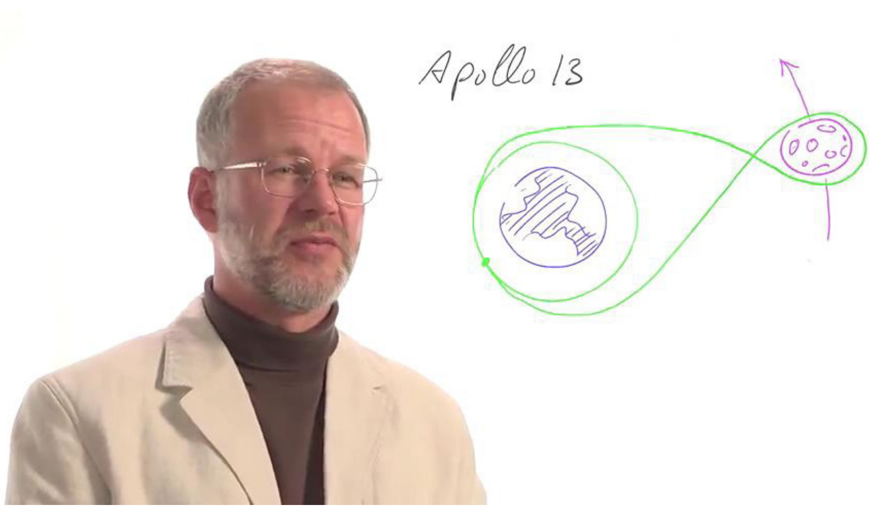
2.1 新的网络开放教育公司

汗学院的成功以及网络开放课程的热播，使网络教育成为热门的行业。自2011年来，涌现出一大批收费和免费的网络教育公司。如：Udacity、Coursera、EdX、2tor、ShowMe、Udemy、Grockit、Lynda、StraighterLine等。很多大学教授下海投身网络教育。这里介绍几个受欢迎的新型网络开放教育公司。

Udacity

2011年下半年，斯坦福大学特龙（Sebastian Thrun）教授和弗吉尼亚大学的史蒂文斯（David Stavens）教授等人辞去教职，成立了一所名为“Udacity”的网络教育公司（www.udacity.com）。特龙是知名的人工智能专家，也是谷歌公司Google X实验室的创始人和谷歌无人驾驶汽车的共同发明人。特龙在斯坦福大学开设的“人工智能”课程深受学生欢迎。仿照汗学院的方法，他将该课程免费上线，并通过电子邮件通知他人，结果头一天晚上就有5000人注册，不久就超过16万人，其中立陶宛学生就超过了斯坦福学生的总和。在学习中，有个阿富汗学生，为在网上完成作业，不惜冒险穿越战争危险区去上网。一位伊拉克单亲家庭的母亲，在家庭遭受悲剧打击时仍坚持上课。在选修此

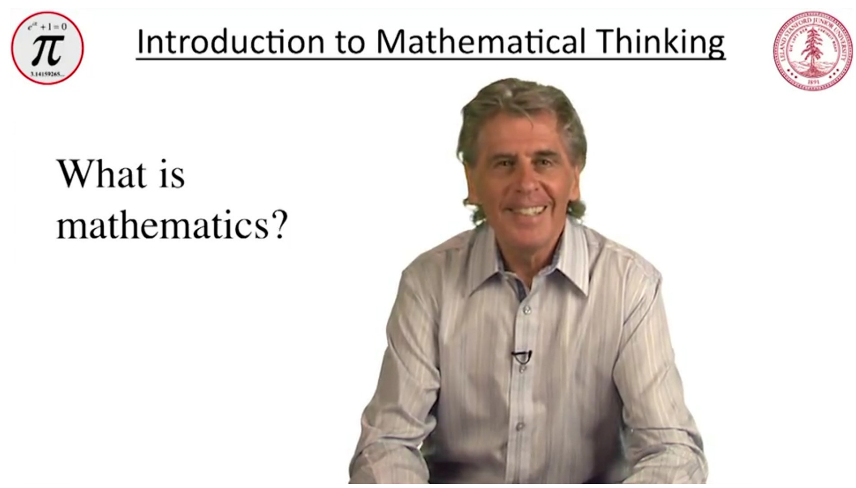
特龙



Udacity 公司 Loviscach 讲微分方程

课的斯坦福学生中，有3/4的人选择了网上学习，课程结束时，考试成绩前400名中没有一个来自斯坦福。这件事使特龙开始反思对传统教学和网络教学的认识。2012年1月，特龙决定离开斯坦福，专职从事网络开放教育。目前Udacity已推出了计算机、数学、物理、商务等专业的60门免费课程，网上学习者超过80万。学习者虽然分布在世界各地而从未谋面，却像同在一个教室的同学那样密切协作。2012年9月17日，巴基斯坦政府为封锁一部反穆斯林电影预告片而切断了YouTube的访问，中断了拉合尔（Lahore）市11岁女孩尼亚齐（Khadijah Niazi）正在进行的Udacity物理课期末考试。一心想在下周12岁前通过考试的尼亚齐心急如焚，她在课程讨论板上发了一个抱怨的帖子。不久就收到马来西亚和英国同学的帮助信息。一位观看此课的葡萄牙物理教师布里吉达（Rosa Brigída）企图帮助她绕过网络封锁，但没成功，只好晚上下载了所有的视频，然后上传到一个不受审查的照片分享网站上。第二天尼亚齐作为年龄最小的学生通过了这门成年人都颇感困难的期末考试。

吴恩达（左）与科勒

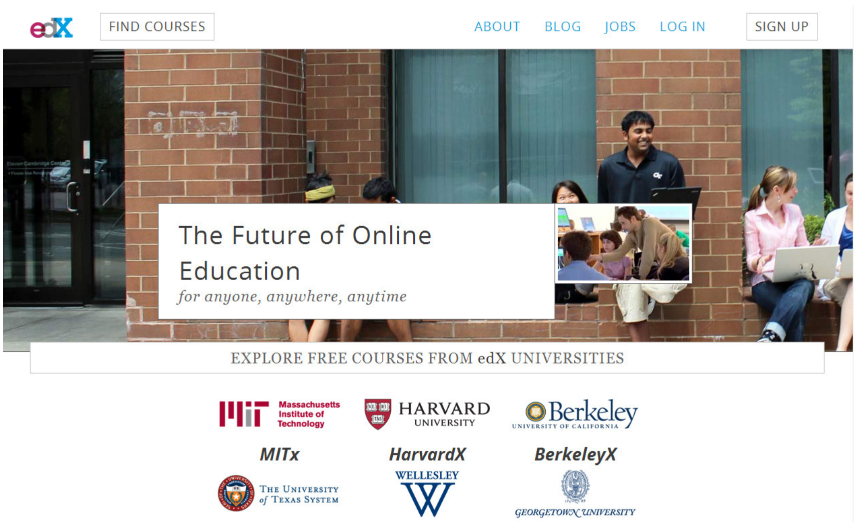


斯坦福大学Devlin讲数学思想（Coursera课程）

Coursera

几乎与Udacity同时，2012年4月，特龙的同事科勒（Daphne Koller）教授和吴恩达（Andrew Ng）副教授成立了名为“Coursera”的网络教育公司（www.coursera.org）。他们与普林斯顿大学、斯坦福大学、布朗大学、哥伦比亚大学、爱丁堡大学、多伦多大学、洛桑联邦理工学院、香港科技大学等几十所名校联手，开设了计算机、数学、商务、医学、工程等专业的200多门课程，有来自近两百个国家的一百多万学生注册学习。很多学生通过Coursera学到了新的知识，找到了更好的工作，提高了生活质量。在2011年日本大地震和海啸危机中，福岛核电站的程序员用在吴恩达的“机器学习”课程中学到的算法，在一定程度上缓解了核泄漏危机。谈到网络开放教育的作用，科勒认为有三点：“一，教育成为了人们基本的权利；二，终身学习成为可能；三，打开了创新之门，因为不可思议的人才在世界各地都同样存在。”

Coursera成立不到一年就得到业界的高度关注，《纽约时报》、《福布斯》等各大媒体都对其进行了报道，科勒还被邀请担任TED的主讲嘉宾。俄亥俄州立大学校长吉（Gordon Gee）说：“从合作伙伴就能看出一家公司怎么样，而Coursera的合作群体简直就是红衣主教团，其中包括一些美国最好的大学。”一些大学校长甚至开始担心，如果不和Coursera签约合作，自己学校的声誉就会受到影响。佐治亚理工学院“21世纪大学教育研究中心”主任德米罗（Richard A. DeMillo）说，“这像一场海啸，一切都很新，大家都在摸索着前进。但这项实验的潜在发展空间如此之大，很难想象有哪所像样的研究型大学不想参与。”



edX 主页

edX

2012 年 5 月，哈佛大学与麻省理工学院各投资 3000 万美元，联合成立了名为“edX”的数字教育平台（www.edx.org）。集中两校的师资力量，提供免费的网上课程，使上亿人受益。同时利用这个共享的教育平台，进行教学法研究，促进现代教学技术的应用。尽管麻省理工学院早就有开放课程，但 edX 对目前流行的开放式网络教育理念进行了新的拓展。采用智能网络技术，实现注册、讲授、作业、辅导、考试和提供证书等传统高校教育的全过程。

付了高额学费的学生家长曾对 edX 开办免费网络课程提出抗议，校方却认为这是改革旧教育方式的一次机会而坚持开课。最早开办的《电路和电子学》课程已有来自 160 个国家年龄为 14 至 74 岁的 15 万余学生参与学习。前不久，又有加州大学伯克利分校与德克萨斯大学加盟 edX，还有全球约 120 所大学有加盟的愿望，未来 edX 可能发展成为规模更大的新型网上虚拟大学。

2.2 新成立的国家开放大学

以上介绍的都是一些规模不大的虚拟网络大学，而一个国家级规模更大的网络开放大学实体已经出现，这就是最近成立的国家开放大学（位于北京五棵松）。它是在中央广播电视大学的基础上，通过互联网开展学历与非学历教育。其规划的优质课程超过两万门，聘请中外名师上万名，数字化图书千万册，数字资源总量达 1000TB，注册学生 450 万，支持千万级的访问。

大规模的网络开放教育的建设需要大量的人力物力投入，依靠政府财政的支持，国家开放大学可以实现长期稳定、大规模的可持续发展。

2.3 新一代网络教学模式

如果以 MIT 开放课程为第一代网络开放教育的话，以 Udacity、Coursera 与 edX 为代表的第二代大规模在线公开课程（mass open online course，简称 MOOC），重建了网络开放课程的制作标准，在课程制作模式和教学方式上都有很大变化。

第二代网络开放课程的设计采用符合人脑认知规律的授课策略，为网络教学而量身定做。视频制作采用宽屏高清和多媒体技术，增加了外景拍摄，通过高清晰画面和高保真的音质，使课程具有赏心悦目的观看效果。新增的交互功能，使学生可以在课程的讨论板上进行讨论与交流，在网上答题和考试；教师可以根据学生测验和考试的结果，及时修正教学内容或改进教学方法。很多网络教育机构都提供单科考试成绩和学习证书，已有大学考虑承认网络开放教育的学分。

国家开放大学

网络开放教育这些脱胎换骨的变化和焕然一新的面貌，得到学习者和教育界的好评。加州大学伯克利分校校长伯格诺（Robert Birgeneau）说，“我相信，大规模在线公开课程将从根本上使教育发生彻底变革”。

3 互联网数学开放教育发展现状

3.1 新增数学课程

在互联网开放教育发展的浪潮中，数学课程作为通用的基础课也呈现出快速增长的态势。表 1 ～表 3 列出了近期上线的数学开放课程和专题讲座。

表 1 非数学专业课程

课 程	主 讲	网 址
高等数学	天津工业大学樊顺厚	video.chaoxing.com/serie_400004705.shtml
微积分	普林斯顿大学 Adrian Banner	www.m-e-e-t.com/courses/150/study_course
高等微积分 II	中国海洋大学姚增善	video.chaoxing.com/serie_400005659.shtml
微积分一	俄亥俄州立大学 Jim Fowler	www.coursera.org/#course/calc1
单变量微积分	宾夕法尼亚大学 Robert Ghrist	www.coursera.org/#course/calcsing
多变量微积分	加州大学 Michael Hutchings	www.m-e-e-t.com/courses/296/study_course
逻辑学导论	斯坦福大学 Michael Genesereth	www.coursera.org/#course/intrologic
离散优化	墨尔本大学 Pascal Van Hentenryck	www.coursera.org/#course/optimization
线性和离散优化	洛桑联邦理工学院 Eisenbrand	www.coursera.org/#course/linearopt
离散数学	佩珀代因大学 Stan Warford	www.m-e-e-t.com/courses/1211/study_course
离散数学和概率论	哈佛大学 Umesh V. Vazirani	www.m-e-e-t.com/courses/1684/study_course
微分方程	汗学院 Salman Khan	www.m-e-e-t.com/courses/895/study_course
微分方程应用	Udacity 公司 Jorn Loviscach 等	www.udacity.com/wiki/downloads
行列式与空间解析几何	哈尔滨工程大学邱威	video.chaoxing.com/serie_400010094 shtml
场论与复变函数	西安电子科技大学梁昌洪	video.chaoxing.com/serie_400008115.shtml
矩阵与数值分析	大连理工大学张宏伟	video.chaoxing.com/serie_400008792.shtml
科学计算	华盛顿大学 J. Nathan Kutz	www.coursera.org/#course/scientificcomp
科学与工程计算	麻省理工学院 Gilbert Strang	www.m-e-e-t.com/courses/288/study_course
高等应用数学	哈尔滨工程大学罗跃生	video.chaoxing.com/serie_400008658.shtml
数学线性系统理论	哈尔滨工程大学罗跃生	video.chaoxing.com/serie_400010127.shtml
李群李代数纤维丛及规范场论应用	北京师范大学梁灿彬	video.chaoxing.com/serie_400004456.shtml
统计学一	普林斯顿大学 Andrew Conway	www.coursera.org/#course/stats1
泛函分析与变分原理	大连理工大学郭旭	video.chaoxing.com/serie_400008791.shtml
博弈论	英属哥伦比亚大学 Jackson 等	www.coursera.org/#course/gametheory
粒子群优化	国际群智能研究杂志史玉回	video.chaoxing.com/serie_400003756.shtml
数学思想导论	斯坦福大学 Keith Devlin	class.coursera.org/#course/maththink-

表 2 数学专业课程

课 程	主 讲	网 址
数学分析	东北师范大学白志东	video.chaoxing.com/serie_400004985.shtml
	厦门大学谭忠	video.chaoxing.com/serie_400015557.shtml
高等微积分(一)	台湾交通大学白启光	ocw.nctu.edu.tw/course_detail_3.php?bgid=1&gid=1&nid=45
高等微积分(二)		ocw.nctu.edu.tw/course_detail_3.php?bgid=1&gid=1&nid=46

课 程	主 讲	网 址
微积分作业演算(一)	台湾交通大学微积分教学组	ocw.nctu.edu.tw/course_detail_3.php?bgid=1&gid=1&nid=175
微积分作业演算(二)		ocw.nctu.edu.tw/course_detail_3.php?bgid=1&gid=1&nid=205
分析数学	东北师范大学张凯军	video.chaoxing.com/serie_400008543.shtml
高等代数	北京大学丘维声	video.chaoxing.com/serie_400015565.shtml
线性代数(一)	台湾交通大学庄重	ocw.nctu.edu.tw/course_detail_3.php?bgid=1&gid=1&nid=271
线性代数(二)		ocw.nctu.edu.tw/course_detail_3.php?bgid=1&gid=1&nid=361
代数学引论	南京大学秦厚荣	video.chaoxing.com/serie_400007873.shtml
抽象代数	南开大学邓少强	video.chaoxing.com/serie_400004478.shtml
	上海交通大学章璞	video.chaoxing.com/serie_400008049.shtml
	哈佛大学 Benedict Gross	www.m-e-e-t.com/courses/1189/study_course
高等(射影)几何	南京师范大学周兴和	www.youku.com/playlist_show/id_5345538.html
代数拓扑入门	新南威尔士大学 Wildberger	www.youku.com/playlist_show/id_17140075.html
离散微分几何	加州理工学院 Desbrun 等	www.youku.com/playlist_show/id_17202298.html
几何方法(微分流形)	不详	www.youku.com/playlist_show/id_5102986.html
数值分析	加州大学 Per-Olof Persson	www.m-e-e-t.com/courses/1683/study_course
计算机几何设计及分析	中国科技大学陈发来	video.chaoxing.com/serie_400007466.shtml
计算微分代数几何	大连理工大学张鸿庆	video.chaoxing.com/serie_400008789.shtml
控制论与系统辨识	大连理工大学冯恩民	video.chaoxing.com/serie_400008788.shtml
金融数学	北卡罗来纳州立大学 McCollum	www.m-e-e-t.com/courses/185/study_course

表 3 专题讲座

课 程	主 讲	网 址
中国古代最伟大的数学家刘徽	中国科学院郭书春	video.chaoxing.com/Serie_400007749.shtml
微积分魔术	中国科学院林群	video.chaoxing.com/serie_400007823.shtml
极限与连续 数学建模	西安交通大学王绵森等	video.chaoxing.com/serie_400007840.shtml
Wilson 非共形元的新进展	中国科学院石钟慈	video.chaoxing.com/serie_400005265.shtml
分数阶偏微分方程及其数值方法	应用物理与计算数学研究所郭柏灵	video.chaoxing.com/serie_400006612.shtml
分数噪音驱动的随机偏微分方程	堪萨斯大学胡耀忠	video.chaoxing.com/serie_400007723.shtml
退化椭圆偏微分方程	北京大学韩青	video.chaoxing.com/serie_400007479.shtml
一类 Landu-Lifshitz 方程式研究	密西根州立大学闫百胜	video.chaoxing.com/serie_400007873.shtml
几何与弦论	哈佛大学丘成桐	www.m-e-e-t.com/courses/1690/study_course
有理三角学	新南威尔士大学 Wildberger	www.youku.com/playlist_show/id_6403494.html
双曲几何		u.youku.com/user_video/id_UNzkzMjM3MzY=_order_1_type_1_page_1.html
二阶接触几何	北海道大学山口佳三	video.chaoxing.com/serie_400005910.shtml
非交换几何与 Groupoi 指标定理	华盛顿大学唐翔	video.chaoxing.com/serie_400007879.shtml
数学中的辫子与链环	新加坡国立大学吴杰	video.chaoxing.com/Serie_400003957.shtml
矢量从、示性类与 K 理论	波多黎哥大学李良青等	video.chaoxing.com/serie_400008115.shtml
K 理论 陈 -Connes 映射 Novikov 猜测	复旦大学郁国梁	video.chaoxing.com/serie_400007882.shtml
强不可约算子和 K 理论	河北师范大学蒋春澜	video.chaoxing.com/serie_400007877.shtml
C* 代数简介	俄勒冈大学林华新	video.chaoxing.com/serie_400007874.shtml

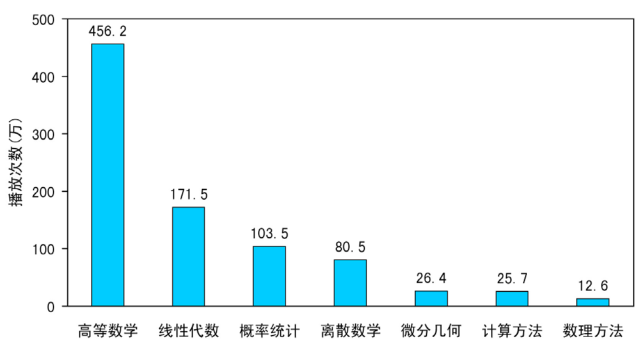
课 程	主 讲	网 址
粗几何与 C* 代数简介	华东大学王勤	video.chaoxing.com/serie_400007876.shtml
套代数与 C* 代数	吉林大学纪友清	video.chaoxing.com/serie_400007875.shtml
MF 代数	新罕布什尔大学沈隽浩	video.chaoxing.com/serie_400007878.shtml
群因子简介	大连理工大学房军生	video.chaoxing.com/serie_400007880.shtml
密度矩阵重整化群及数值计算	康乃尔大学罗洪刚等	video.chaoxing.com/serie_400004593.shtml
三角 Kagome 格点上的自旋系统	中山大学姚道新	video.chaoxing.com/serie_400005533.shtml
二维共形量子场论的数学化	罗格斯大学黄一知	video.chaoxing.com/serie_400006297.shtml
计算方法在天体物理中的应用	鲁汶大学 Keppens	video.chaoxing.com/serie_400007764.shtml
DG 法 Lax-Wendroff 时间离散过程	厦门大学邱建贤	video.chaoxing.com/serie_400005956.shtml
自适应 RKDG 方法		video.chaoxing.com/serie_400005520.shtml
计算几何——算法设计分析	北京理工大学周培德	video.chaoxing.com/serie_400003437.shtml
最优化新方法新进展	大连理工大学张立卫	video.chaoxing.com/serie_400008790.shtml
聚类网络的某些尺度可变性	武汉大学陆君安	video.chaoxing.com/serie_400006552.shtml
复杂系统模拟的离散模型	东京大学陈昱	video.chaoxing.com/serie_400007176.shtml
时间序列因子模型	伦敦政治经济学院姚琦伟	video.chaoxing.com/serie_400005447.shtml
面向性的学习方法传授	北京大学丘维声	video.chaoxing.com/serie_400009424.shtml
重新认识数学科学	徐州师范大学周明儒	video.chaoxing.com/serie_400007049.shtml
拓扑场论	圣母大学	www.m-e-e-t.com/courses/1698/study_course
镜像对称与霍吉理论	德克萨斯大学 Tony Pantev	www.m-e-e-t.com/courses/1740/study_course
朗兰兹对偶中的镜对称	德克萨斯大学 Teleman	www.m-e-e-t.com/courses/1743/study_course
稳定性及 Wall-Crossing	德克萨斯大学 Bridgeland	www.m-e-e-t.com/courses/1742/study_course
K 同调和指数理论	德克萨斯大学 Nigel Higson	www.m-e-e-t.com/courses/1741/study_course
现代数学应用	北卡罗来纳州立大学 Lada	www.m-e-e-t.com/courses/1391/study_course

3.2 数学开放课程统计

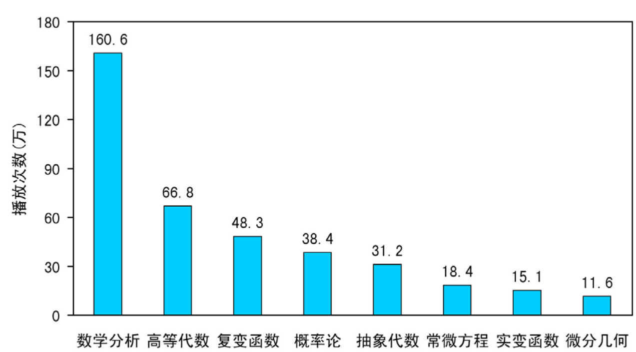
经过十几年的发展，网络数学开放教育由最初的几门视频课程，发展成为有上百门课程的基础数学教育体系。由于数学在各行各业中应用广泛，公众的学习需求强烈，网上的学习人数众多。据对各网站 2012 年底播放超过十万次数学课程的数据统计，其中多门课程的播放次数超过百万，学习人数和影响力远远超过任何一所大学。

在前文和本文所列数学开放课程中，中国（含台湾地区）的贡献率最高，占课程总数的 79.1%。国外开放的主要是公共数学基础课，专业数学课程开放的较少。

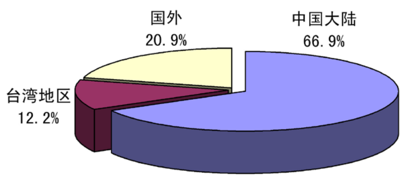
目前网络开放教育还处于发展时期，虽然有了大学的基础数学课程，但还缺少研究生课程这个重要的教育环节，网络自学者要想进一步了解数学前沿知识还很困难。据北师大数学科学学院保继光院长介绍，国内多所



非数学专业课程播放次数统计



数学专业课程播放次数统计



数学课程来源统计

大学准备联合开展研究生数学视频课程建设。这有望填补网络数学开放教育中的空缺，使网络数学教育水平提高到一个新的高度。

3.3 网上自学效果

网络教学的授课内容、教学方法和教学大纲与大学课堂的教学基本相同，因此网上学习方法也与在校学习类似，只是学习效果与在校学习相比还有一定差距。台湾交通大学李威仪教授引用爱因斯坦的质能关系（$E = mC^2$），给出了网络学习效果的公式：

> 学习效果E＝激情/动机M×（教学内容C^2）

上式中E是指effectiveness，M表示motivation，C代表contents。学习效果取决于客观条件和主观努力。其中教学内容C是保证学习效果的基本条件。高质量的教学内容来自高水平的教师和高质量的视频、教材和课件等课程资源。

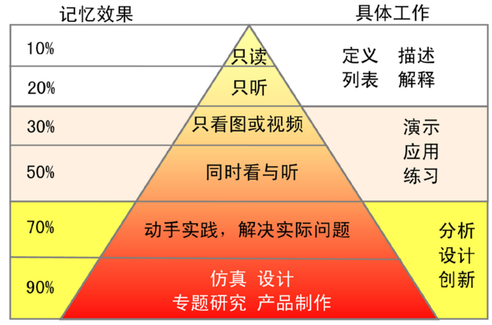
Udacity公司非常重视视频课程质量，曾有一门2万人报名的数学课程因质量不佳而被取消。他们坚持自己选择、培养教师，选择教师的标准是看重教师的讲课水平而不单是资历或学术成果。特龙认为：世界上最有名的学者并不一定是讲课的最佳人选。曾有约500名教授向Udacity申请志愿教书而遭到拒绝。教授物理课的布朗（Andy Brown）只是一个2009年毕业的25岁本科生，但授课水平却深得学生好评。特龙认为，布朗将课程讲得生动活泼，堪比迪士尼公司科教片，这样的教师是教育的未来所在。

高质量的视频课程可以获得良好的学习效果。从人的认知角度来看，视频教学同时利用了听觉和视觉，记忆效果可达50%，而只读（书本）、只听、只看（图片、视频）的记忆效果只有10%、20%、30%，通过课后的练习或进一步的深入研究，记忆效果可进一步提升。

有了良好的网上学习条件，要想获得好的学习效果还取决于激情和动机M这个主观条件。激情来源于对数学的热爱，没有对数学的热爱，自学很难持久。动机主要是学以致用或个人的理想和抱负，对理想锲而不舍的追求会是困难条件下坚持自学的不竭动力。

3.4 网上学术交流

除了知识学习之外，互联网也是一个学术交流的平台。通过网络可以



学习方法与学习效果

观看专题讲座、免费电子期刊，了解数学前沿领域的知识。通过论坛、电子邮件、QQ等开展学术交流，对自己感兴趣的课题可以进行深入的探索和研究，研究成果可以在网上发布。如佩雷尔曼的庞加莱猜想证明就是发布在互联网上并为学术界所认可。历史上曾有过很多自学成才的数学家，网络开放教育提供了良好的学术交流环境，更有利于网络数学人才的成长。

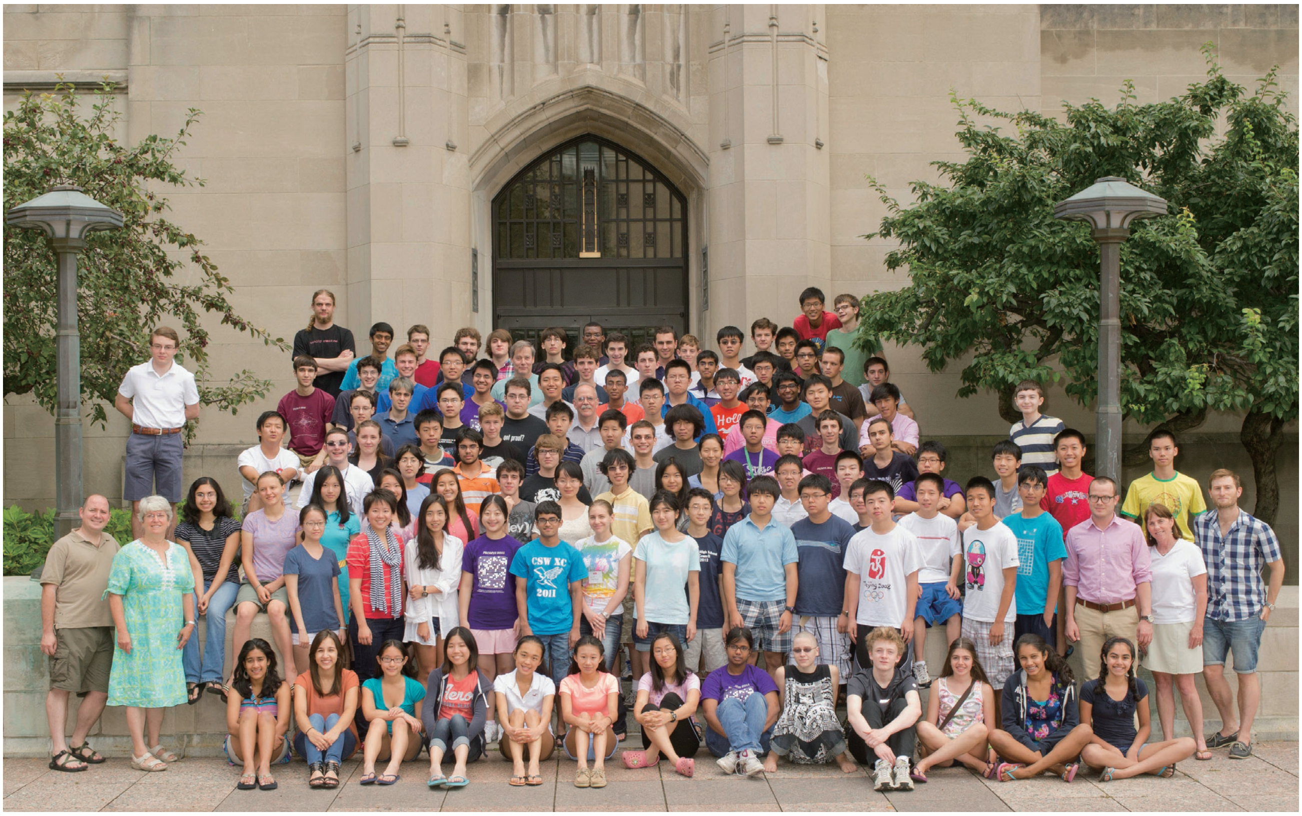
4 结束语

经过十几年的发展，互联网开放教育已开放了几千门课，学习者遍及全球，成为全球最大的无校园的免费超级大学。网络开放数学课程已经吸引了大量学习者，对我国数学的普及和提高已经产生了很大影响。中国网民总数已跃居全球第一，正在向网络全民普及的信息化时代迈进。未来国家将加快高速宽带网络建设，提供廉价甚至免费的网络信息服务，网络开放教育将会得到进一步发展。美国工程院曾把“提高人类自学能力”列为本世纪工程科技的重大挑战之一，网络开放教育为全民提供了一个便捷的自学环境，降低了自学难度，有助于解决这一难题。

互联网诞生以来，曾创造了无数的神话，诞生了很多网络英雄，随着网络开放数学教育的发展，在众多网上自学的青少年中，一定会涌现出网络数学英才。

学习效果公式

Udacity的教师布朗主讲物理课



2012 年班级大合照

一段精彩的数学之旅——介绍一个高中数学夏令营

A Wonderful Math Program for High School Students

励容达

PROMYS 成立于 1989 年，其创始人是一群曾经参加并受益于 Ross Program（一个历史更加悠久的数学培养计划）的数学家，其目的是培养和发现有才华而又好学的数学学生。二十多年里经过 PROMYS 训练而如今已达研究生年龄的学生中，约有 50% 已经获得或正在攻读博士学位，其中大多是在与数学有关的专业。他们中约有 100 位已成为大学教授，其中约有 70% 是数学教授，其余的分布在计算机、物理、化学、生物、医学、法律、哲学及其它领域。

2011 及 2012 年夏天，我有机会去参加了这项活动，非常喜欢。在这里我把我的所见、所闻、所感写出来，与各位爱好数学特别是数论的朋友们分享。

“少年科学家数学项目”（简称 PROMYS）是一项每年在波士顿举行、时长 6 周面向全球高中生的夏令营活动。该活动始于 1989 年，由“罗斯项目”（阿诺德 • 罗斯在 1957 年创立）发展而来。

The Program in Mathematics for Young Scientists (PROMYS) is a six-week long summer camp in Boston, available to high school students from around the world. It started in 1989 based on the Ross Program (founded by Arnold Ross in 1957).

骨干教师（从左至右）：Margy Baruch, Glenn Stevens（主讲教师）, David Fried, and Steve Rosenberg

学习模式：

第一年参加的大约五十名新生将有机会学习数论的基础课程。这里的学习方式比较独特：它是以习题集为主导，每个课日（即非周末）都会布置一套习题并在下一个课日提交。一批来自美国名校（如哈佛、麻省理工、普林斯顿）数学专业的学生作为助教，平均每个助教负责四名学生。新生们将他们一天中的大部分时间都花在了习题集上，由助教批改。一个典型的问题集包括一段计算型的问题、一段严格证明型的问题、还有一段 PODASIPS（Prove or Disprove and Salvage if Possible，证明或反证及补救），另外还有一些自由探讨和查找资料的，围绕这 5 方面问题总共大约给出 17 个题目。

每天上午，知名的数论专家格伦•史蒂文斯（Glenn Stevens）教授都会进行九十分钟的授课，内容大致涵盖了三天前布置的习题集。这样做的目的是让学生在听老师讲解前自己动手试一试。

头三个星期，是训练一年级学生严格的数学证明与推理能力。先让他们把关于整数的公理压缩到简单几条，然后再证明有一定水平的结论（例如：存在 x , y 使得 $ax+by=1$ 当且仅当 $gcd(a,b)=1$，从 $a|bc$, $gcd(a,b)=1$ 可以推出 $a|c$，整数的唯一分解，等等）。在第三个星期五有一次中考，包含 30 个问题，每题 12 分。通常学生能拿到 130 分左右。

接下来的三个星期，课程的内容会向不同方向展开：不同于整数的其它环的性质（整数添加$\sqrt{-5}$所形成的环，亦即 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$，等等）、连分数、关于凸体内格点个数的闵可夫斯基定理、默比乌斯变换、二次互逆定律以及其它种种。在最后一个星期会有一次大考。

每年还会有 20 个左右的“老学员”（第二或第三次来的学生），他们可以有较多的选择。每天一次的数论课他们

Content:

The 50 or so first-year students engage in learning about foundations of number theory. The format of this program is somewhat unique: Its dominant aspect is the problem sets, handed out each weekday and due the next weekday. Each student has a counselor, who is usually a student studying mathematics at some prestigious university (Harvard, MIT, Princeton, etc). Each counselor would be in charge of four students. The problem sets are marked by the counselors. The students spend most of their day working on the problem sets. A typical problem set would consist of a section on numericals, a section on rigor, a section of PODASIPS (Prove or Disprove and Salvage if Possible), exploration sections and possibly a reading search, totaling around 17 problems give or take 5 questions. There were 90-minute lectures every weekday by Professor Glenn Stevens, a well-known expert in number theory. The lectures are designed so as to approximately cover the content of the problem sets from three weekdays ago. This was to ensure that students would be able to have a go at the problems on their own first. During the first three weeks, first-year students develop their ability for mathematical rigor and proof by producing a reduced inventory of axioms of integers and progressing to prove statements up to certain level. (Examples: there exist x and y such that $ax+by = 1$ iff $gcd(a,b) = 1$), ($a|bc$, $gcd(a,b) = 1$ implies $a|c$, unique prime factorization…). On the Friday of the third week, there is a midterm test, which consists of about 30 problems worth 12 marks each. A typical score is 130. In the final three weeks, the content of the course branches out, examining properties of other rings (integers adjoint root -5, etc), continued fractions, Minkowski's theorem about convex, symmetric spaces centered in the origin of a lattice, Mobius inversion, quadratic reciprocity, and many other topics. There is a final exam in the last week.

The 20 or so returning students (those who have come back for a second or third year) have a number of options available to them. While they are required to attend the first-year lectures about number theory, they do not need to complete number theory problem sets. There are a number of courses available to returning students; these may or may not change each year. This year, the courses available, ranked from what was generally seen as 'easiest' to 'hardest', were Abstract Algebra (taught by Marjorie Baruch from Syracuse university), Geometry and Symmetry (Steven Rosenberg, Boston University), and the Analytic Class Number Formula(taught by Jared Weinstein, Boston University). The returning-student courses were different to the number theory courses in format, in that new concepts

2012 年老师、助教、工作人员大合照

必须参加，只是不需要做习题。他们可以参加若干专题课，这些课程每年或许会有些变化。今年（2012 年）有三门专题课，大家普遍认为从“易”到“难”的依次是：抽象代数——雪城（Syracuse）大学的马乔里 • 巴鲁克（Marjorie Baruch）教授主讲，几何与对称—— 波士顿大学的斯蒂芬 • 罗森伯格（Steven Rosenberg）教授主讲，理想类数的解析公式——波士顿大学的杰瑞德 • 温斯坦（Jared Weinstein）教授主讲。

开给“老学员”的课，在授课方式上与基础数论课不同。每天安排的作业是与当天授课内容同步的，而不像基础数论课有 3 天的延时。上述三门课，每周分别布置 3 次、2 次和 1 次作业。今年我上了抽象代数和理想类数的解析公式课。

在抽象代数课中，我们从群的定义开始，逐步进展到凯莱（Cayley）定理与西罗（Sylow）定理。在理想类数的解析公式课中，我们从黎曼 zeta 函数开始，渐进到理解理想数、狄利克雷特征，并最终找到了各种二次域和分圆域的理想类数。

were usually introduced synchronously in lectures and the homework, rather than on a three-day delay as in the case of number theory. Homework was assigned three, two and one times per week in the respective courses. I attended Abstract Algebra and the Analytic Class Number Formula courses this year. In the Abstract Algebra course, we started with the definition of a Group and progress to topics about the level of Cayley's Theorem and Sylow's Theorem. In the Analytic Class Number Formula course, we began with the meaning of the Riemann Zeta function, progressed to start understanding ideals, looked at Dirichlet characters, and found the class number of various quadratic fields and cyclotomic fields.

In the midterm and final exam, if any returning students did particularly well in previous years, they would be allowed to take more difficult exams called, respectively, the 'short', the 'super short', and the 'duper super short' due to the fact that they

在中考和大考的时候，如果哪个“老学员”在前一年考得特别好，那么就可以参加一些更难的考试，因为考题的数目与难度成反比，因此这些考试由简到难分别被称为：“短”、“特短”、“特特短”。

所有的学生都可以加入研究小组，每个研究小组由一个助教负责，通常有 4-5 个学生参加。

第一年的新生可以选择是否参加研究小组。如果参加，他们的研究课题会是比如分式线性变换、差分演算、分拆以及各种组合问题等。

“老学员”是必须参加研究小组的。 他们的研究课题会是，比如：根子系统与外尔群的表示（我们学习了什么是根式，什么是表示，然后设法去寻找生成 D4 和 F4 类的根系的所有表示的方法）。其它课题包括用随机对合来模拟素因子、对称多项式的形变以及抛物线上的“有理距离集”。

本 • 哈里斯（Ben Harris）博士是我所在研究小组的指导员（负责给研究小组成员出题，并且不时给予指导），他是麻省理工 2011 年毕业的博士。我们的助教是袁乔初，今年刚从麻省理工毕业。那次 PROMYS 临近结束前，我们小组做了一个时长一小时的研究报告，并将我们的结果用 LaTex 制成了论文。

助教们还开一些小课，向全体 PROMYS 学生开放。小课的时间是每次一小时，介绍各种各样有趣的课题。比如有一个课程是关于图上的游走。助教告诉我们有些问题（比如判定斐波那契数列或是计算由 A，C，T 组成而长度为 n 且不包含“CAT”的字符串有多少）可以如何表达为图上的游走的计算，而计算图上的游走又可以如何表达为求邻接矩阵的幂的问题，以及如何用特征值和特征向量来快速计算某些矩阵的幂。在另一堂课上，助教花了整堂课的时间来定义 p-adic 数。

PROMYS 也给助教们提供了学习课程，只是具体安排我不太清楚。 但无论如何，在波士顿的那 6 个星期里，助教们也在努力钻研，刻苦攻关。

特别优秀的学生可以在下一年回来做“小助教”。

PROMYS 还邀请专家举办客座演讲，比如有斯蒂芬 • 沃尔夫勒姆（Stephen Wolfram，Mathematica 和 Wolfram Alpha 的发明人），本 • 哈里斯（麻省理工博士，曾参加过 PROMYS 的学员），还有一些谷歌公司的专家等。

在 PROMYS 还有一些像是高中老师的人，他们似乎是来学习好的教学方法的，我和他们接触不多。

对我个人而言 PROMYS 的优点在于：

一般情况下我不会逼着自己去学习数学。可是在 PROMYS，看到这么多天智聪慧的同学和老师对数学这么感兴趣，又那么钻研，深深受到影响，在周围环境的带动下自然而然地沉下心来，认真学习而不觉辛苦。PROMYS 是

progressively involved fewer questions of greater difficulty.

There are also research labs available to all students. There is a counselor assigned to each research lab, and each research lab usually has 4 or 5 students.

Research labs were optional for first-year students. Examples of topics of research labs for first-year students include fractional linear functions, calculus of finite differences, partitions, and combinatorial problems.

Research labs were mandatory for returning students. Examples of topics of research labs for second-year students included Root Subsystems and Weyl Group Representations, in which we learned what root systems were and what representations were, and looked for ways to generate representations of root systems of type D4 and F4. Other topics are Modeling prime divisors by random involution, Deformations of symmetric polynomials, and Rational-distance sets on parabolas. In my research lab, our mentor (the person who posed the question, and periodically turned up to help us) was Dr. Ben Harris, who had graduated with a PhD from MIT in 2011. Our counselor was Qiaochu Yuan, who graduated from MIT recently as well. Near the end of the program, we did an hour-long presentation of our research lab, and produced a write-up of our results using LaTeX.

There were also mini-courses taught by counselors, available to all people at PROMYS. These were hour-long lectures about all sorts of interesting topics. One example of a course is walks on graphs: In the course, the counselor taught students how certain problems, such as determining Fibonacci numbers or finding the number of letter combinations of length n consisting of letters A,C,T did not contain "CAT", could be expressed as counting walks on graphs, and how, in turn, counting walks on graphs could be expressed in terms of exponentiation of adjacency matrices, and how quick calculations of exponentiations of certain matrices was possible by using eigenvalues and eigenvectors. In another course, the counselor spent the whole time to define p-adic numbers.

There were also counselor courses, the structure of which I am not too sure about. Whatever it was, during the 6 weeks in Boston the counselors were deeply engaged in mathematics at a level that would be challenging to them as well.

Exceedingly good students were offered the opportunity to return the next year as 'junior counselors'.

There were also guest lectures. Stephen Wolfram (Creator of Mathematica and Wolfram Alpha), Ben Harris (Past student and PhD from MIT), Some Google person, Amanda Beeson

作者（左）与他的同学在一起

不允许带计算机的，我们学习效率这么高，可能要归功于这个规定。这里有休息室、教室以及其它可供合作交流的空间场所，对于我们的学习很有帮助。

在开幕式上，格伦•史蒂文斯教授表达了如下的观点：“我们选择助教时，看的不是他们的教学水平，而是他们的数学能力。巧的是这些老师恰好也很会教书。”这当然是个见仁见智的问题，但我觉得作为助教，其数学能力与教学及交流能力同样重要。在 PROMYS 有不少同学是不太善于交际的，所以热情、主动的助教对那些内向的学生将会有所帮助。

录取：

PROMYS 的网页上有整套的申请资料。他们选择学生时更看重其解决问题的能力，而不仅仅是准确的答案。PROMYS 采取滚动招生的方式录取学生。

经费来源：

PROMYS 的经费主要来源于几个大的机构及私人捐助者。高级讲座系列是由 Clay 数学所赞助的，他们相信 PROMYS 是在培育未来的数学家和科学家。第一年学生的学费是 2700 美元，“老学员”则是 2200 美元，每周 19 顿的餐费也包括在内。美国数学学会和私人捐款也提供了几项奖学金。PROMYS 在其网页上这样声明：“没有人会因为经济的原因而来不了这里。”

(Rochester), were some of the lecturers.

There was a group of people, seemingly high school teachers, who appeared to be there in order to learn good teaching methods. I didn’t interact with them much.

Things that made it good, in my opinion:

I am not usually capable of forcing myself to study loads of mathematics. A major part of PROMYS that empowered me to sit down and work was that there was a 'critical mass' of students and counselors who were mostly really good at, and interested in, mathematics. There was a positive peer pressure effect that just seemed to make it really easy to convince you to work hard. Computers were disallowed in PROMYS; this may have contributed to productivity. There were also lounges, classrooms and other collaborative study spaces available, which definitely helped with studying.

At the start of the program, professor Glenn Stevens said something along the lines of, "Our counselors are not chosen by their teaching ability. They are chosen by their mathematical ability, and it just so happens that they are excellent teachers."Make of that what you will, but I did think that it was important that the counselors were not only mathematically talented, but also genuinely good at teaching and communicating. There were many asocial students at PROMYS, so I think it helped that the counselors were the kind of people who would reach out to those students as well.

Admission:

The questions for the student application packet are available on the PROMYS website. PROMYS appeared to pick students by problem-solving ability rather than necessarily the actual solutions, and had a rolling admissions process.

Funding:

PROMYS is supported by a number of organizations as well as some private donations. The Advanced Seminars are sponsored by the Clay Mathematics Institute, in the belief that PROMYS nurtures future mathematicians and scientists. The tuition is USD2700 for first-year students and USD2200 for returning students. 19 meals per week are included in the fee. Several scholarships are available with support from the American Mathematical Society and private donors. The PROMYS website states that "no student should be unable to attend for financial reasons".

张家山汉简《算数书》“睘材”三题

吴朝阳　晋文

张家山汉简《算数书》与“睘材”相关的共有“睘材”、“以睘材方”、“以方材睘”三个算题。“睘材”算题因为出土原简字迹难辨之处太多，造成原释文中有许多缺文，至今没有令人满意的释读，而“以睘材方”及“以方材睘”二题，则因为题中的公式与单纯的数学公式不一致，导致学者们意见纷纭、莫衷一是。本文首先将“睘材”原简字迹难辨处加以处理，从中得到关键线索，并考证出正确的释读。对“以睘材方”及“以方材睘”两个算题，我们则根据上古数学水平、算题的应用实际性质以及《算数书》中的例证展开论证，从而得到正确的释读。

一　“睘材”

张家山汉简《算数书》的“睘材”题共含 156、158 号两支简，张家山二四七号汉墓竹简整理小组的释文为：

睘（圜）材　有圜材一（？），断之口口市口口口口口口口大几何？曰：七（？）十（？）六（？）口口四寸半寸。述（术）曰：口自乘，以（156）

入二寸益之，即大数已[1]。（158）

由于很多文字无法释读，本题诸家均无法读通[2]。笔者对原简图版进行一定程度的技术处理，使一些关键字得以读出，部分图版处理结果如下[3]：

从图 1 可知，“圜材”之后还有余地，并有墨迹，因此，原释文“一”字可取。从图 2 可以看到，原释文“断之口口市”是成问题的，对比“斷”字的隶书写法可以发现，此段竹简的第一个字左上有二小“口”字形，其形比“斷”之小“口”明显要大，而其下既没有“斷”字那么多笔划的墨迹，最左侧并无“斷”字之“∟”形之残墨，空间也不足以容纳“斷”字的左下部。因此这个字不是“断”字，而应该是“斲”字。综合字迹及图 2 其他简文可以发现此字确为“斲”字，而此段简文为“斲之入二寸”。

“斲”与“断”一字之差，关系到全题的理解与释读。岳麓书院藏秦简《数》书以及《九章算术 • 勾股》都有“斲圜材”的算题，其文援引如下：

[今] 有圆材薶 [埋] 地，不智 [知] 小大，斫之，入材一寸而得平一尺，问材周大几（可）[何]? 即曰：半平得五寸，令相乘也，以深一寸为法，如法得一寸。有 [又] 以深益之，即材径也[4]。

图 1：有圜材一

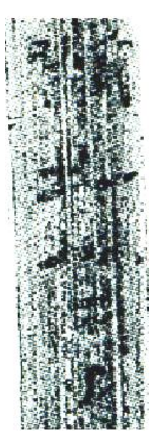


图 2：斲之入二寸

图 3：平尺四寸

图 4：曰大二尺有

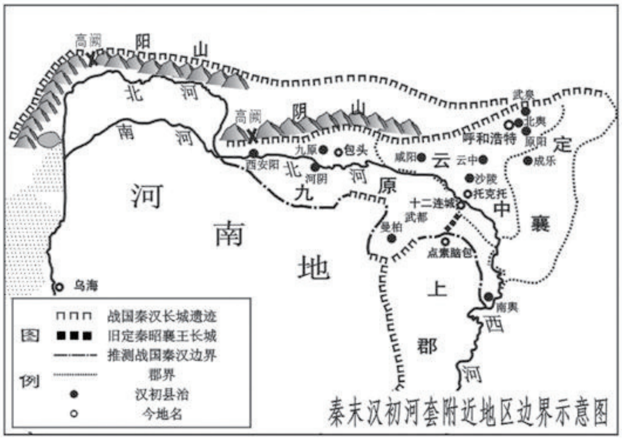
图 5：六寸半寸

[1] 参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简 [二四七号墓]（释文修订本）》，文物出版社，2006 年 5 月，第 153 页。按：整理小组误将 157 号简归入此题，为简化讨论，此处径略去此简。

[2] 参见：彭浩：《张家山汉简〈算数书〉注释》，科学出版社，2001 年，第 113 页；郭世荣：《〈算数书〉勘误》，《内蒙古大学学报（自然科学版）》，2001 年第 3 期；郭书春：《〈算数书〉校勘》，《中国科技史料》，2001 年第 3 期。

[3] 原图片参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：前揭书，第 96 页 156 号简。

[4] 简文转引自：肖灿、朱汉民：《岳麓书院藏秦简〈数〉的主要内容及历史价值》，《中国史研究》，2009 年第 3 期。



今有圆材，埋在壁中，不知大小。以锯锯之，深一寸，锯道长一尺。问径几何？答曰：材径二尺六寸。术曰：半锯道自乘，如深寸而一，以深寸增之，即材径[5]。

张家山汉简《算数书》本算题所论是“圜材”，简文有“斵之入二寸”句，并且“而得”、“问囗大几何”、“寸自乘”、以及“入二寸益之”都可以明确释读，在简文中又都处于合适的位置。因此，对比以引岳麓秦简《数》及《九章算术》中的算题，本题毫无疑问是一个同类的“斵圜材”算题。因此，算题中无法确认的文字可以借助这两则算题的行文方式来做判断。

图 3 所示竹简片段第一字无法辨认，第二字的位置依上下文及墨迹形状应是“尺”字，第三字据文义是一个数字，依墨迹形状判断应为“六”或者“四”字，而最后一字依文义及残墨则可以肯定为“寸”字。此段竹简之前有“而得”二字，其中“而”字可辨，“得”字依上下文可以断定。对照岳麓书院藏秦简《数》书相应内容，可以判断此四字为“平尺四寸”或“平尺六寸”。

图 4、图 5 两部分，原释文为“曰七（？）十（？）六（？）”及“囗囗四寸半寸”。据图 5，“寸半寸”可辨，而前一字依残墨判断，或者如原释文是“四”字，或者是“六”字。图 4 除“曰”字外均不可辨，但依上下文知其为“曰大囗尺囗”。考虑图 5 简文是“囗寸半寸”，而“尺”后面的字残墨之迹与“有”近似，故依行文此字应为“有[又]”字。至此，据计算可知，此答数为“二尺有六寸半寸”，而图 3 则为“平尺四寸”。

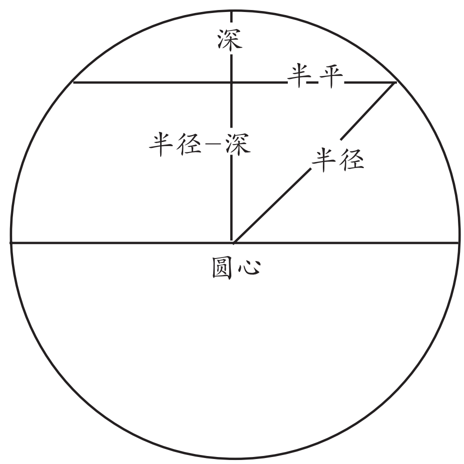
[5] 参见：李继闵：《〈九章算术〉导读与译注》，陕西科学技术出版社，1998 年 9 月，第 695-697 页。

对照上引岳麓秦简“术”的行文，可知 158 号简脱漏“为法，又以入二寸”七个字。因为“入二寸”在我们复原的简文中出现两次，所以这一脱误的原因是明显的：它是因为简文上下有两处“入二寸”，抄写者不慎相涉而产生脱误。至此，我们得到复原的简文如下：

睘材　有圜〖材〗一，斫之入二寸，而得〖平尺四〗寸，问〖材〗大几何？曰：大〖二尺有六〗寸半寸。述[术]曰：〖七〗寸自乘，以（156）

入二寸【为法，又以入二寸】益之，即大数已。（158）

此处，158 简中的“大”即问题中的“材大”，“大数”即为圆材直径之尺寸数。《九章算术》将此类算题归入“勾股”章，其计算公式由勾股定理推导而得，其推导过程如下：



如上图，（半径−深）、半平、半径构成直角三角形，据勾股定理得：

（半径－深）×（半径－深）＋半平 × 半平＝半径 × 半径

展开、化简，得：

2 深 × 半径＝半平 × 半平＋深 × 深

因此，

直径＝半平 × 半平 / 深＋深

本题、上引岳麓秦简、《九章算术》三者算法的叙述方式相互均有所不同，但它们都是以上这个公式。按照这个公式，本题的计算如下：

$$圆材的直径=\frac{7\times7}{2}+2=26\frac{1}{2}。$$

二 “以睘材方”

张家山汉简《算数书》“以睘材方”及“以方材睘”两个算题，由于其“术”提供的公式不同于从数学出发而推得的所谓正确的公式，因而历来研究者要么认为其公式有误，要么认为其数据有误[6]。然而事实并非如此，我们将证明：这两个算题中的公式不是纯数学公式，它们是根据生产实际，测算以圆形木材制造的方形材大小的应用公式。本小节先讨论“以睘材方”算题，其简文如下：

以睘材方　以圜材为方材，曰：大四韦［围］二寸廿五分寸十四，为方材几何？曰：方七寸五分寸三。术曰：因而五之为实，令七而一，四（153）

【而】一即成[7]。（157）

原释文“以睘材方”只有153号简，此算法，即“术”文显然是不完整的，苏意雯等、段耀勇及邹大海、以及日本张家山《算数书》研究会诸专家认为应补以“而一”[8]二字。这种校补句法通顺而又与答数相符，文义完整而合理。然而据图版[9]可知，本题竹简即153号简，其简文至“四”字已抵竹简下端编线，可见此处“术”不是缺文，而是缺少后续的一支竹简。153号简出土编号为H103，而157号简的出土编号为H102，二简出土编号既相连，而出土位置也确实相邻。由于157号简的全部简文为“一即成”，内容与153号简内容相接。而如上节所论，157号简不属于“睘材”题，因此我们确定157号简是153号的续简，两简简文之间误脱一个“而”字。所以，我们将157号简列于此简之后，并以脱误例校补“【而】”字。

简文中“韦”借为“围”，古以“径尺为围”，这里的“围”实际上等于“尺”。因此“大四围二寸廿五分寸十四”的意思是“圜材”周长为$42\frac{14}{25}$寸。据“术”文计算，“方材”的边长为：$42\frac{14}{25}\times5\div7\div4=\frac{38}{5}=7\frac{3}{5}$，正与答案相符。因此，我们认为本题算法与答案的简文都没有问题。上引诸家中彭浩、郭世荣、郭书春认为本题有误，并各以已意解读、校改，我们与段耀勇、邹大海一样，认为他们都不正确。

本题之前《算数书》的所有60个算题中，虽然存在一定数量的脱文、衍文以及传抄错误，但是由于错误的“术”而产生错误答案的仅有“妇织”一个算题，而“妇织”问题性质上属于“趣味数学”而非“实用数学”[10]。也就是说，《算数书》中的实用算题的算法都是正确的。因此，从统计的角度看，本题的“术”也就很不可能是错误的。

而本题的“术”文算法与答案相符，而且对应于本题的“四而一”，后文所论“以方材睘”题中的算法中也相应地是“因而四之”。可见，本题的“术”文及答案肯定都没有问题。

古人“圆用规，方用矩”，因此圆内接正方形与圆的关系古人显然是清楚的，上引“睘材”则证明勾股定理在秦代也是人所熟知的知识，而从张家山汉简《算数书》的“方田”题及《九章算术》可知：古人在对形如$N=a^2+r$的自然数开平方时，常用$\sqrt{N}\approx a+\frac{r}{2a+1}$为近似公式[11]。

---

[6] 参见彭浩：《张家山汉简〈算数书〉注释》，科学出版社，2001年，第110-111页；苏意雯、苏俊鸿、苏惠玉等：《〈算数书〉校勘》，台湾师大《HPM通讯》第三卷，2000年第10期；郭世荣：《〈算数书〉勘误》，《内蒙古大学学报（自然科学版）》，2001年第3期；郭书春：《〈算数书〉校勘》，《中国科技史料》，2001年第3期。段耀勇、邹大海：《〈算数书〉中“以睘材方”、“以方材睘”两问校证》，《自然科学史研究》，2003年第2期；日本张家山《算数书》研究会：《张家山汉墓〈算数书〉译注稿（4）》，第12-13页。

[7] 参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简［二四七号墓］（释文修订本）》，文物出版社，2006年5月，第152、153页。按：释文据我们所批评的错误理解为基础而校改，此只引原简文。

[8] 参见前注所引诸文，为避繁琐，此后引以上诸文从略。

[9] 本简图版见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简［二四七号墓］》，文物出版社，2001年11月，第95页；出土位置编号及位置图见第318及322页。

[10] 参见彭浩：前揭书。

[11] 参见彭浩：前揭书，第125页注2；李继闵：《〈九章算术〉导读与译注》，陕西科学技术出版社，1998年9月，第388页。

据这个公式计算，则$\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}=\sqrt{7^2+1}\approx 7\frac{1}{15}$，因此，边长为 5 的正方形之斜边边长略大于 7，可见《孙子算经》所谓“见邪求方，五之，七而一[12]”是古已有之的近似公式。此外，从张家山汉简《算数书》中的“困盖”、“睘亭”、“井材”等算题可知[13]，“径一周三”，即圆周率约等于三也是当时众所周知之事。邹大海先生在深入研究传世文献及秦简之后，得出的结论说：“《九章》的主体算法在先秦已经用到[14]”，“先秦必然用到了汉《九章》所达到的那种高水平的数学知识[15]”，这些结论也从宏观上支持我们的看法。因此，我们可以肯定：$\sqrt{2}\approx 7/5$ 以及 $\pi\approx 3$ 在秦代是一件广为人知的事实。所以，如果应用“见邪求方，五之，七而一”，则“以圜材为方材”的公式应是：

圜材周长×5÷7÷ 圆周率。

若再以“径一周三”替换以上公式中的圆周率，则公式变成：

圜材周长×5÷7÷3。

也就是说，本题“术”文的最后一句似乎应该是“三而一”而不是“四而一”。然而，我们前面已论证本题的算法与算题所给的答数相符，因而是不可能出错的，因此，“术”文的“四而一”不是源于错误的数学知识，而是另有原因。

事实上圆周率是略大于三的，很多迹象都表明古人知道这一事实。如果算法是“三而一”，那么除数小了，算出来的内接正方形的边长就会比实际可能的尺寸大，加上“五之，七而一”的近似，由$\dfrac{\sqrt{2}\times\pi}{\frac{7}{5}\times 3}\approx 1.058$ 可知，依“径一周三”计算出的答案比实际数字会大出 6%，可见，实际应用中不能以“五之，七而一”以及“三而一”来计算从“圜材”可能得到的“方材”的边长，也就是说于实际问题而言，“三而一”是不可行的。另一方面，本题是一个实用问题，实际的“圜材”可能不那么圆，其尾部直径也必须略小，甚至木材表层可能质地不堪使用，因而计算可得到的“方材”直径时，留有余量的估算是现实问题的需要。本算题简文明确说“以圜材为方材”，这是极其值得重视的！这句简文说明“以圜为方”的简

[12] 佚名：《孙子算经》，文渊阁《四库全书》电子版，卷上。
[13] 参见彭浩：前揭书，第 107-110 页。
[14] 邹大海：《中国数学的兴起与先秦数学》，河北科学技术出版社，2001 年 9 月，第 434 页。详细论证请参看该书第四、五章。
[15] 邹大海：《睡虎地秦简与先秦数学》，中国科学技术史学会第六届代表大会论文，2000 年 8 月。

端题名只是本问题名称的略称，本算题所讨论的是“圜材”及“方材”，而不是“圜”和“方”，也就是说，本算题是实际应用题而不是纯数学问题。如上所论，以“三而一”来计算方材边长是脱离实际的，可见采用“四而一”的计算公式正是留有余量的边长估算法，而不是数学错误。此前诸专家未见及此，不恰当地将这个算题等同于“已知圆周长，求其内接正方形的边长”这样单纯的数学问题，这正是他们认为本算题有错误的原因。

总而言之，古人既已知圆周率大约为3，算题中却使用“四而一”进行计算，而计算公式与答数又完全相符，可见其中的“四而一”是因其为“以圜材为方材”的应用算题而给出的留有余量的估算式。日本张家山《算数书》研究会诸专家虽然没有详细论证，但同样认定“四而一”是实际操作留出余量的计算方法[16]。此外，从各种出土秦简可以发现，秦人在基层实行严密而高度数量化的管理，因此我们进一步认为，“以圜材为方材”问题中“四而一”的计算方式并非是随意的，应有相当于“程”的官方规定为依据。

三 “以方材睘”

关于“以睘材方”算题的校释中，专家主要是认为计算公式有失误或抄误，或者认为算题中的数据有误，总之被认为的错误在一定程度上还不算严重。“以方材睘”算题则不同，很多专家认为这个算题的算法是从根本上就错了。这些专家认为本题的算法把“以方材睘”作为“以睘材方”的逆问题是一个根本性错误，事实上却是他们错误理解了这个算题。我们先来看看这个算题的简文：

以方材睘　以方为圜，曰：材方七寸五分寸三，为圜材几何？曰：四韦[围]二寸廿五分十四。• 术曰：方材之一面即（154）

圜材之径也，因而四之，【七之】以为实，令五而成一[17]。（155）

简文中的“曰材”二字，段耀勇、邹大海校改为“材曰[18]”，并以“材”属上句，构成“圜材”一词。我们认为与下文对照，可知此处“材”字即是“方材”，因其后有“方”字而将“方材”省称为“材”，故保留原简文为妥。此外，本题“术”文中“方材之一面即圜材之径也”一句看似难以读通。然而“径”通“经”，“横度之名也[19]”，这种意义虽与“径”的原意相近，但依上下文应理解为“横截面”。因此，我们认为此句即是解释“方材之一面”与“圜材”截面的关系。

对比问题的已知条件中的数据、答案以及“术”即算法的行文，本题确实是把“以方材睘”作为“以睘材方”问题的逆问题，依“以睘材方”题的算法，可知原简误脱“七之”二字，故校补如上。依校补后的算法，本题具体计算为：圜材之径 $= 7\dfrac{3}{5}\times 4\times\dfrac{7}{5}=42\dfrac{14}{25}$，由已知条件中的数据，根据算法计算的结果与算题中的答案完全相符。

如上所说，本题从算法来看是“以睘材方”题的逆问题[20]。我们在上节已经论证，“以睘材方”是“以圜材为方材”的实用算题而不是单纯的数学问题，其中“四而一”的算法源于为实际可操作性而设的加工余量。也就是说，“以睘材方”问题是“已知圆材周长，求由其所割削而得的方材的边长”这样一个应用问题。本题既是“以睘材方”的逆问题，则是一个“已知所得方材的边长，求所需圆材的周长”的实用算题。

然而，国内各专家既认为“以睘材方”题是“已知圆周长，求其内接正方形的边长”的纯数学算题，本题就被相应地理解为“已知正方形的边长，求其内切圆的周长”的问题。由于这样的问题不是“以睘材方”的逆问题，因而彭浩、郭世荣、郭书春、段耀勇及邹大海[21]等专家都认为这个问题的算法是错的，并给出了各自不同的校改方案。

我们认为，以《算数书》会在这样一个实际应用问题上有算法错误是一种脱离实际的想当然。从整部《算数书》看，它是秦、汉低层官吏在实际管理中遭遇数学问题时的参考书，其问题基本上全部都是现实生活中的问题。就“以睘材方”题而言，其在计算由圆材割取方

[16] 参见日本张家山《算数书》研究会：《张家山汉墓〈算数书〉译注稿（4）》，第12页注5。

[17] 参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简[二四七号墓]（释文修订本）》，文物出版社，2006年5月，第153页。按：释文据我们所批评的错误理解为基础而校改，此只引原简文。

[18] 段耀勇、邹大海：《〈算数书〉中“以睘材方”、“以方材睘”两问校证》，《自然科学史研究》，2003年第2期。

[19] 参见宗福邦等编：《故训汇纂》，商务印书馆，2003年7月，第750页“径”字条第32义项。

[20] 日本张家山《算数书》研究会诸专家也认定本题是“以睘材方”题的逆问题，但对其正确性未作论证。参见日本张家山《算数书》研究会：《张家山汉墓〈算数书〉译注稿（4）》，第13-14页。

[21] 参见彭浩：《张家山汉简〈算数书〉注释》，科学出版社，2001年，第111-113页；郭世荣：《〈算数书〉勘误》，《内蒙古大学学报（自然科学版）》，2001年第3期；郭书春：《〈算数书〉校勘》，《中国科技史料》，2001年第3期；段耀勇、邹大海：《〈算数书〉中“以睘材方”、“以方材睘”两问校证》，《自然科学史研究》，2003年第2期。

材时留有余量的做法，显然是实际算题的需要。因此，倘若本题算法错误，它早应由实践得到更正。再者，“材”之本义及最常用词义都是“木材”，以木材而论，将“圜材”加工成“方材”是现实生活中常有之事，反之上古原木于官方极为易得，又有多少官吏需要将“方材”加工成“圜材”呢？所以，作为实用算题，本题只能是官吏在其现实管理中需要的应用题：某工程需要某种大小的方材，那么官方应该发给工匠什么规格的圆材？

既然本题是“以圜材方”问题的逆问题，那么问题所求应该是“（留有余量的前提下）正方形外接圆的周长”，国内诸专家认定此题讲的是“内切圆”而不是“外接圆”，除了不理解“以圜材方”题中“四而一”是留有余量的做法之外，还因为他们对本题“为圜材几何”这一问句中的“为”字的理解。单凭文句理解，“以方材为圜材”句中的“为”字似乎应训“作”，因而文句自然以“从方材获取内切圆材”的解释为妥。然而，这种理解缺乏对本题、本句作结合实际的综合分析，与我们以上的论证相抵触，因而并不可靠。“为”字自古多义，此处亦未必训“作”。

事实上，古文中的“为”字除训“作”之外，尚可训“用”、训“谓”、训“曰”、训“于”、训“如”[22]等等，因此，综合考虑我们以上的讨论，本题“为圜材几何”问句中的“为”字不必训为“作”，其意思或应近于“用”、“需要”。对“为”字作近似于此的训解，在张家山汉简《算数书》中就可以找到例子。《算数书》“程禾”题说“禾黍一石为粟十六斗泰半斗，舂之为粝米一石”，而“米求粟”题说“今有米七分升六，当为粟几何[23]”，这两段文字虽然说的都是“粟”、“米”的换算，但其中“为”字的意思和用法却不相同。“程禾”题说“为粝米一石”时明确说“舂之”，所以其“为”字与“以圜材方”题“以圜材为方材”一句中的“为”字用法相同。然而“粟”可以舂为“米”，“米”却不能做成“粟”，因此“米求粟”算题的题名及其“当为粟几何”句中，“为”字的意思近于“需要”，实则可以简单地解释为“换算”。“为”字在“当为粟几何”句中的这种用法，与“为圜材几何”句正可相比拟。可见，“以方材圜”正是“以圜材方”算题的逆问题，两个算题中的“为”字可以有不同解释，情形正与“粟”、“米”换算问题相似。事实上，秦、汉间“粟”与“米”间的算题全部可以看成按比率换算[24]，相似地，“以圜材方”与“以方材圜”二题也正可看成是“圜材”、“方材”间的“换算”问题。

总之，综合我们在“以圜材方”及“以方材圜”题中的论证，结论是很清楚的：“以方材圜”算题是根据目标“方材”的大小计算所需“圜材”大小的实际问题，它正是“以圜材方”算题的逆算题，本题除了误脱“七之”二字外，其问题、算法及答案都没有错误。“以圜材方”及“以方材圜”两个算题的算法都是正确的，它们是根据留有余量规定而建立的实际应用公式。

作者简介：吴朝阳，中国科学技术大学数学系应用数学硕士；美国 Louisiana State University 数学硕士，计算机硕士，数学博士；南京师范大学历史学博士；现于南京大学数学系任教。

[22] 参见宗福邦等编：前揭书，第 1386-1388 页“为”字条。

[23] 参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简[二四七号墓]（释文修订本）》，文物出版社，2006 年 5 月，第 144 页、147 页。

[24] 按：秦、汉时期粟、米换算比率为 50 : 30，这个比率见于张家山汉简《算数书》、岳麓书院藏秦简《数》及《九章算术》等出土和传世文献。

我和苏步青先生的一段诗翰情缘

胡炳生

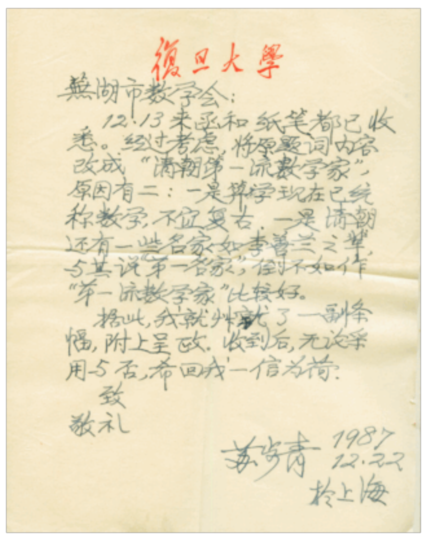
苏步青（1902-2003）先生，中国当代杰出的数学家和教育家，中国科学院院士，曾任上海复旦大学校长、全国人大常委、全国政协副主席。我与先生无缘得见，是一大遗憾。但是我却与先生有过 5 年的诗翰交往，至今保存有先生七封亲笔书信和其他文字、条幅，然亦大幸矣！

苏步青先生七封亲笔书信图影

2012 年 10 月，在全国第二届数学文化论坛（南京信息工程大学）上，遇到《数学文化》主编汤涛博士，谈起此事，他觉得有必要把苏老谈文化、谈诗的文字公之于众，这是一件有价值也很有意思的事情。于是我检点旧存，将苏老寄我的所有书信、条幅以及其他文字手稿，收集在一起，整理和复印，并加以说明，与大家分享，好让数学界同仁以及其他文化教育界朋友了解苏老的文化观念以及他对数学与文化特别是与诗词等文学形式的看法。我想，这对于全面认识苏老，了解数学与文化的关系，数学与诗词的关系，不无帮助。因此，我愿意将这段我与苏翁的诗翰情缘和苏翁七封亲笔书信，首次展示于此。

我与苏老的交往，应从 1985 年全国第二次数学史年会说起。这次年会在呼和浩特市内蒙古师范大学召开，这是我第一次参加我国数学界的学术会议。在会议快结束，讨论下届年会开会地点时，我提出：下届年会可在安徽召开，同时纪念清代安徽著名数学家梅文鼎诞生 355 周年。大家表示认可，并将此建议写入会议纪要。

在筹备纪念梅文鼎会议过程中，宣城市政府决定要建立梅文鼎纪念馆，征集全国数学界和文化界专家、名人的书画文字，以光馆藏，并要我请苏步青教授为纪念馆书写条幅。因为我并不认识苏老，也从没有过交往，于是我就以芜湖市数学会（是时我为该会秘书长）和安徽师范大学数学系的名义，于 1987 年 12 月 13 日致函请苏老为梅文鼎纪念馆题词，并试拟了几个文稿供他参考。很快，就收到苏老的回函，并对我们原拟订的题词文稿进行了改动，还说明了改动的原因。这不但体现了苏老的严谨，而且还表明他对清代数学史与梅文鼎本人有很好的了解。第一封信的原文及所题词如下：



復旦大學

蕪湖市数学会：

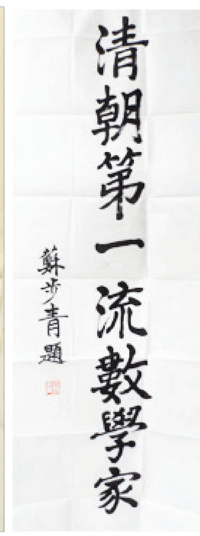
12.13来函和纸笔都已收悉。经过考虑，将原题词内容改成"清朝第一流数学家"，原因有二：一是算学现在已统称数学，不宜复古，二是清朝还有一些名家如李善兰之辈，与其说第一名家，倒不如作"第一流数学家"比较好。

据此，我就草就了一副条幅，附上呈政。收到后，无论采用与否，希回我一信为荷。

致

敬礼

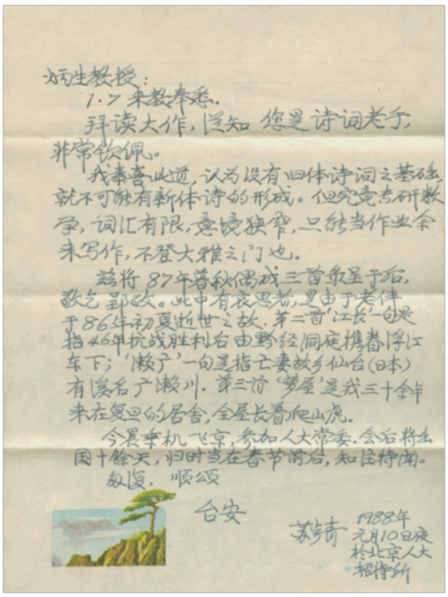
苏步青 1987 12.22 於上海



我收信后及时复信表示感谢，并将苏老题词转交宣城市梅文鼎纪念馆。因为这是我以个人名义写的信，为了使苏老了解，我便加了一段话，说“我与先生有同好，除了数学以外还爱好古典诗词”，并将我的近作诗词稿选出数首，抄出附在信中寄出，请他指教。哪知，很快又得到苏老热情回信，并对我的诗词稿加以表扬，说我是“诗词老手”，

真愧不敢当。他还把他悼念亡故夫人的新作七律三首抄寄于我，我感到既兴奋又意外。这三首七律情意真切，清泠空幽，的为上乘佳作；这使我深切知道，苏老确为文理兼通的大家。

这封回信是苏老赴京参加人大常委会期间于人大招待所写就。对我这样一个不认识的普通教师，他竟如此地真诚，如此地认真，给我及时回信。这更使我深深折服于苏老为人、为学的高尚品德，深厚的文化修养。这封信的原件如下：

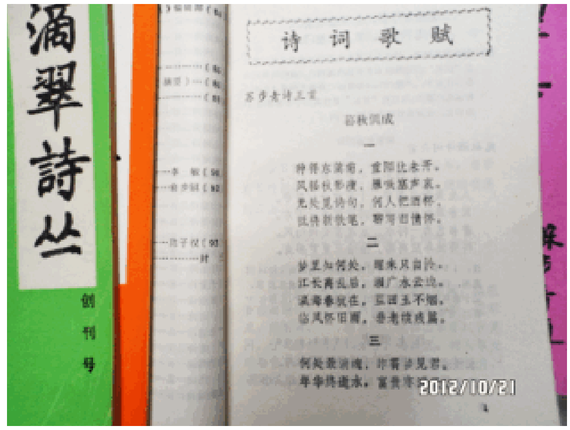

炳生教授：
1.7来教奉悉。
拜读大作，深知您是诗词老手，非常钦佩。
我素喜此道，认为没有旧体诗词之基础，就不可能有新体诗的形成。但究竟专研数学，词汇有限，意境狭窄，只能当作业余来写作，不登大雅之门也。
兹将87年暮秋偶成三首录呈于后，敬乞郢政。此中有哀思者，是由于老伴于86年初夏逝世之故。第二首'江长'一句是指46年抗战胜利后由黔经洞庭携眷浮江东下；'濑广'一句是指亡妻故乡仙台（日本）有溪名广濑川。第三首'萝屋'是我三十余年来在复旦的居舍，全屋长着爬山虎。
今晨乘机飞京，参加人大常委。会后将出国十余天，归时当在春节前后，知注特闻。
匆复，顺颂
台安
苏步青 1988年元月10日夜于北京人大招待所

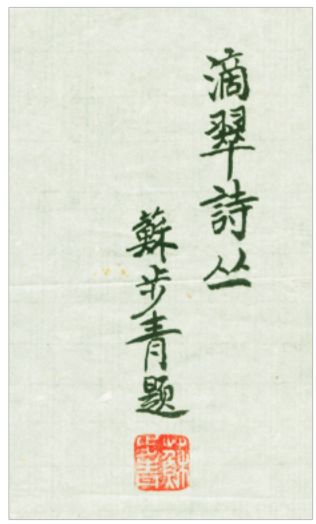
所附《暮秋偶成》七律三首如后：


暮秋偶成三首
一
種得東籬菊，重陽猶未開。
風搖秋影瘦，雁咽塞聲哀。
無處覓詩句，何人把酒杯。
衹將新鐵筆，聊寫舊情懷。
二
夢裏知何處？醒來只自憐。
江長離亂後，瀨廣水雲邊。
瀛海春猶在，藍田玉不煙。
臨風懷舊雨，垂老續殘篇。
三
何處最消魂，昨宵夢見君。
年華終逝水，富貴亦浮雲。
遺照寒燈影，征衫舊酒痕。
西風不相饒，蘿屋自敲門。
煥新吟丈 郢政
蘇步青未是艸
一九八八·一·一〇 录于北京

苏老这三首诗稿，后交芜湖诗词学会会刊《滴翠诗丛》编辑部，并在该刊上发表。

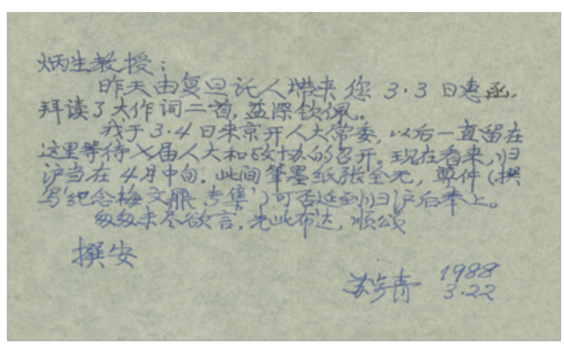
这里还要附带说明：该诗刊的刊名题词也是请苏老题写的，并一直用到现在。

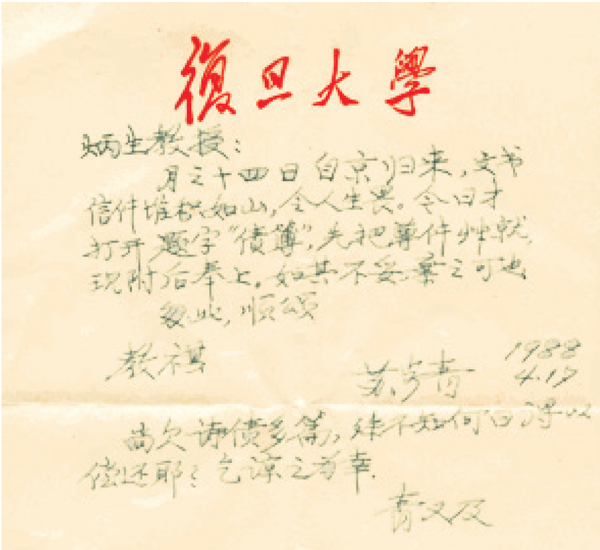




但是，苏老的第一幅题词没有写赠予单位（梅文鼎纪念馆）和题写时间（年、月），送到宣城后，文化局领导说这很遗憾，能否请苏老重写一幅，补上这个遗憾？为此，我又将此意写信给苏老，请他考虑，能否重新再写一幅，注明赠予单位和题写时间。同时。我又附上我写的关于宣城敬亭山的两首词。

哪知，此时苏老已到北京开会，信是复旦大学转送到北京交给他的。他怕我着急，就在北京会议期间抽空复信。说明情况：北京没有纸笔，条幅书写要等回上海再写。多么认真，多么令人感动！


炳生教授：
昨天由复旦托人带来您3.3日惠函，拜读了大作词二首，益深钦佩。
我于3.4日来京开人大常委，以后一直留在这里等待七届人大和政协的召开。现在看来，归沪当在4月中旬。此间笔墨纸张全无，尊件（撰写'纪念梅文鼎专集'）可否延到归沪后奉上。
匆匆未尽欲言，先此布达，顺颂
撰安
苏步青 1988 3.22



复旦大学

炳生教授：

月之十四日自京归来，文书信件堆积如山，令人生畏。今日才打开题字"债簿"，先把尊件草就，现附后奉上。如其不妥，弃之可也。

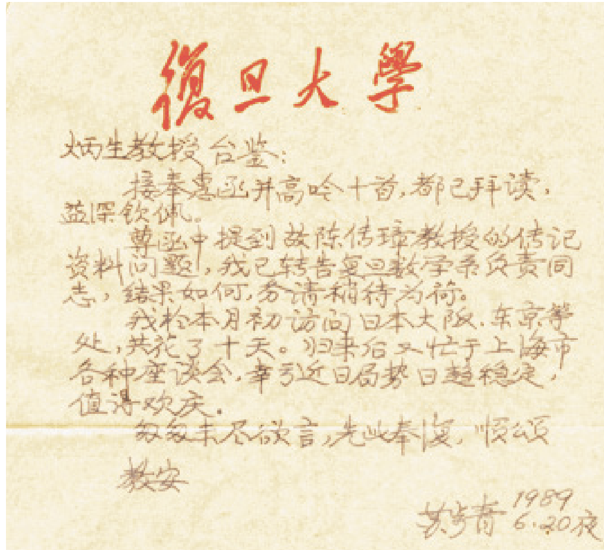
匆此，顺颂

教祺

苏步青 1988 4.17

尚欠诗债多篇，续不知何日得以偿还耶？乞谅之为幸。

青又及



复旦大学

炳生教授台鉴：

接奉惠函并高吟十首，都已拜读，益深钦佩。

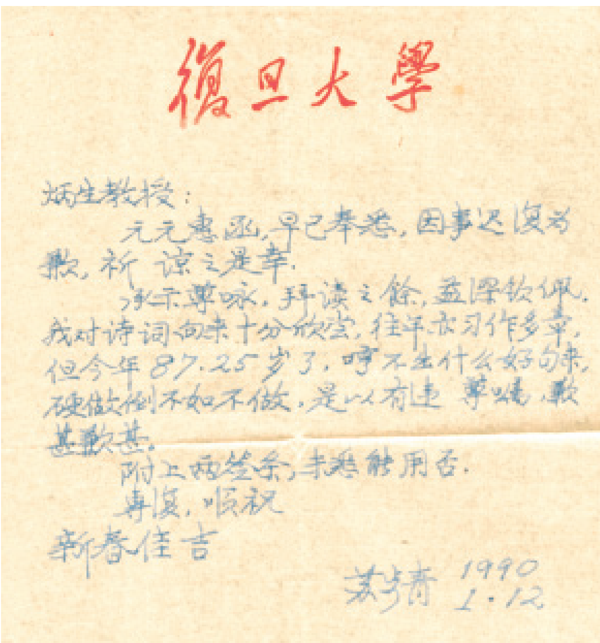
尊函中提到故陈传璋教授的传记资料问题，我已转告复旦数学系负责同志，结果如何，务请稍待为荷。

我于本月初访问日本大阪、东京等处，共花了十天。归来后又忙于上海市各种座谈会，幸近日局势日趋稳定，值得欢庆。

匆匆未尽欲言，先此奉复，顺颂

教安

苏步青 1989 6.20夜



复旦大学

炳生教授：

元旦惠函，早已奉悉，因事迟复为歉，祈谅之是幸。

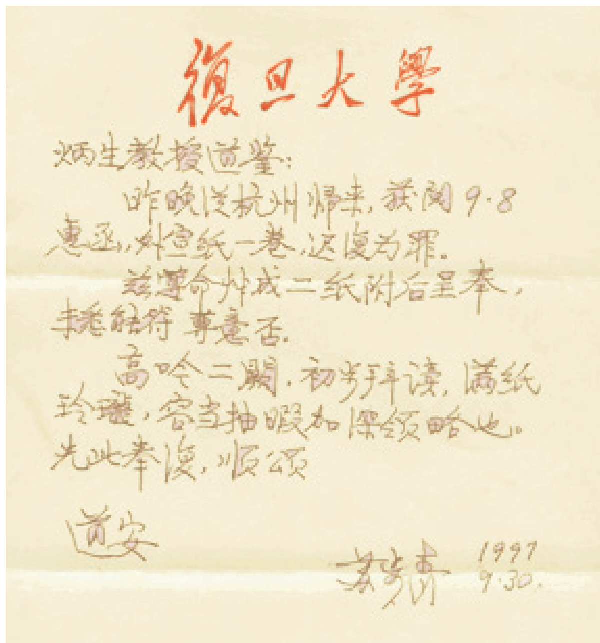
承示尊咏，拜读之余，益深钦佩。我对诗词向来十分欣赏，往年亦习作多章，但今年87.25岁了，哼不出什么好句来，硬做倒不如不做，是以有违尊嘱，歉甚歉甚。

附上两笺条，未悉能用否。

专复，顺祝

新春佳吉

苏步青 1990 1.12



复旦大学

炳生教授道鉴：

昨晚从杭州归来，获阅9.8惠函，外宣纸一卷，迟复为罪。

兹遵命草成二纸附后呈奉，未悉能符尊意否。

高吟二阕，初步拜读，满纸珍璀，容当抽暇细读领略也。

先此奉复，顺颂

道安

苏步青 1997 9.30.

苏老在北京开完会回上海后，即在百忙中，将梅文鼎条幅先行写就，其上补写了抬头和落款的时间寄给了我，并谦虚地说"如其不可，弃之可也"。其实，苏老书法端庄华丽，楷书兼有隶书风格，别具神韵，称得上书法中的上品。现在这幅题词，成了宣城梅文鼎纪念馆的珍藏。我拿这幅题词到宣城去换回了那幅题词。现在，第二幅题词成了梅文鼎纪念馆的珍藏品，而苏老前幅题词，就被我收藏起来了。

至此以后，我已经把苏老不仅作为我景仰的数学家和老师，而且已经把他老人家看作是我的诗友了。我每次写信时，总想把近期所作的诗词附上几首，请他指正。

1989 年，我正在研究安徽科技史，给安徽近代数学家写小传。其中复旦大学陈传璋教授是安徽籍数学家和数学教育家。他刚去世不久，但是我对他的了解很少。我曾经给复旦大学数学系办公室去信询问，但没有得到回音。于是我给苏老去信请他给数学系联系，把陈传璋教授逝世时的讣告和悼词寄给我，以便写他的小传。随信把我近期所写的词选出十首，打印成一张 A4 纸，寄请他指正。

当时，苏老刚访问日本回国，正忙于各种会议。我的这点小事，本不值得他费神去做，但是他看了词作，饶有兴趣，还是及时为我向数学系负责人关照此事。之后不久，复

诗中有数，叙中有诗

旦大学数学系就寄来了有关陈传璋教授的讣告和悼词等有关材料。

1990 年元旦，我给苏老寄去贺年问候，也把近期所写的几首诗词附录于信后，并请他将自己的诗作寄示两首给我拜读和用作诗刊发表（当时我兼诗刊《滴翠诗丛》副主编）。他在元月 12 日的回信中表示“我对诗词向来十分欣赏。往年亦习作多章。但今年 87.25 岁了，哼不出什么好句子来。硬是做倒不如不做”，并表示歉意。

这以后，考虑到苏老年高体弱，时因疾病住院，不敢再大胆地打搅他了，信渐稀少。直到 1991 年 9 月，临近苏老九十大寿寿期。我忍不住写了一首《西江月》词，为苏老贺寿。词曰：

国庆欣逢寿庆，畴人即是诗人。苏翁九秩又逢春，老树繁花似锦。科苑文坛共祝，新人新纪相迎。青青藤屋更多情，预期期颐喜讯。

词中所谓“畴人”，乃中国古代对数学天文学家的统称。所谓“藤屋”是指苏翁为青藤环绕的居所。

国庆期间，收到了苏翁 9 月 30 日所写的回信。他所写的两首诗作，我及时转给诗刊《滴翠诗丛》发表。

这以后，还希望能与苏翁诗文往来，得到他更多的指教。但是，等来等去，终究没有了回音。因此这也是我收到苏翁的最后一封信。后来据上海朋友说，此后，鉴于苏老身体原因，领导指示由秘书接管苏老的书信往来，不让他再为此烦神伤身。又过了几年，我到上海出差，想去复旦大学看望他老人家，朋友说，苏翁已经住进了医院修养，不接见外人了。可惜！这位文理兼通的大学问家、大科学家、大诗人，我终究没有能见上一面。太遗憾了！

2003 年初春，传来了 102 岁的苏翁辞世的消息，我不胜悲痛。痛惜天不惜英才！当天晚上我草就挽联和绝句一首，以表达这份从未谋面却刻骨铭心的悼念之情。挽联曰：

苏步青先生

学贯东西，享百年大寿
胸涵文理，著千卷华章

悼诗曰：

学界难逢百岁翁，更难文理一炉融。
惠书历历人何在，风范长存永忆中。

回顾以上这段我与苏步青先生五年的书翰交往，所得苏老七封亲笔信，实在是我一生之中最重要的经历。从苏老的书信中我得到了教益和鼓励，使我在文理并重的研学路上，走得轻松愉快，走得坚实从容。

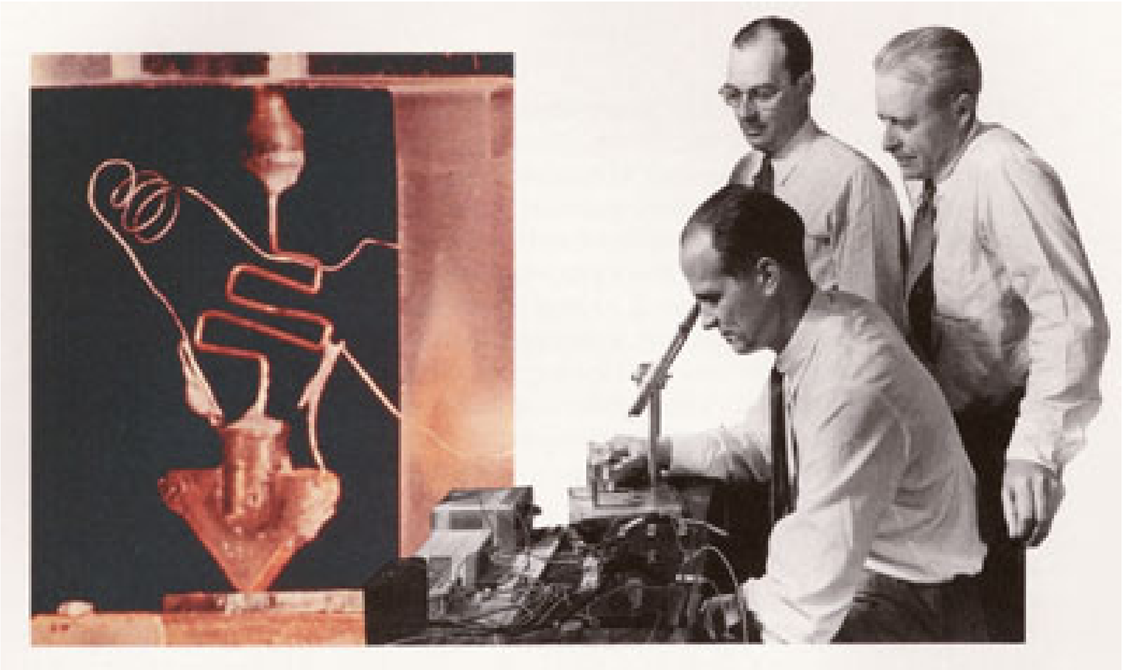
作者简介：胡炳生，安徽师范大学数学计算机科学学院教授，享受国务院特殊津贴。从事高等数学教育五十多年，在数学史和数学教育研究以及数学文化等方面出版和发表百余部（篇）专著和论文。业余爱好中国古典诗词，出版诗集两部，曾获我国首届华夏诗词奖二等奖。

微博上的数学漫游（连载四）

歌之忆 http://weibo.com/wildmath

柏拉图式的数学赋予我们以美的眼光去解读日月星辰，释疑声光电化。但真正的数学却并不耽于美、并不满足于只做自然的倾听者。正是那些看上去远离人间烟火、最具抽象华美质感的数学，创造出了今天的信息社会，构建出现代文明的技术基础。汲天地之精华而有了数学，取数学之精华成就了今天的技术世界。

信息时代的数学前奏



发明晶体管

为庆祝瑞典国王的生日而举办的数学论文竞赛，引来了直觉和逻辑的精彩对阵。法国大数学家庞加莱的直觉，经过瑞典小将弗拉格门（Phragmén）在逻辑上的层层诘问，最终打通了通往混沌的道路。在这场逻辑与直觉的较量中，瑞典青年才俊弗拉格门从一名初创期刊的小编辑，成为被世人铭记的数学名家。

在弗拉格门的那个时代，数学家们所醉心的函数论，极尽抽象之能事，全然一副不食人间烟火的形象。很难把那样的数学与今天的技术世界联想到一起——我们拥有了拿起手机随时聊天的便利，我们随心所欲地在互联网上享受着虚拟人生。这个一切都被数字化的信息时代，正是靠最抽象的数学包括弗拉格门的理论，以其巨大的力量支撑起来的。

瑞典裔美国电信工程师奈奎斯特（1889-1976）

美国的贝尔实验室为我们竖起了数字化世界的第一个里程碑。这是发明了晶体管和激光的实验室，是发明了CCD成像技术的实验室，是发明了C/C++语言的实验室，也是创建了信息论的实验室。这个塑造了现代信息社会的实验室，迄今已经诞生了7位诺贝尔奖得主。

毕业于耶鲁的瑞典移民奈奎斯特（Nyquist）博士，无疑是贝尔实验室进军现代通信技术的先锋。要高效地传输信息，最好的办法是数字化。可是模拟信号如何才能对应到一串数列？你又如何能确保从数列复原出模拟信号？奈奎斯特指出了前提条件：对信号采样的速率，至少要达到信号最高频率两倍以上。

奈奎斯特提出的条件，早已经成为现今电子信息教科书的标准内容。要求信号的频率低于采样率的一半，这看似十分轻巧的一个条件，却像是一个巨大的幕布。而幕后究竟是地狱还是天堂，却十足耐人寻味。众人忽略了它，而真正思考信号结构的思想者，才嗅出这里面大有文章。这个人就是维纳（Wiener）。

维纳拉来英国的数学天才佩利（Paley），攻下了奈奎斯特条件真正的数学含义，提出了深刻的佩利-维纳定理。这个定理的关键部分就是建立在弗拉格门-林德洛夫的理论上。简单而言，符合奈奎斯特条件的信号，必然是某种类型的解析函数。不过这种深刻的结果，在许多“现代”电子信息教科书上一概不去引述评论。

无数古典音乐迷，无法忍受CD带给他们过于纯净的音色。若进不了音乐厅，他们宁愿花大价钱去听黑胶（LP）。而弗拉格门们的数学，恰好解释了此中奥妙。CD的数字化音乐，播放的不过是解析函数！它当然过于光滑了。它怎么可能有黑胶的模拟录音带给你的无比温暖的音色，还有丰富多彩的、透着木质情调的泛音！

依然是在贝尔实验室，奈奎斯特的探索由香农 (Shannon) 发扬光大为精彩的采样定理，打开了通往数字化世界的第一扇大门。我们从手机上或 CD 上所听到的音乐，就是由一组解析函数（sinc- 函数）线性叠加而来。这个连接了模拟世界与数字世界的采样定理，带给我们莫扎特，也带给我们江南 Style。

或许有史以来，应用最频繁、创造出最大经济价值的数学定理，就是奈奎斯特 - 香农的采样定理。你每一次用手机、每一次上网、每一次听 Mp3，都用到它。它把我们带到数字化的天堂，它把我们送入数字化的地狱。而这个数字化世界的潘多拉魔盒，里面装的就是名为指数型整函数的解析函数精灵。

小仓金之助

日本数学家小仓金之助（1885-1962）

连接了物理世界与数字世界的奈奎斯特 - 香农采样定理，一端开启了我们日常生活离不开的手机、CD、Mp3，另一端却通往高深莫测的黎曼 zeta 函数。其前世今生，简直可以媲美一部精彩的小说。好的理论总是有诸多起源，最早接近于现代形式的采样定理发表于 1920 年，作者是日本数学家小仓金之助（Kinnosuke Ogura）。

“新叶滴翠，摘来拂拭尊师泪”。日本无疑是个极度善于学习的民族。我们常常满足于找到对手的缺陷从而遐想对手的渺小，但他们却始终在研究对手的优势从而成全自己的强大。2001 年，当日本宣布要在未来 50 年拿 30 个诺贝尔奖时，中国人多不以为然。可自 2001 年算起，日本已经拿下了 10 个诺贝尔奖。

更令国人难以释怀的是，日本第一个由私立大学培养出来的数学博士小仓金之助，既对《九章算术》情有独钟，又为日本侵华战争摇旗呐喊。刀与菊的双重性格，常常遮蔽了历史真相。中国人习惯于感恩，我们至今仍在感念其人对中国数学教育和数学史研究带来的积极影响。

90 年前，日本数学家小仓金之助用复分析率先论证了采样定理。这类“违背国人常识”的事情远不止一例。当后来获得菲尔兹奖的小利翁斯（Pierre-Louis Lions）与其合作者研究出现代图像处理的核心模型“尺度空间”之后，人们再次惊讶地发现：日本计算机科学先驱饭岛（Taizo Iijima）在 50 年代末就已经发表了

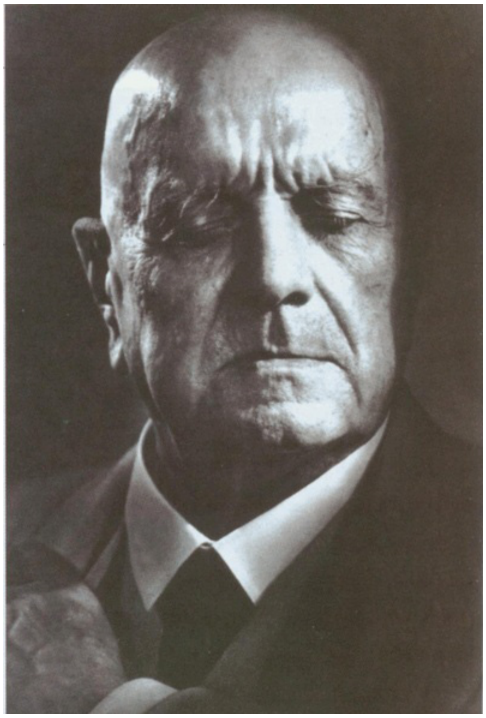
类似成果。

小仓金之助能在采样定理上做出成绩，靠的是钻研芬兰数学家林德洛夫（Lindelöf）的复分析专著。当世之下，快餐式的速成学习成为时尚，钻研沦为一种稀缺的习惯。当年林德洛夫发现自己身边的天才阿尔福斯（Ahlfors）自我感觉甚好、妄想翘掉奈望林纳（Nevanllina）的数学课时，将其好生训了一通，责令其按部就班地学习和考试。

阿尔福斯家境良好，但他做大学教授的父亲却从未要求孩子超前学习。芬兰的某一任总理曾说：给孩子最好的教育，等于给了他最好的人生。而最好的教育，就是按部就班地成长。摆脱瑞典和沙皇的统治，立国还不足百年的芬兰，不仅创造出了世界级的品牌诺基亚，还创造出位列全球之冠的芬兰教育。

在远离世界数学中心的日本，小仓金之助们必须埋头苦读才能学有所成。正是靠这种潜心努力，战后的日本不断涌现出世界级的大学者。阿尔福斯回忆到自己无须闭门苦读：他的身边全是世界级的数学家，他生活在鲜活的数学中，他的研究纯然就是世界级的。两种际遇，两种道路，都登上了顶峰。

奈望林纳



芬兰音乐家西贝柳斯（1865-1957）

优秀的教育传承，成就了由林德洛夫、奈望林纳和阿尔福斯这群大师领衔的芬兰复分析学派。阿尔福斯获得了菲尔兹数学奖和沃尔夫奖。奈望林纳担任过国际数学联盟的主席。而四年一度的世界数学家大会，不仅会颁发菲尔兹奖，还同时颁发以信息科学为主题的应用数学大奖——奈望林纳奖。

为芬兰数学带来了极高的荣誉的亚纯函数奈望林纳理论，被大数学家外尔（Weyl）赞誉为二十世纪经典。冷峻而富有逻辑的数学作品，就像芬兰作曲家西贝柳斯的音乐——那是一种追求深刻逻辑的“绝对音乐”。奈望林纳 12 岁听音乐会时迷上西贝柳斯。一生与爱因斯坦、希尔伯特等无数名流交往过的他，最推崇的人正是谱写了《芬兰颂》的西贝柳斯。

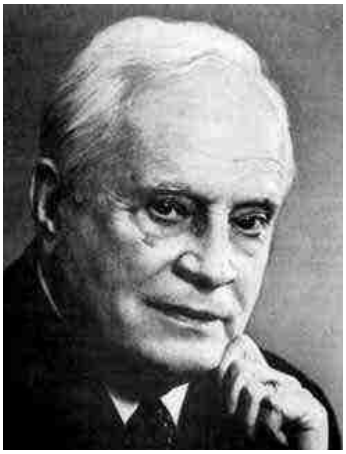
终身挚爱小提琴的西贝柳斯或许不知，这位 12 岁的粉丝奈望林纳已经是小提琴高手，常与母亲和哥哥演奏三重奏，长大后还组建过室内乐团。这位为芬兰赢得至高荣誉的数学家，不仅执掌过国际数学家联盟，还两度出任芬兰最高音乐学府西贝柳斯学院的理

事长。他，用最美的数学谱写了西贝柳斯式的芬兰颂。

艰难，或是人生的必由之路。奈望林纳博士毕业后只能在中学教书。每周 20 多个小时的课外加保险公司的兼职，也只换来杯水车薪。令人难以想象的是，为其带来毕生荣誉的奈望林纳理论，就是在其人生最艰难的时期干出来的。所有的夜晚、所有的周末、所有的节日，为他铺就了通往荣誉的路。

芬兰数学家梅林

再回首看一代领袖米塔 - 莱夫勒创业之不易。当初他在法国追随厄米特，小有成绩后将离开巴黎转到德国寻访魏尔斯特拉斯，此时看到其家乡小报刊登了一则通告——通告家乡父老他已加入法国数学会成为会员，惊得他羞愤难当。稀松平常的事搬上了新闻，多少反映出米氏所面对的学术环境远非一流。



芬兰数学家奈望林纳

就是从这样不起眼的学术起点，米塔 - 莱夫勒的学生梅林（Mellin）在 40 多岁有了成绩；随后的林德洛夫在不到 40 岁做出了更好的成绩；其下一代奈望林纳的辉煌成就却集中在 30 岁还不到的 3 年；再接下来阿尔福斯崭露头角解决 Denjoy 猜想是在 21 岁，并最终拿到菲尔兹奖。五代师徒之链条，诠释了学术传承的意义。

芬兰数学家林德洛夫

芬兰数学家阿尔福斯

如今许多人热切盼望展露才华，新闻传媒却极尽渲染那些未必经得起时间考验的成就。想想看，当初自鸣得意的阿尔福斯，要不是被老师林德洛夫强迫着按部就班打基础，如何能去摧城拔寨？魏征在《谏太宗十思疏》所言“求木之长者，必固其根本；欲流之远者，必浚其泉源”，也可被当作治学箴言。

富有经验的老师，乐于指导学生固其根本、浚其泉源。芬兰数学之父林德洛夫在退休之后专注于培养人才，无私地向学生开放他极其丰富的藏书。每个周末上午 8 点开始，他会在自己的图书室与学生们交流。阿尔福斯借阅了康托的著作，却从导师那里得来极有价值的忠告——可千万别去当逻辑学家！

数学在表面上不过就是依靠逻辑规则来做形式推理。但大数学家小平邦彦说——他始终搞不明白，自己算是个数学不错的家伙，

什么数学都不畏惧，却一生总是念不好数理逻辑！想想看，围棋是一门艺术，但没有哪个只懂规则而不领悟规律的人，能成为围棋高手。规则通往逻辑，而规律却陪伴直觉。

数学究竟是逻辑还是直觉，似乎只有艺术才能化解这种争论。当初，米塔-莱夫勒被厄米特鼓动去追随魏尔斯特拉斯，因后者在创造更严密的分析数学体系。虽然逻辑的严密破解过无数直觉的谬误，但逻辑却并非数学家的最爱。记住魏尔斯特拉斯的率性表白："要想成为数学家，首先得成为诗人！"

从最抽象的数学读出诗意，就如爱因斯坦为欧几里得几何而心灵震颤。尽情享受诗的意境，浑然忘却诗的格律，最美的数学一定是行气如虹却又回归逻辑的，正如最美的艺术一定是浑然天成且又返璞归真的。当数学成为艺术，我们才能读懂歌德那句"在限制中才显出能手，只有法则能给我们自由"。

柯瓦列夫斯卡娅

俄罗斯数学家柯瓦列夫斯卡娅

■ 擅长用 ε 和 δ 谱写诗篇的魏尔斯特拉斯，在逻辑的鬼使神差下，向沉浸在古典柔和之美的数学献出了一朵"恶之花"——他构造了一个奇妙的连续函数，一个处处没有切线的曲线。它违背了常识，却又在逻辑上无懈可击。那曲线如此令人心烦，让人不由得想起《恶之花》里的诗句：你究竟来自幽深的天空，还是地狱？！

如果说魏尔斯特拉斯的函数给正统的数学带来了不小的冲击，而他倾心培养的索菲亚•柯瓦列夫斯卡娅，则给正统的数学圈带来了更大的冲击。在俄罗斯美女面前，魏氏可没有显摆奇异的曲线。他拿出的是自己的绝活——分析数学。而聪颖的女弟子，在偏微分方程初值问题的解析理论上一展风采。

由柯西、黎曼等大师们建立起来的复变函数论，可谓数学中的绝代佳人，令无数人垂涎三尺却又狼狈不堪。比如在复微分几何上成就卓著的几何大师陈省身，某次问一个学生：你的复变函数念得怎样？被这门课弄晕了的学生极为窘迫地回答：我只考了个 C。陈先生哈哈一笑：那我比你强，我得了 C+！

在魏尔斯特拉斯指导下做了三篇论文的索菲亚，被哥廷根大学授予了博士学位。但优美的数学无法打动社会对女性的成见，魏尔斯特拉斯只会倒腾数学，但搞不定索菲亚的教职问题。这时，在数学圈长袖善舞的米塔-莱夫勒，娴熟地

中国数学家陈省身

玩起了学术政治，终于将柯瓦列夫斯卡娅安顿进了斯德哥尔摩大学 。

索菲亚在斯德哥尔摩大学可谓如鱼得水——她兴奋地嚷嚷 :“我的学生真是超赞！真的呀，我们招到了最顶尖的学生——而最差的都到乌普萨拉（Uppsala）大学去了！”其实，创立于 15 世纪的北欧最古老学府乌普萨拉大学，连同创立于 17 世纪的隆德（Lund）大学，都是瑞典享誉世界的高等学府，都培养出了世界级数学家。

瑞典民族英雄波尔林（Beurling）就身出北欧最古老的乌普萨拉大学、最终跻身普林斯顿高等研究院，享有世界声誉的卡莱曼（Carleman）和卡尔松（Carleson）在这里获得了博士学位。而隆德大学不仅有拉尔斯 • 戈丁（Lars Gårding），还有 2012 年 11 月 25 日刚刚去世的菲尔兹奖与沃尔夫奖双料获奖者拉尔斯 • 霍尔曼德尔（Lars Hörmander）。一个数学人才辈出的优秀民族啊 !

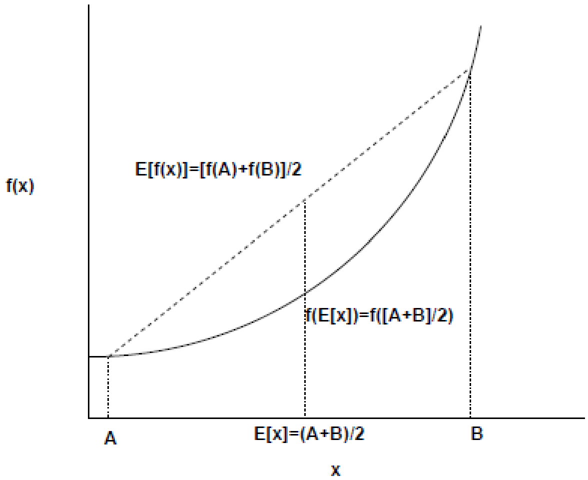
从数学到数学密集型产业

丹麦电信工程师琴生

从艺术可以解读一个民族的心灵，而从数学可以解读一个民族的智慧。芬兰和瑞典，可谓分析数学的双子星座。其强悍又细腻的风格，不啻是民族性格的镜子。优质的数学教育打造出卓越的人才群体，成就了数学密集型产业——芬兰的诺基亚与瑞典的爱立信。通信行业绝大多数发明，玩的就是数学。

在通信这个数学密集型行业，傅立叶分析无处不在、统计随处可见、矩阵论乃家常便饭、最优化触目皆是。随机过程之于系统建模、概率大偏差理论之于网络性能分析、代数学之于信道编码，其成就有目共睹。纳什均衡、流形、随机矩阵不算新奇。这个行业也许算不上数学天堂，但绝对是数学乐园。

通信受益于数学，而数学从通信那儿也获益良多。如巴赫的哥德堡变奏曲一样变化繁多的琴生（Jensen）不等式，在经济学、统计学、信息论、统计物理里八面玲珑。经济学承认边际效用递减，于是谁想规避风险，那他财富的期望效用将会低于期望财富的效用。如此精巧的数学，由丹麦电信工程师琴生提出。



琴生不等式

哥本哈根电话公司的工程师琴生，其数学成就远非广为人知的琴生不等式。这个业余数学家在复变函数论里干出了一个相当深刻的琴生公式，直接促成了奈望林纳的亚纯函数理论。喜好数学的他，在一次聚会上结识了学数学出身的厄兰（Erlang），将其拉进了电话公司专职研究电信问题。

电信业追求尽可能多的用户，但服务资源却是有限的。如何对大规模的、随机的、并发的用户需求来提供服务，则是基本的问题。厄兰的重大贡献在于为通信网的研究建立了基本范式——研究所谓的 trade-off 关系。这个研究范式本身，比他的厄兰分布还要重要，虽然厄兰已是话务量的国际单位。

丹麦数学家、统计学家、电信工程师厄兰

厄兰后来成了哥本哈根电话公司一个实验室的主任。如今执掌著名电信企业研究的，不少都是数学出身的牛人。玩高端的陈省身示性类的数学博士霍华德•格林（Howard Green）正在执掌爱立信的网络战略部，发明小波提升格式的维姆•斯威尔顿（Wim Sweldens）博士正统领阿尔卡特 - 朗讯的探索实验室。创新的主攻手，与数学似乎总有千丝万缕的关联。

英国应用数学家莱特希尔

许多人将科技创新寄托于数学的突破，但科技史上也不乏聪明过人的数学家，他们在尚未数学化的新领域，却往往会失去洞察力。英国曾经有位数学成就无可挑剔的一流应用数学家莱特希尔（James Lighthill），其人在数学上已经名盛至极，但在英国乃至全世界人工智能的圈子里，他的名气倒是更大。

全世界数学家最崇拜的恐怕要数剑桥大学的卢卡斯讲

座教授，因为这个位置上有牛顿、狄拉克等科学巨星。而莱特希尔正是狄拉克的继任者。上世纪 60 年代，尚未担任卢卡斯教授的他，考察了爱丁堡等大学，断言机器人与语言处理技术等等毫无前途。他的《莱特希尔报告》，把人工智能打入了冷宫。

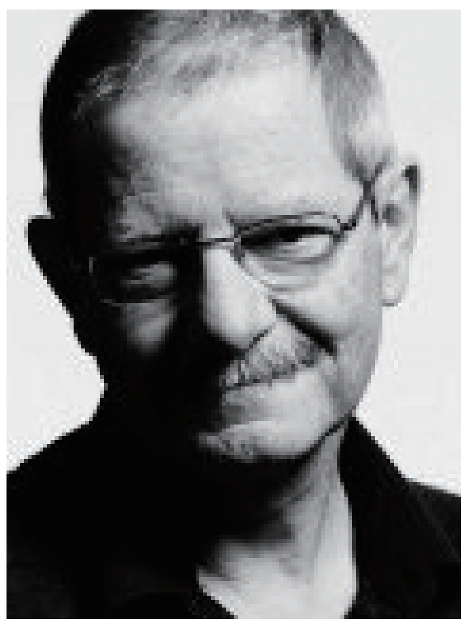
当时爱丁堡大学的人工智能研究部，有个自幼爱玩计算机的研究助理阿姆斯特朗（Joe Armstrong），受此“人工智能之冬”的影响，不得不改往他处求职。一番周折之后，落户爱立信。在他尽情把玩人工智能的 Prolog 语言之际，耳濡目染爱立信繁复的电话业务，居然倒腾出了计算机 Erlang 语言。

有人说，Erlang 是用来纪念数学家厄兰的；也有人说，Erlang 是爱立信语言（Ericsson Language）的缩写。其实阿姆斯特朗在发明 Erlang 语言的途中，屡屡与东家分分合合。如今，脱胎于人工智能 Prolog 语言的 Erlang 语言，因其高度并发、容错能力，支撑起了 Facebook 和 Amazon 的庞杂在线业务。

经历过莱特希尔一手造成的“人工智能之冬”，阿姆斯特朗发明了 Erlang 语言，或许算祸中之福。但人工智能在今天的发达，恐怕是当年无数聪明人甚至最厉害的数学家始料未及的。反对人工智能的卢卡斯教授莱特希尔，其继任者乃天下闻名的霍金。可是如果没有人工智能，霍金靠什么与我们对话？

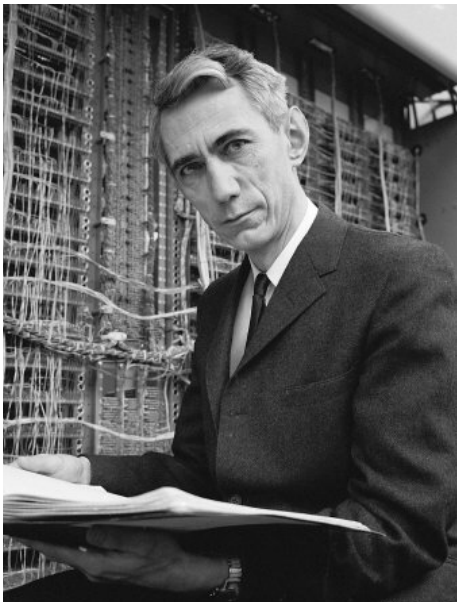
英国物理学家霍金

图标 :Facebook、Amazon



Erlang 语言之父，瑞典人工智能专家、工程师阿姆斯特朗（Joe Armstrong, 1950- ）

开启信息科学之门



美国数学家香农

从通信到人工智能，一切都发生在一个令人不可思议的年代、一个令人热血沸腾的年代。有史以来最为惨烈的第二次世界大战刚刚结束，1946 年 ENIAC 计算机问世，1947 年圣诞前夕肖克莱、巴丁、布拉坦发明了晶体管，1948 年香农发表了《通信的数学理论》，1950 年图灵发表了《计算机器与智能》。

香农的《通信的数学理论》，开启了人类技术史最具风采的划时代篇章——用充满天才直觉的崭新概念和 23 个定理，精确计算出通信的理论极限和数据压缩的理论极限。用数学勾画出一门技术的构架，亘古未有。香农无疑是开天辟地的思想家，而不是那种只会把符号写到纸上来灌水的蝇营狗苟之流。

与香农开辟通信行业相比，图灵更是惠及人类的智慧本身。图灵 16 岁读懂了相对论和量子力学；20 多岁发表图灵机的概念，明确定义了算法；1950 年，38 岁的图灵在历史悠久的心理学与哲学期刊 Mind 上发表了《计算机器与智能》，提出“机器会思考吗”这样深邃的问题。一个思考何为思考的人，注定要走入思想史。

二战历史曾经有如此精彩的一幕——即将缔造出信息科学的稀世天才——香农和图灵，在 1943 年的贝尔实验室，一起喝咖啡、聊天。他们分属于各自团队，严守机密，对对方的事业一无所知。命运之神一定会暗自惊叹——图灵破译了德国的英格玛密码，而香农却在为罗斯福与丘吉尔的通话进行加密。

假如历史给图灵一份宽容，信息科学会有什么样的境遇？香农在贝尔实验室遇到图灵之后的第 5 年发表了重量级论文《通信的数学理论》，时年 32 岁。玩解密的图灵破译了英格玛密码而名扬四海，而玩加密的香农又在 33 岁时发表了《保密通信原理》。可叹香农声誉日隆之际，图灵却成为天堂里的孤魂。

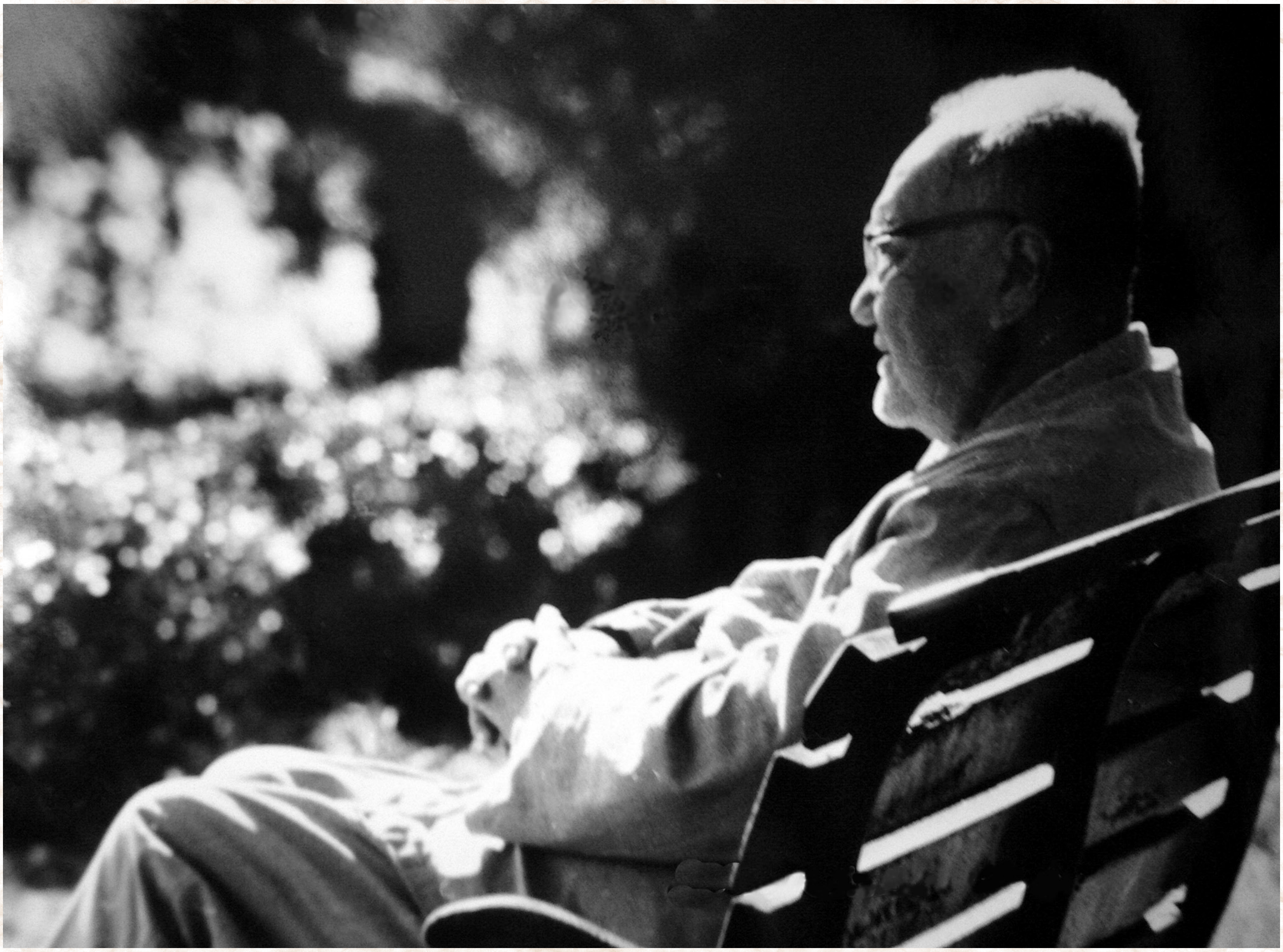
英国数学家图灵

“学为人师，行为世范”的典范蒋硕民教授

蒋迅

欧阳顺湘博士在《数学文化》第3卷第3期里有一篇非常精采的文章“最美的数学就如文学”，其中提到一位受哥廷根的两位中国学生——魏时珍和朱公谨影响而赴哥廷根随柯朗做博士论文的人，他就是原北京师大著名教授蒋硕民（1913年3月11日 - 1992年5月11日）。2013年3月11日是蒋先生诞辰100周年的日子。说起蒋硕民教授，可能现在的年轻数学家们大多不知道他。根据互动百科，“蒋硕民是北京师范大学教授，研究方向是偏微分方程、近世代数。蒋硕民是中国偏微分方程学科的先行者，近世代数早期介绍者之一。他集中西学问于一身，培养了众多的优秀人才，把毕生的精力全部贡献给了教育事业。”（材料取自程民德先生主编的《中国现代数学家传》第三卷）这样的论述比较精辟地概括了他的一生。

蒋硕民先生1913年3月11日生于北京一个民主革命派的家庭。父亲蒋作宾，1905年在日本加入同盟会，后参加辛亥革命。母亲张宏楚，是辛亥革命志士张通典之女。蒋硕民先生1928年进入世界有名的德国哥廷根大学学习。在德国，他受教于希尔伯特（D. Hilbert）、柯朗、埃米•诺特、赫格洛兹、冯•诺依曼、雷立奇、范•德•瓦尔登教授等大数学家。蒋硕民先生的博士导师原为柯朗。他得到柯朗所拟定的题目后，经过将近一个学期的时间，证出该题是错误的，才又换为偏微分方程中层次相当高的“双元N次偏微分方程的一个混合边值问题”。在二战期间，柯朗因是犹太人被一些走了极端的学生赶出德国。他不得不转从雷立奇教授。



蒋硕民先生在北师大校园休息（李小烈摄影，陈黎提供）

1934年秋，雷立奇被聘为马堡大学数学系教授，蒋硕民先生随其前往，一方面撰写论文，一方面帮助雷立奇做些工作，写讲义，还上讲台解释。1935年6月19日他获得马堡大学哲学博士学位，同年回国。

回国后，蒋硕民任南开大学数学系教授，年仅22岁。1937年卢沟桥事变爆发后，南开大学被迫迁往长沙，不久迁往云南昆明，组成西南联合大学。蒋先生随学校辗转到了昆明。1940-1941年，日本侵略军大轰炸西南联大，一年级被迫搬到四川叙永去设立分校。蒋硕民、程毓淮和刘晋年三位教授前往并同住一单身教授房间。1941-1945年，他转往贵州湄潭的浙江大学数学系。1945-1946年，他回到西南联大。这一段时间里，他先后教了很多课程：微积分、高等代数、近世代数、微分方程论、偏微分方程论及变分法。抗战胜利后，联大的三所学校复原，

蒋硕民先生和蒋夫人杨维仪的合影

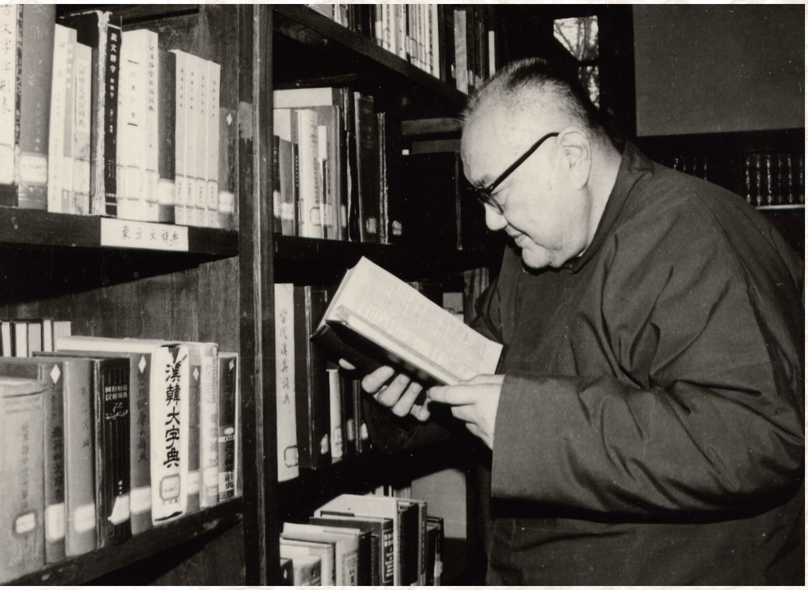
蒋先生因为原来是南开聘请的，有约在身，故前往天津南开任职。1947 年蒋硕民先生由南开大学休假去纽约柯朗研究所进修。1948 年再次回国，当时西南联大给云南留下了一个昆明师院，由杨武之教授任数学系主任。杨武之力邀蒋先生留下任代系主任，于是蒋先生向南开大学请了一年假到昆明师院，后来新中国政府成立，冻结人才，他没能再回到南开。1954 年全国院系大调整的时候，蒋硕民先生调到北京师范大学任二级教授，直到退休。当时教育部的人似乎不知道有这样一位资历颇为丰富的数学家。蒋先生身为昆明师院的教务长到教育部开会，很多大数学家都与蒋先生寒暄，而且中山大学和南开大学都邀请他去，这才意识到这个人很了得。当时那两所大学都归高教部管，而教育部不愿意把他让给高教部管辖的学校。于是一个调令让他 10 天内从昆明到北京，任北京师大二级教授。后来他的女儿回忆到，一家人从昆明到北京，光汽车就坐了七八天。在北京师大，他先后主办了分析数学方向的青年教师讨论班、进修班、研究生班及助教班等，担负起了培养研究生和青年教师的工作。此外，他还为研究生班、助教班系统讲授实变函数论、常微分方程、偏微分方程等课程。1992 年 5 月 11 日，他在北京去世。

蒋先生和北京师大数学系分析教研室的老师们

蒋先生和洪良辰、周美柯、李艾青、郇中丹、洪吉昌老师 (从左到右)

蒋硕民先生身体一直不好，文革期间又被迫做他不能承受的体力劳动，到文革后第一批大学生进校读书的时候，蒋先生已经因身体原因不能站在讲台上上课了。记得那时我们同学一起到图书馆前散步，时常看到蒋先生坐在椅子上晒太阳。我们也就利用这个机会上去与他聊天。77 级有一些同学因为在文革期间自觉学习了英语，学校允许他们免修英语。于是数学系领导找到蒋先生，希望他能为这些同学开一个数学英语学习小组，他愉快地接受了。课堂就设在他的家里。这是他最后一次为学生上课，而且不是一门正式的数学课，但他仍然认真准备。上课时，同学们都聚集到他的家里。虽然他是留学德国的，但他的英语、法语也同样精通，甚至能阅读英、法文的文学名著。1950 年，他旁听俄语课，一年后就阅读俄文文献。

到大学毕业时，其中一位同学在申请留学时请蒋先生写推荐信。蒋先生让他先用英文写了一个自我介绍。这位同学的英语虽然还不错，但写出来的东西还是跟西方人的写法有很大差距，比如中式倒装句，用词不当，从句过长等等。没有想到蒋先生亲笔为他把这篇短文重写了一遍，而且一段一段地告诉他为什么这么修改。1986 年，这位获得密西根州立大学助学金并将要赴美留学的学生去向他告别。蒋先生高兴地介绍了这个学校，就好像他在那里生活过一样。后来，蒋先生把他手写的推荐信交给了这位同学，我也得到了一份



蒋先生在系资料室参阅文献

蒋先生在参加会议

复印件。它印证了高枚老师在他的文章“高山仰止 —— 忆蒋硕民师”中对蒋先生“清丽的小字”的描述。

蒋先生在现在的数学界的知名度不高，但是老一辈数学家都知道他。1985 年 7 月 4 日，当代著名数学家陈省身到北京师大作“微分几何 50 年（1935-1985）”的学术报告。在我的印像中这是陈先生唯一一次到北京师大演讲，据说是因为蒋先生的邀请。在会上，他一开始就专门提到了蒋先生。台湾“中央研究院”院士、蒋先生在哥廷根的同学程毓淮博士也曾应蒋先生的邀请到北京师大做过学术报告。我手中还有一份田方增先生手写的回忆蒋先生的资料，不知道是否发表过。徐利治先生在一次访谈中回答了这样一个问题：“在西南联大数学系，除了华罗庚、陈省身、许宝騄这“数学三杰”十分突出之外，还有没有其他比较突出的数学人才？”徐先生说：“应该提到的是两位从德国哥廷根大学留学回来的教授，一个是程毓淮，另一个是蒋硕民。……蒋先生后来到北京师范大学工作。程先生后来去了美国，十五年前回国时，我在长春还接待过他。听说，他现在也去世了。这两个人学问很好，但不大写文章。因为他们不怎么写文章，也就没有什么名气，报纸也不会宣传。他们在哥廷根大学听过希尔伯特（David Hilbert, 1862-1943）和柯朗（Richard Courant, 1888-1972）的课。哥廷根大学当时是世界数学的一个中心。”

蒋先生与夫人杨维仪先生是在法国（不是在西南联大）认识的。杨先生早年留学法国，抗日战争开始后回国。1955 年到北京大学西语系工作，先后任法语讲师、副教授、教授。杨先生有时候显得对蒋先生厉害了点。蒋先生有糖尿病但又喜欢吃糖。记得有一次蒋先生刚刚拿起了一块糖，一下子被杨先生抢了过去。但谁都知道这是杨先生对他的细心关照。她一直是蒋先生的贤内助。我在美国留学期间需要学习法语。那时候互联网远没有现在发达，杨先生立即把她为北大编写的法语课本送给了我，还为我专门录制了两盒磁带，把其中全部课文都朗读了一遍。1994 年的一天我突然接到她的电话，原来她要到华盛顿特区去旅游，希望见我一面。那是我最后一次见到她。几天之后，杨先生在返回中国的国际航班上突发脑溢血，在东京病逝。

我在高枚老师的文章中读到“蒋师一直保持着自己在哥大求学时的作业，其中就有一些是经外尔（H. Weyl）批改并且在卷后签名的”。高枚老师在回忆录里写了很多关于蒋先生书籍的片段。在文革期间，蒋先生一家“只留得一大一小两间。没有地方安放书橱，又不忍将藏书作废纸处理。于是，依著一面墙，将书一层一层摞起来直至屋顶，形成了一堵书墙”。“先生拣出几本书让我带回阅读，其中有纽约大学数学研究所新近寄赠的英文版《希尔伯特传》。此书后来有了中译本，可惜没有收入原书卷首许多珍贵照片。”在他去世以后，杨先生把这些书籍和笔记都捐献给了北京师大数学系。联想到高枚老师的记述，我猜想那里面很可能有大数学家留下来的笔记呢。记得当时北师大数学系把这些书都存放进资料室。如果这些书籍还在的话，也许里面会有很多珍贵的文物。但愿数学系（现改名为数学学院）被搬出数学楼时，这些

书也跟随到了新家。

前面说过，蒋先生的身体不好，晚年多次住院。记得有一次我到北医三院去看望他，在病房里看到的是一瓶鲜花。这是我第一次在病房里看到鲜花。那个时候人们到医院看望病人一般都是带去水果罐头，第一次看到鲜花让我眼前一亮，原来还有这样的好礼物。他的家人轮班到医院陪伴他，到实在排不开的时候，我也加入进去。记得有一次他在病床上要小便，但不愿意麻烦我，竟然一直憋着。我当时没有经验也没有发现。后来一直后悔自己粗心大意。最后蒋先生过世也是在医院里，他那次一开始只是感冒，但因为年龄大了，又有多种疾病，所以还是住进了医院。医院对这样一位德高望重的老教授没有重视，将他跟好几位病人排在同一个病房里。结果，他的病不但没好，反而加重，最后竟与世长辞。

令人欣慰的是，蒋硕民先生培养了大批栋梁之才。我们可以列出的曾经受教于他的就有：李政道、林家翘、樊畿、程民德、万哲先、田方增、黄祖洽、王宪忠、叶彦谦、越民义、秦元勋、杨忠道、严志达、曹锡华、段学复、钟开莱、江泽坚、江泽培、谢邦杰、栗汝书、崔士英、郭本铁、杨忠道、陈国材、聂灵沼、王寿仁、孙本旺等等。很多人到北京时都会去看他。他育有四个子女。除了大儿子溺水身亡外，其他三位都成了数学工作者。他淡薄名利，真的是为中国的教育事业贡献了一切。他用自己的实际行动告诉了我们北师大的后来人，什么是“学为人师，行为世范”（北京师大校训）。

正值蒋硕民先生诞辰一百周年纪念日，笔者特地写了以上一点回忆，以纪念这位数学家。

附：“高山仰止 —— 忆蒋硕民师”

高枚

1992 年 5 月 15 日，天色阴沉，清晨就下起绵绵细雨，独坐对书，倍感凄冷。近午时分，却收到北京师范大学讣告：蒋硕民教授已于 11 日凌晨去世，15 日向遗体告别。我无法赶到瞻仰遗容，只能去邮电局拍发唁电，仅表哀思。当业务员核数计价时，我呆立一旁，突然悲从中来，涕泪俱下，几不能持。此后数日，往事如潮，涌上心头。绛帐依依 36 年，有许多事情应该写出来留个纪念。今年适逢先生五周年忌

日，乃作此文，以献一烛心香。

先生在北京师范大学执教 30 余年，受教益最大的大概是 1956-1958 这一期数学分析研究班的学生了。头一个学期，先生给我们讲的主课是“实变函数论”，同时又开了一门“线性代数”。上课时他解释说：“你们读分析专业，也要兼学代数。这样，将来教学和研究的路子都能宽一些。”当年先生虽然春秋鼎盛，但因患有高血压症，不能过累。然而两年期间，接连给我们讲了五门课。先生讲课，侧重数学思想和解决问题的方法，以及学科的发展方向，但也不忽略细节。板书整齐，随讲随写，清丽的小字很快就布满一块黑板。教室的玻璃黑板是两小块对接在一起，先生每个课时都是写满两块以后，擦掉；再写满，就响起下课铃声。先生还要求我们认真做作业。他曾对我说，德国哥廷根大学数学专业在希尔伯特的年代，学生的作业都要全部批改。后来被誉为本世纪上半叶最杰出的数学家之一的外尔年轻时曾协助希尔伯特做辅导工作，蒋师一直保持着自己在哥大求学时的作业，其中就有一些是经外尔批改并且在卷后签名的。

两年时间很快就过去了，同学们分赴全国各地。我因为在北京有家，寒暑假回来总是要到先生府上问候，师生关系愈发亲切，我也因此受到更多的教诲。十年浩劫，先生难免受苦。前期风暴过后，遣往锅炉房劳动。住房逼仄，只留得一大一小两间。没有地方安放书橱，又不忍将藏书作废纸处理。于是，依着一面墙，将书一层一层摞起来直至屋顶，形成了一堵书墙。我看到了曾经惦记：这样放书固然省地方，取阅却极不便。上层的够不着，底层的承受上面的压力也拿不出来。不过在那年月还有谁顾得上读数学书、外国书呢？随即释然。1973 年以后，先生的处境有了改善。据说政府考虑到蒋师在国外的亲友要回来探视，住房恢复到原来的比较宽敞

从上至下：
1957 年暑假数学分析教研组送别赵得春及韩汝瑜赴青海工作留影。前排左一为蒋硕民
1958 届进研班合影。前排左四为蒋硕民
1959 届毕业生合影。前排左六为蒋硕民

的格局。我前往祝贺，先生正坐在小沙发上，右手茶几上堆着高高的一摞书刊，左边一只方凳上散放的大概是已经看过的，先生手持一卷坐在这两堆书之间。告辞时，先生拣出几本书让我带回阅读，其中有纽约大学柯朗数学科学研究所新近寄赠的英文版《希尔伯特传》。 此书后来有了中译本，可惜没有收入原书卷首许多珍贵照片。半年后我将书送还给先生时，谈到有关大数学家兰道（E. Landau，犹太人）被学生中的纳粹分子驱除出哥廷根大学的记述。先生说确有其事：“当天我在校内数学研究所查阅资料，有几位路过现场的同学告诉了我大致的情况”。言罢怃然，默坐良久。从1977年下半年开始，我终于能够真正以数学作为自己的专业了。此时离研究班结业已19年，先生却更加细致地指导我的学习和工作。有一次议论选定教科书须顾及学生的程度，先生告诉我40年代他在西南联大执教时，曾经以梯其玛希（E. C. Titchmarch）的名著 The Theory of Functions（《函数论》，1962年国内出版了中文译本）作为课本；这本书对于初学者来说是深了一点，学生感到困难。说完先生谦和地笑着又加了 一句：“那时我还是年轻啊！”

1985年秋，北京师范大学数学系庆祝先生执教50周年。那天有几位数学界前辈，如江泽涵先生、段学复先生也莅临会场，表达他们与先生的情谊。可惜先生正住院就医，未能与老友把袂共披心腹。从那以后，我也很少有机会再坐到先生身边，倾听先生亲切的谈话了。叩访时往往是小保姆应门，告诉我蒋先生去医院看病了。1989年春节，正月初三，我去拜年。在门口望见先生靠在藤椅上，有两位客人在座，夫人杨先生陪坐于侧。先生看到我，即稍稍欠身，叫我：“高……”。客人辞去以后，师母感慨地对我说：“他还能记住你们这些几十年前的学生的姓名，可是我们孙子的名字，告诉他许多次，他总是记不住。”是的，我知道先生的心中除了数学以外，只有自己的学生。

1961届研究班合影。前排左四为蒋硕民

1969届3班合影。二排左五为蒋硕民。1968年7月由首都工人、解放军组成的“工宣队”进入北师大。这是“文革”期间老先生第一次出现在合影中。

先生出身名门，早年负笈欧洲，受业于数学大师希尔伯特、柯朗，交游皆一时俊彦。学成归国，执教西南联大等著名学府，弟子当中，颇多中国数学界菁英。大陆解放，安居国内，按照各个时期的客观条件，尽心尽力，为国家培育人才。门生遍天下，薪火有传人。大去之日，先生亦无憾矣。

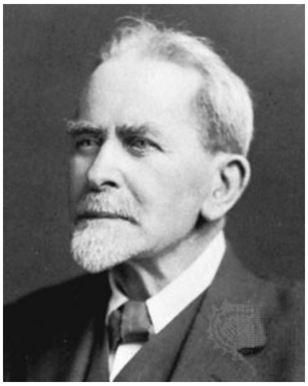
陈年佳酿

汪晓勤

诺贝尔文学奖得主、中国作家莫言在瑞典的获奖演说中曾言到：“我是一个讲故事的人。因为讲故事，我获得了诺贝尔文学奖。”

其实，我所敬仰的那些先哲都是讲故事的人。幽默的德•摩尔根（A. de Morgan, 1806-1871）在《悖论集》中讲述了形形色色化圆为方者的故事；严肃的希思（T. L. Heath, 1861-1940）在《希腊数学史》中讲起拿破仑军队远征遇河、随军工程师以古希腊泰勒斯的角边角方法解决测量难题的故事；古板的卡约黎（F. Cajori, 1859-1930）竟在他的《数学史》中讲述佛祖释迦牟尼年轻时代追求爱情、最终用等比数列解决难题的故事；睿智的伽莫夫（George Gamow, 1906-1968）在他的《从一到无穷大》中则用荒岛寻宝的故事来揭示虚数的奥秘。

迪康热



弗雷泽

比利时 - 美国科学史家萨顿（G. Sarton, 1884-1956）也是一位讲故事的学者。他曾经为我们讲述了三个名人的轶事[1]。第一件是，17 世纪法国古典学者、中世纪拉丁语和希腊语辞典的编写者迪康热（C. du Cange, 1610-1688）每天工作 14 小时，即使在结婚纪念日还要工作 6-7 小时。第二件是，17 世纪瑞士数学家雅各布•伯努利（Jakob Bernoulli, 1654-1705）收到了他儿子的老师皮克泰（B. Pictet, 1655-1724）的一封信，信上说：“先生，你的儿子是一个普普通通的学生，我始终未能使他每天工作超过 13 个小时；不幸的是，他的榜样被仿效；年轻人不肯理解，要成为有用的学者，他们的灯必须点燃在工匠的灯之前。”第三件是，19 世纪英国著名考古学家弗雷泽爵士（J. G. Frazer, 1854-1941）在大三（剑

[1] 萨顿. 科学的历史研究（刘兵等编译）. 上海：上海交通大学出版社，2007. pp. 59-60.

桥大学三一学院）的时候因上一个学期只读了 57 部希腊和拉丁著作而写信向导师致歉！

尽管萨顿觉得自己远不如前人，但他实在是够勤奋的了。他的女儿梅•萨顿在悼念父亲的诗（刘兵译）中这样写道：

> 生活在一个天真的世界
> 在那里会有强烈的孤独感；
> 写信写到很晚，
> 在一只橙色的小猫身上找到慰藉——
> 鲁弗斯和乔治的交流不用语言，
> 乔治工作，而他的鲁弗斯喵声
> 不断——
> 此时，邻里们看到他的灯光
> 因学者深夜的工作而感到温暖。

阿那克萨戈拉

拉缪斯

约翰•第

索菲•热尔曼

在萨顿生前，邻居们已经习惯从萨顿房间窗口透出的灯光；在他去世后，这灯光，竟成了邻居们怀念的对象！

数学史上从来不乏勤奋执着的先驱者。古希腊哲学家泰勒斯（Thales, 前 6 世纪）因天文观测而掉入阴沟。阿那克萨戈拉（Anaxagoras, 499 B.C.-428 B.C.）发出了“人生之意义在于研究日、月、天”的豪言壮语，他为追求真理而放弃财产，为传播真理而身陷囹圄，在铁窗下依然钻研不辍。

《南史•文学传》说：

> 暅之字景烁，少传家业，究极精微，亦有巧思。入深之妙，般、倕无以过也。当其诣微之时，雷霆不能入。尝行遇仆射徐勉，以头触之，勉呼乃悟。

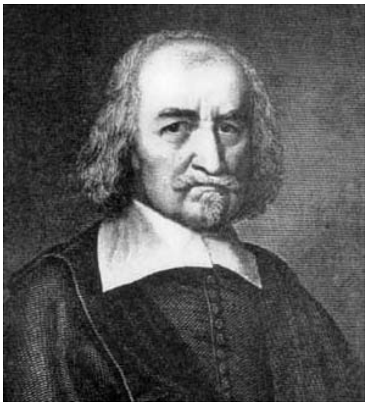
祖暅（6 世纪）最终解决了球体积难题，登上了中国古代几何学的巅峰。这骄人的成绩使他成了那个时代中国最著名的数学家，难怪颜之推在《颜氏家训》中说：“算术亦是六艺要事，江南此学殊少，唯范阳祖暅精之。”成功的背后，是“雷霆不入”的专注，是感人肺腑的执着。

16 世纪法国数学家拉缪斯（P. Ramus, 1515-1572）少时家贫，祖父是烧炭的，和白居易笔下的卖炭翁并没有什么两样。父亲则是个卑微的农夫。家徒四壁，入不敷出，是这个家庭的写照。12 岁时，拉缪斯成了一位富家子弟的仆人。那富家子弟进了巴黎大学纳瓦尔学院读书，拉缪斯白天伺候主人，黑夜挑灯苦学，9 年后竟获硕士学位。令我们更为惊讶的是，他的硕士论文题目竟是《亚里士多德所说的一切都是错的》！亚里士多德说，重的物体比轻的物体下降得快；亚里士多德又说，斜抛物体，沿直线到达最高点后，垂直降落。世人宁愿怀疑自己的眼睛，也不会怀疑亚里士多德的断言。可是，初生牛犊不怕虎。拉缪斯不迷信权威，他和后来的笛卡尔一样，认为人的一生中对任何事情都至少要怀疑一次。

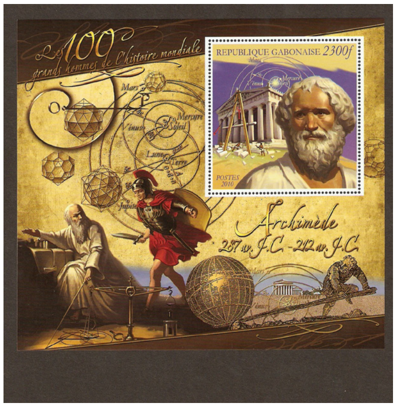
16 世纪英国数学家、天文学家约翰•第（J. Dee, 1527-1609）在剑桥大学圣约翰学院读书时，每天只花 4 小时睡觉和 2 小时吃饭做礼拜，而另外 18 小时都用于学习。[2] 他以优异的成绩毕业，并成为刚刚成立的三一学院的研究员。同时代另一位法国数学家、更为人熟知的韦达（F. Viète, 1540-1603）研究数学时常常三天三夜足不出户，其勤奋如此。

17 世纪英国哲学家霍布斯（T. Hobbes, 1588-1679）偶然在一位绅士的图书室里看到欧几里得《几何原本》打开着，正好在毕达哥拉斯定理那页上。他读了这个命题。“天啊，”他说，“这是不可能的。”于是他逐字逐句阅读了后面的证明。可是，证明用到了前面的一个命题，于是他只好又读了那个

[2] D. E. Smith. *History of Mathematics* (Vol. I) . Boston: Ginn and Company, 1923. 309-323



托马斯·霍布斯



阿基米德之死（加蓬, 2010）

命题。而那个命题又用到前面另一个命题，他又读了那另一个命题。最后他终于读完毕达哥拉斯定理的整个证明以及所用到的所有命题，终于对它深信不疑。从此，他对几何学产生了浓厚的兴趣。[3] 那一年，霍布斯四十岁。

莫道中年万事休，笃志勤学事竟成！霍布斯后来成了数学家。同时代很多人都惋惜：如果霍布斯能早一点开始学数学，那么他对数学的发展一定能做出很大的贡献。但我们没有理由苛求霍布斯跻身一流数学家之列，他已经为后人留下了宝贵的精神财富。

18 世纪法国数学史家蒙蒂克拉（J. E. Montucla, 1725-1799）在他的《数学史》中讲述了古希腊大数学家阿基米德（Archimedes, 前 287-212）的故事：公元前 212 年，阿基米德的家乡叙拉古被罗马人攻陷。当时，阿基米德仍在专心致志地研究一个几何问题，丝毫不知死神的临近。当一个罗马士兵走近他时，阿基米德让他走开，不要踩坏了他的图形，罗马小卒残忍地用刺刀杀害了他。

18 世纪法国著名女数学家索菲·热尔曼（S. Germain, 1776-1831）生活在对女性充满偏见的时代。人们认为，女性并不适合从事科学研究工作，解剖学家甚至声称：女性的大脑结构较男性简单。在这样的时代，绝大多数女性失去了接受高等教育的机会。彷徨之中的索菲偶然在父亲的书房里发现蒙蒂克拉的书，读到了阿基米德的故事，深感数学是世界上最有魅力的学科，于是下定决心学习数学。为了阻止她，父亲没收了她的蜡烛和取暖的工具，但是，在墨水结冰的漫漫冬夜，索菲点起偷偷藏着的蜡烛，身上裹着毯子，依然故我，勤学不怠！19 世纪法国数学史家泰尔凯（O. Terquem, 1782-1862）描述了索菲年轻时的学习经历：

“在极度痛苦之中，这位年轻的先知在抽象世界中寻求解脱。她浏览蒙蒂克拉的《数学史》，研究裴蜀（E. Bézout, 1730-1783）的著作，甚至在 1793 年血腥的农神节期间，她也闭门不出。她整天沉浸于对勒让德和居森（Cousin）著作中的数论和微积分的思索，成了隐居者。她进步神速。1801 年，她伪托巴黎综合工科学校一男生的名字开始了与高斯的通信往来，讨论高斯刚出版的《算术研究》和其他内容。在 1804 年的战役中，热尔曼家的朋友、炮兵将军佩尔内提（Pernetty）在布伦瑞克把这个冒名的‘学生’的真名告诉给了这位大数学家。从未怀疑过这位通信者性别的高斯吃惊不小。他在后来的通信中对这位年轻的法国人深刻敏慧的心智表示钦佩，由于战争，当时这位德国教授平静的书斋生活被打破，感情上受到了伤害，对我们国家产生了厌恶感，在这种情况下，他对热尔曼的钦佩就越发显得真诚了。”[4]

高斯在信中这样写道：

“当我得知我尊敬的通信者勒布朗先生摇身一变，成为这么一个曾经制造出令人难以置信的杰出摹本的名人时，我如何才能描述我的惊讶和钦佩呢？爱好这门抽象的科学，尤其是数的秘密的人如凤毛麟角：这毫不足怪，因为这门崇高科学只对那些有勇气探究它的人展示其迷人的魅力。而当一位女性在通晓其中的难题时，由于性别以及我们的世俗和偏见，她遭遇了比男性多不知多少的障碍，却要克服这些桎梏，洞察隐密奥义，她无疑有着最为高贵的勇气、超凡的才能和卓越的天赋。这门科学为我的生命增添了许多快乐，没有什么事情能比你对它的爱好更令人心悦诚服，更确实无疑地证明它的魅力并非子虚乌有。”[5]

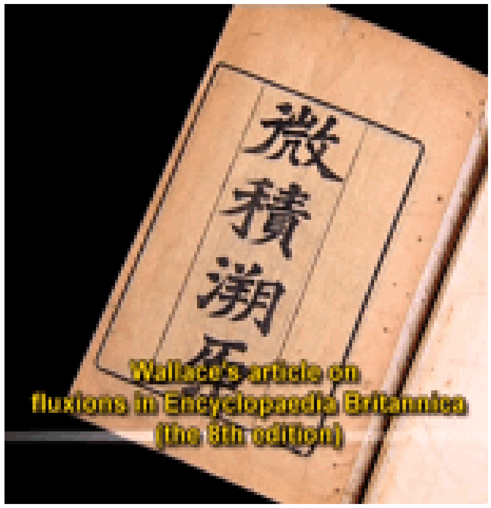
热尔曼最终成了一代数学名家。

19 世纪苏格兰人华里司（W. Wallace, 1768-1843）是中国人不应忘记的数学家，因为他正是中国历史上第二部微积分教材《微积溯源》的原作者。少年时代，华里司因父亲破产而辍学，并成了印刷厂的一名学徒工。

[3] J. Aubrey. A Brief Life of Thomas Hobbes, 1588-1679. http://oregonstate.edu/instruct/phl302/texts/hobbes/ hobbes_life.html.

[4] O. Terquem, Sophie Germain. *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie Mathématiques*, 1860, 6: 9-12.

[5] 卡尔·萨巴. 黎曼博士的零点（汪晓勤等译）. 上海：上海教育出版社，2008.



华里司　　《微积溯源》扉页　　华蘅芳

华里司偶然结识了一位上了年纪的木匠，而这位木匠当时正受雇于著名物理学家、爱丁堡大学自然哲学教授约翰•罗比逊（J. Robison, 1739-1805），做罗比逊的实验助理。老木匠是位有文化、爱读书的人，他虽然对数学一窍不通，但整天和物理学家在一起，耳濡目染，不免对科学怀有一份崇敬之心；并常常因与自然哲学大教授为伍而自豪。他在知道华里司酷爱数学之后，有心把他引荐给罗比逊。华里司学徒期满，老木匠写好推荐信，劝他去找罗比逊教授。他鼓起勇气去了爱丁堡大学。教授告诫：搞数学研究不可能给这个世界带来什么益处。或许，罗比逊是要试试华里司是否真心热爱数学。华里司妙语回答：人活着既然注定要含辛茹苦，他希望用求知的快乐给人生的酒杯加点糖。[6] 此言一出，罗比逊当即邀请他来听自己的自然哲学课。罗比逊又把华里司引荐给著名数学家普雷费尔（J. Playfair, 1748-1819）。

18 世纪末，尽管欧洲的印刷术发展很快，但印后装订仍离不开手工：书页印出后，工人依次将书页堆放成一圈；然后按顺序在每一堆上取一页叠放好，最后装订成册。华里司出师后，在印刷厂做了一名装订工。他每天做的是装订成册之前的那道工序。在枯燥的重复劳动过程中，华里司不忘学习，在墙上贴满拉丁词汇表，转一圈，必记上一个拉丁文单词。就这样，他学会了拉丁文，并得以钻研欧洲大陆的数学著作。

华里司最终成为爱丁堡大学的数学教授。从学徒到教授，华里司用自己的勤奋书写了人生的传奇故事。

《微积溯源》的译者、中国数学家华蘅芳（1833-1902）14 岁开始自学数学，凡遇数学书，辄爱不释手。曾用 22 种方法证明勾股定理，真可谓才华横溢，后生可畏。

20 岁时，华蘅芳来到上海，去墨海书馆拜访著名数学家李善兰（1811-1882）。当时，李善兰和墨海书馆的负责人、英国传教士伟烈亚力（A. Wylie, 1815-1887）正在合作翻译英国数学家德•摩尔根的《代数学》和美国数学家罗密士（Elias Loomis, 1811-1889）的《解析几何与微积分基础》（译名《代微积拾级》）。李善兰这样向他介绍微积分：

> “此为算学中上乘功夫。此书一出，非特中法几可尽废，即西法之古者亦无所用矣。”

这是华蘅芳平生第一次知道数学上除了天元术以外，竟然还有微分、积分之术。这对于热爱数学的华蘅芳来说无疑充满了难以抗拒的诱惑力！他从李善兰和伟烈亚力的译稿中抄录数条，拿回家细看，结果，茫茫然一无所获。

几年后，中国第一本微积分教材《代微积拾级》出版了，李善兰送了一本给华蘅芳。展卷披阅，不知所云。的确，如果我写出书中的一个公式给你看——

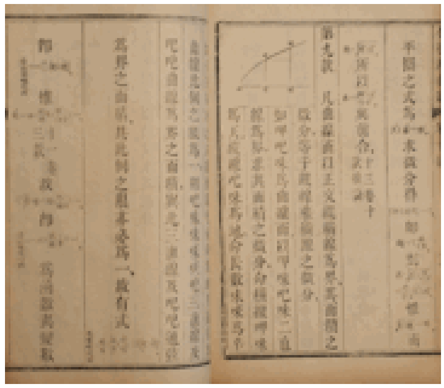
$$禾\frac{甲\perp天}{彳天}=（甲\perp天）对\perp\Box丙$$

你一定会看傻眼。无奈之下，华蘅芳只好又跑到墨海书馆，向李善兰求教。李善兰如是说：

> “此中微妙，非可以言语形容，其法尽在书中，吾无所隐也。多观之，则自解耳。是岂旦夕之工所能通晓者哉！”

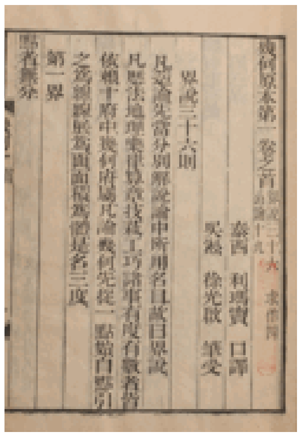
听了李善兰的话后，华蘅芳拿《代微积拾级》“反覆展玩不辍，

[6] 汪晓勤，陈慧．华里司：自学成才的数学家、欧洲大陆微积分的早期传播者．自然辩证法通讯，2010, 32 (6): 97-105.



《代微积拾级》书影

利玛窦与徐光启（几内亚比绍，2010）



《几何原本》书影

乃得稍有头绪”。华蘅芳对自己学习微积分的这个艰难过程作了一个精彩的比喻：

> “譬如傍晚之星，初见一点，旋见数点，又见数十点、数百点，以致灿然布满天空。”[7]

顺便提一句，伟烈亚力来华前只是一介木匠。英汉两种版本的《圣经》是他学习汉语的唯一工具。他利用两种版本的《圣经》，竟自编了一本英汉词典！来华后，每天只睡 6 小时，工作之余，手不释卷。

先哲们在困难面前所展现出来的勇气也常常令我们汗颜。

1605 年秋，中国著名科学家徐光启（1562-1633）在北京向意大利传教士利玛窦（Matteo Ricci, 1552-1610）了解西方的教育情况。说到数学时，利玛窦盛赞《几何原本》之精，又陈述此书汉译之难，还说起昔日和中国人合作失败的种种经历。的确，要翻译拉丁文版的《几何原本》，谈何容易！且不说徐光启连一个拉丁文单词也看不懂，那么多中国传统数学中所从未有过的数学术语首先就让人望而生畏。可是，徐光启却说：

> “吾先正有言：‘一物不知，儒者之耻。’今此一家已失传，为其学者，皆暗中摸索耳。既遇此书，又遇子不骄不吝，欲相指授，岂可畏劳玩日，当吾世而失之！呜呼，吾避难，难自长大；吾迎难，难自消微。必成之。”[8]

其坚定的决心、过人的勇气和强烈的使命感溢于言表。于是，两人口授笔录，反复推敲，三易其稿，终于在 1607 年春把《几何原本》前六卷译完并出版。

我们今天常说：“困难像弹簧，你弱它就强。”其实，先哲早就说过了。

被誉为“昆虫世界的诗人和预言家”的法布尔（J. H. Fabre, 1823-1915）师范毕业后被分配到乡下一个条件十分简陋的、全校教师只能挤在唯一一张校长餐桌上吃饭的学校教书。尽管读师范时学过一些平面几何知识，但作为文科生的他，数学知识、特别是代数知识依然相当贫乏。用他自己的话说，开一个平方根，证明一个球的表面积公式，已经是科学的顶点了。打开一张对数表，立即头晕目眩。[9]可是有一天，一个报考桥梁工程专业的年龄与他相仿的不速之客登门造访。原来，这位年轻人的考试科目中有数学，为了通过这场考试，他希望法布尔能辅导他学代数。真是病急乱投医。法布尔先是吃惊，接着是犹豫；但最后，不知从哪儿来的勇气，他竟然答应人家了：后天开始上课。自己不懂游泳，却要教别人游泳，怎么办？勇敢的办法是自己先跳进海里！这样，在濒临淹死的时候也许会产生一股强大的求生力量。可是，法布尔不光对代数一窍不通，而且连一本代数书都没有：他想跳进代数学的深渊，可是连深渊都没有。他想去买一本，可是囊中羞涩，况且他那里可不是巴黎，想买就能买到的。离上课只有 24 小时。有了！有位教自然科学课的先生，是学校领导层的人物，尽管在学校里他有两个单

[7] 华蘅芳 . 学算笔谈（卷五）. 光绪二十三年（1897）味经刊书处刊本。
[8] 同上。
[9] 法布尔 . 昆虫记 (卷九).（鲁京明、梁守锵译）花城出版社 , 2001. 122-133.

法布尔（法国，1956）

间，但平时住城里，也算是上流社会的人物了。法布尔猜想他房间里必有代数书；但由于人家高高在上，又怎敢开口言借？只有一个办法：偷。如果那时中国作家鲁迅已经写出小说《孔乙己》来该多好，这样法布尔也许就不会责备自己了。正逢休假日，四顾无人，法布尔幸运地用自己房间的钥匙打开了那城里度假的主人的房间。天从人愿！双腿有些发抖的小偷从书柜里搜索出三指厚的一本代数书来。

神不知鬼不觉，法布尔回到了自己的房间。他急切地打开书本，一页又一页地翻看着，了无兴趣。大半本书翻过去了，突然，他的眼光停在了一个章名上："牛顿二项式"。誉满全球的 17 世纪英国大科学家牛顿，他的二项式是怎么回事？强烈的好奇心促使法布尔拿起笔，一边看，一边在纸上写字母的排列和组合，整整一个下午在排列和组合中度过。不可思议，法布尔竟然完全搞懂了。

这下，他可以从容地应对明天的数学课了。这真是与众不同的课，人家从头开始教，而法布尔则几乎是从末尾开始教。他时而耐心地讲授，时而和学生进行讨论，第一次课获得了巨大的成功。牛顿二项式定理大大增加了法布尔的自信心。法布尔继续向更多的代数知识点发起冲击，壁炉里的火光伴着他度过了一个又一个不眠之夜。

在知难而进的老师和忠实勤奋的学生共同努力下，他们最后啃完了代数课本。那年轻人如愿以偿，通过了考试，而那本代数书被偷偷地放回了原处。

法布尔继续向解析几何发起了冲击，他这样描述自己的学习历程[10]：

> 当我失足掉进一个未知世界时，有时能找到炸药把它炸开。刚开始是小颗粒，颗粒结成小团滚动着，越变越大。从一个定理的斜坡滚向另一个定理的斜坡，小团变成了大团，成了有巨大威力的弹丸，它倒退着向后抛，劈开了黑暗，现出一片光明。

经过一年多的努力，他顺利拿到了数学学士学位。掌握了数学知识，法布尔终于成了"蛛网测量员"。

数学人文，清新隽永；陈年佳酿，历久弥香。一次穿越时空的心灵之约，让我们收获几许心灵的启迪。先哲的数学故事会引发我们对以下问题的思考：

- 对于学业，应该持有何种态度？
- 应该如何面对工作、学习和生活中的挫折、失败和错误？
- 应该怎样对待学术权威和世俗偏见？
- 应该怎样看待数学在人一生中所扮演的角色？

最后，我想说，我也是一个讲故事的人。我不指望因为讲故事获什么奖。但我知道，因为讲故事，我让自己的数学课变得不再枯燥无味，我让自己的学生变得更有教养、更有文化、更有追求、更懂得生命的意义。我还想说，如果每一位数学教师都会讲故事，那么，我们的数学教育一定会变得很美好。

附注：本文为华东师范大学数学月讲座。

作者简介：汪晓勤，中国科学院自然科学史研究所博士，现执教于华东师范大学数学系，主要研究方向为数学史、数学文化与数学教育。先后在《自然科学史研究》、《自然辩证法研究》、《自然辩证法通讯》、《数学教育学报》等刊物发表论文 170 余篇，著有《中西科学交流的功臣——伟烈亚力》、《中学数学中的数学史》等。现任全国数学史学会副理事长、《数学教育学报》副主编。

[10] 法布尔．昆虫记(卷九).（鲁京明、梁守锵译）花城出版社，2001. 142.

《中国数学会通讯》是该刊编辑委员会编辑出版的内部刊物，季刊。主要刊登国内外数学界的重要信息，报道中国数学会与各省市自治区数学会、学科分会等的活动情况。主要栏目包括：学术活动信息，数学教育与普及，数学精品文章（数学的历史、进展、价值、趣事等），人物专栏，学科介绍，书讯与书评等。

2013 年《中国数学会通讯》全年的总订费为 50 元（含邮费）。欢迎各省市自治区数学会、学科分会和有关单位以及广大数学工作者、数学爱好者订阅本刊并踊跃投稿。

订阅办法： 请将订费邮汇至北京中关村东路 55 号（邮政编码：100190），中国数学会办公室；或行汇至中国数学会，同时请给中国数学会办公室来信告知（或在汇款单附言中注明）订购份数、收刊单位（或个人）详细地址及邮政编码，以便我们及时准确地投寄本刊。

开 户 行：北京工商行海淀西区支行
帐　　号：0200004509089161419
电　　邮：cms@math.ac.cn
电　　话：0086-10-62551022

2012 年第 4 期要目：

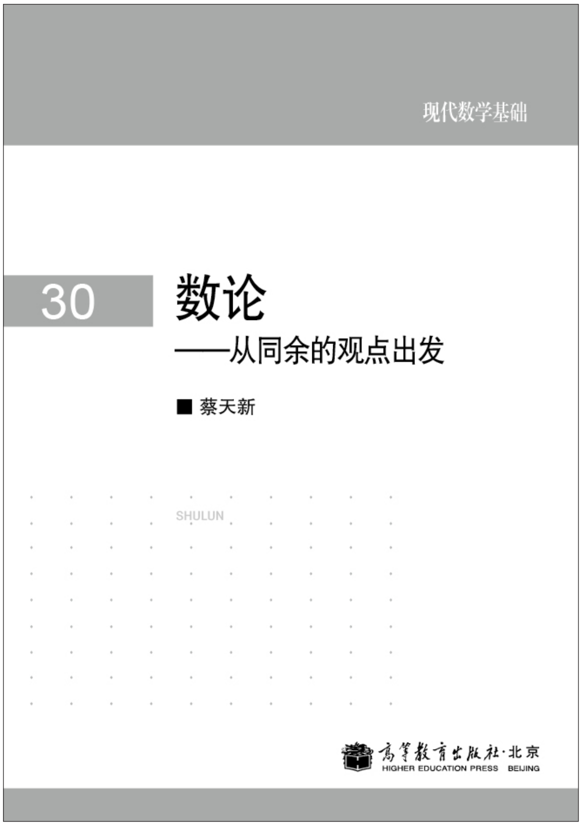
- 2012 国家杰青基金建议资助名单公布
- 首批青年拔尖人才支持计划人选公布
- 2011 年度长江学者特聘教授、讲座教授人选名单

2012 年全国优秀博士学位论文公布
第十届全国博士生学术年会在山东济南召开
中国科协会员日暨第五届“全国优秀科技工作者”颁奖大会举行
中国数学会女数学家工作委员会及西部数学发展工作委员会会议纪要
概率破玄机，统计解迷离
访学哥廷根（四）
卓有成效的民办英才教育
一位数学思想家的命运
会议纪要

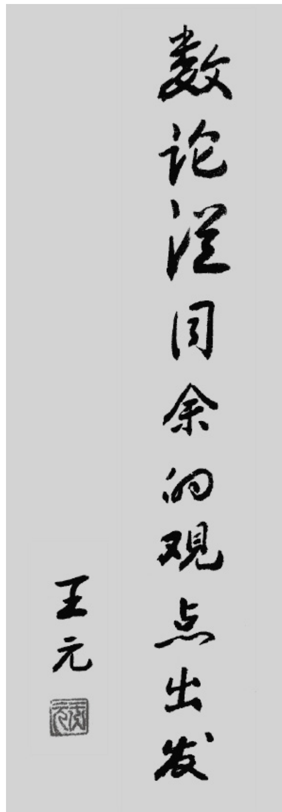
《中国数学会通讯》编辑部供稿

数是我们心灵的产物

蔡天新



《数论——从同余的观点出发》



王元先生扉页题词

编者按 *本文是蔡天新教授为他新近出版的著作《数论——从同余的观点出发》(高等教育出版社，2012年9月)所作的导言，在这本基础数论教程里，每小节后面都有补充读物，从中介绍了数论研究的新方法，并就若干经典数论问题提出自己大胆新颖的想法或延拓，部分结果发表后引起数论界同行的关注，包括菲尔兹奖得主阿兰•贝克在内的名家都予以褒扬。蔡天新教授认为，他之所以能在近年取得自我突破，部分原因是对数学史和数学文化进行了学习和探讨，这提升了他的想象力，促进了他的数论研究。*

将近一个世纪以前，美国出生的英国数学家莫德尔在一篇随笔中写道：“数论是无与伦比的，因为整数和各式各样的结论，因为美丽和论证的丰富性。高等算术（数论）看起来包含了数学的大部分罗曼史。如同高斯给索菲•热尔曼的信中所写的，‘这类纯粹的研究只对那些有勇气探究她的人才会展现最魅人的魔力’。”或许有一天，全世界的黄金和钻石会被挖掘殆尽，可是数论，却是用之不竭的珍宝。

1801年，24岁的德国青年高斯出版了《算术研究》，从而开创了数论研究的新纪元。这部伟大的著作曾投寄到法国科学院而被忽视，但高斯在友人的资助下将它自费出版了。在那个世纪的末端，集合论的创始人康托尔这样评价：“《算术研究》是数论的宪章……高斯的出版物就是法典，比人类其他法典更高明，因为无论何时何地从未发觉出其中有任何一处错误。”高斯自己则赞叹，“数学是科学的皇后，数论是数学的皇后。”

这部著作的开篇即定义了同余，任意两个整数 a 和 b 被认为是模 n 同余的，假如它们的差 $a-b$ 被 n 整除。高斯首次引进了同余记号，他用符号“≡”表示同余。于是，上述定义可表示为

$$a \equiv b \pmod n$$

有了这个方便的同余记号以后，数论的教科书显得更加简洁美观。今天，基础数论教材的开篇大多介

左 :《数学与人类文明》; 右 :《数字与玫瑰》修订版，两本同是 2012 年秋冬由商务印书馆出版的数学文化著作，它们与《数论》构成作者的 2012 数学三部曲

绍整除或可除性。整除与同余式也构成了本书的前两章，实际上，整除拟或带余数除法（在中国、印度和希腊等地有着各自的渊源故事和名称）

$$a\equiv bq+r,\ 0\le r<b$$

也等价于同余式 $a\equiv r(\mathrm{mod}\ b),\ 0\le r<b$。

接下来的三章，无论不定方程，还是原根和指标，均与同余有关，更不要说一次、二次和 n 次剩余了。不仅如此，初等数论中最有名的定理，除了算术基本定理以外，均与同余有关。例如，欧拉 - 费尔马定理、威尔逊 - 高斯定理、拉格朗日定理和中国剩余定理，后者的准确名字应为孙子 - 秦九韶定理，或秦九韶定理（参见第 3 章第 1 节）。

进入第 3 章以后，我们讲述了高斯最得意的、花费许多心血反复论证（共 8 次）的二次互反律，高斯称其为“算术中的宝石”。设 p 和 q 是不同的奇素数，则

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$$

这里 (p/q) 为勒让德符号，当它取 1 或 -1 分别表示二次同余式 $x^2\equiv p(\mathrm{mod}\ q)$ 有解或无解。这个结果是完美无缺的，我们用几何和代数方法给出两个证明。在第 6 章我们介绍了一个新的同余式，她有着同样美丽的对称性。设 p、q 为不同的奇素数，则

$$\binom{pq-1}{(pq-1)/2}\equiv\binom{p-1}{(p-1)/2}\binom{q-1}{(q-1)/2}(\mathrm{mod}\ pq)$$

此处 ( ) 为二项式系数。

除了引进同余符号，高斯还给出了正多边形作图方法和原根存在的充要条件，前者是有着两千多年历史的数学悬案，后者的理论虽较完整仍可以增补（如原根的乘积、求和同余），这些在本书的第 4 章第 5 节和第 5 章均有展示。说到原根的存在性，少不了素幂模同余式，本书的第 7 章给出了不少素幂模甚或整数幂模的崭新公式，包括拉赫曼同余式的推广，后者在怀尔斯的证明之前一直是研究费尔马大定理的主要工具。诚如加拿大和爱尔兰两位同行指出，这一推广（指从素幂模到整数幂模）是 1906 年以来的第一次。又如，设 n 是任意奇数，我们发现并证明了

$$(-1)^{\phi(n)/2}\prod_{d|n}\binom{d-1}{(d-1)/2}^{\mu(n/d)}\equiv 4^{\phi(n)}\begin{cases}(\mathrm{mod}\ n^3), & 若\ 3\nmid n\\ (\mathrm{mod}\ n^3/3), & 若\ 3|n\end{cases}$$

其中 $\phi(n)$、$\mu(n)$ 分别为欧拉函数和莫比乌斯函数。当 n 为素数时，此即著名的莫利（Morley）定理。

二次型是高斯著作中的重头戏，尤其是表整数问题，拉格朗日证明了，每一个自然数均可表为 4 个整数的平方和。本书这方面谈的不多，但对于著名的华林问题，我们却有独到深刻的描述。设 k 和 s 为正整数，考虑丢番图方程

$$n=x_1+x_2+\cdots+x_s\,.$$

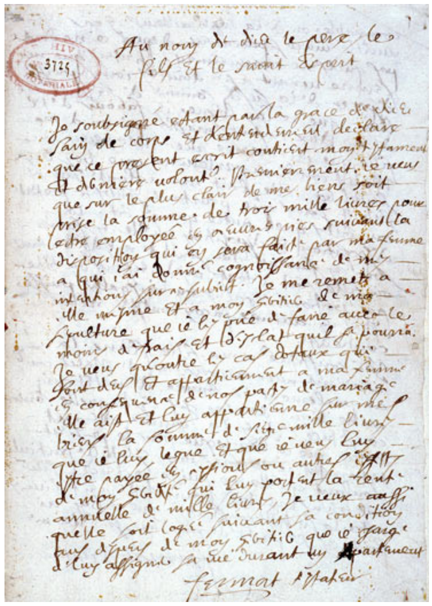
其中

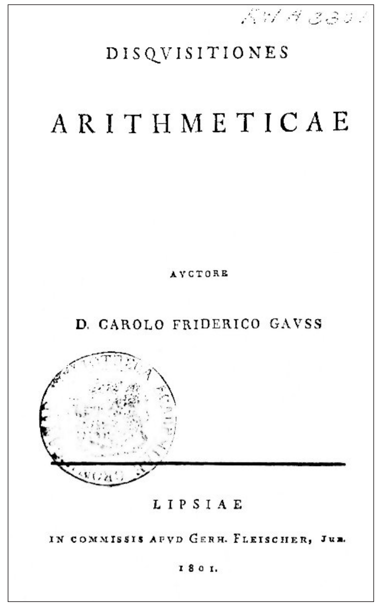
$$x_1x_2\cdots x_s=x^k$$

由希尔伯特 1909 年的论证可知，必定存在 $s=s'(k)$，使对任意的正整数 n，均可表成不超过 s 个正整数之和，且其乘积是 k 次方。用 $g'(k)(G'(k))$ 分别表示最小的正整数 s，使对任意（充分大的）正整数 n，上述方程成立。我们在第 7 章给出了 $g'(k)$ 的准确值和 $G'(k)$ 的估值，同时猜测 $G'(3)=3,\ G'(4)=4$。一个更为精巧的推测是，除了 2、5 和 11，每个素数均可表成 3 个正整数之和，它们的乘积为立方数。

之所以能提出这类问题，是因为我们把整数的加法和乘法结合起来考虑，这一点受到了 abc 猜想的形式启发，后者可以轻松导出费尔马大定理等一系列著名

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.





DISQVISITIONES
ARITHMETICAE
AVCTORE
D. CAROLO FRIDERICO GAVSS
LIPSIAE
IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, Jun.
1801.

古典大师书影手迹三部：丢番图《算术》拉丁文版首版；费尔马亲书遗嘱，要求销毁手稿；高斯《算术研究》初版

猜想和定理，其在数论领域的影响力迅速替代了已被证明的费尔马大定理。事实上，毕达哥拉斯的完美数和友好数问题也是这两种基本运算的结合，它们具有恒久的魅力。正是从这里开始，我们的想象力获得提升，渐渐脱离开了同余的观念。

除了新华林问题，我们把著名的费尔马大定理也做了推广（第 7 章第 3 节），即考虑丢番图方程

$$\begin{cases} a+b=c \\ abc=x^n \end{cases}$$

的正整数解。设 $d = gcd(a, b, c)$，当 $d = 1$ 时，该方程等同于费尔马大定理。也就是说，无正整数解。而当 $d>1$ 时，方程的可解性存在各种可能性，比如 $d = 2, n = 4$ 时有解 $(a, b, c; x) = (2, 2, 4; 2)$。这就提出了一个新问题，我们的猜测之一是，当 d 和 n 均为奇素数时，上述方程无解。这是费尔马大定理的完全推广，且无法由 abc 猜想导出（已有的两个推广——费尔马 - 卡塔兰猜想和比尔猜想则可由 abc 猜想轻松推出）。

高斯在 19 岁那年证明了：每个自然数均可表示为三个三角形数之和。这是对费尔马问题的第一个回答，后者在丢番图的《算术》空白处写下了第 18 条注释：当 $n\geq3$ 时，所有自然数均可表示成 n 个 n 角形数之和。所谓 n 角形数是毕达哥拉斯学派定义的，即正 n 角形中的角点个数。特别地，三角形数为 0, 1, 3, 6, 10……即所有形如 $\binom{x}{2}$ 的二项式系数，其中 10 和 21 分别为保龄球的木瓶和斯诺克的目标球的排列方式和数目。

我们注意到了，二项式系数有着特殊而奇妙的性质，它是除了数幂以外最简洁的整数，因此值得数论学家重视。二项式系数以及多项式系数在本书中多次出现，我们甚至定义了形素数 $\binom{p^i}{j}(i, j\geq 1)$，这是一类特殊的二项式系数，将素数与形数结合起来，其个数与素数个数在无穷意义上是等阶的。我们猜测（已验证至 10^7）

任意大于 1 的自然数均可表示成 2 个形素数之和。

这个猜想的提出无疑受到了哥德巴赫猜想的启发。后者说的是，每个大于等于 9（6）的奇数（偶数）均可表示成 3（2）个奇素数之和。我们认为，这一点不够一致，且素数本身是构成整数乘法意义的基本单位，用在加法上未必是最佳选择。另外，随着数的增大，它的表法数也越来越多，似乎颇有些浪费了。与此同时，我们也提出了下列弱孪生素数猜想：

对于任意正整数 k，存在无穷多对相邻为 $2k$ 的形素数。

我们研究的最古老的数学问题是完美数问题，这是古希腊数学家毕达哥拉斯开创的问题。毕达哥拉斯考虑了自然数的真因子之和等于其自身的那些数，即满足

$$\sum_{d|n, d<n} d = n,$$

他称其为完美数。例如 6 = 1+2+3，28 = 1+2+4+7+14，经过阿契塔和欧拉（相隔 1200 年）的努力，得知偶数 n


高斯故乡不伦瑞克街景（蔡天新 摄）


数学王子高斯诞生地（蔡天新 摄 ）

是完美数的充分条件是 $n=2^{p-1}(2^p-1)$，其中 p 和 2^p-1 均为素数。这样的 p 也叫梅森素数，利用最现代的计算机可以得到 48 个梅森素数，也就是说，我们已知 48 个完美数。另一方面，包括笛卡尔、费尔马和欧拉在内的数学家曾考虑过诸如 $\sum_{d|n,d<n} d=kn$ 之类的推广，但都只获得若干特解。我们考虑了平方和的情形，即

$$\sum_{d|n,d<n} d^2=3n,$$

得到了上式成立的充要条件是 $n=F_{2k-1}F_{2k+1}$，其中 F_{2k-1} 和 F_{2k+1} 是斐波那契孪生素数，从而再次产生了无穷性。由目前的计算机只能求得 5 对，即有 5 个平方和的完美数，后面 2 个已经是天文数字。有趣的是，这 5 个完美数既有偶数也有奇数。但对于非 3 常数或立方及更高幂次的情形，这一现象不再出现。

本书的前五章和第 7 章补充读物构成了《初等数论》课程的教学内容，可供大学数学系每周四次的教学之用，最后两章不在《初等数论》教程的讲授范围之内，但它们与同余式紧密相关，且能够伸手触摸到，也可算是本教材的一大亮点。至于本书的最大特色，可能要数每节正常内容后面的补充读物（可以选讲，未安排习题）。这种形式是一种尝试，希望借此拓广读者的知识面和想象力，递增他们对数论的兴趣和热爱。事实上，这些补充读物至少有两个功能：

其一，介绍了其他数论问题和研究的初步知识，例如欧拉数和欧拉素数，阿达玛矩阵和埃及分数，佩尔方程和丢番图数组，阿廷猜想和特殊指数和，椭圆曲线和同余数问题，自守形式和模形式，等等。其二，介绍了与初等数论相关的新问题和新猜想，除前面提到的以外，还有格雷厄姆猜想，$3x+1$ 问题，广义欧拉函数问题，覆盖同余式组，素数链和合数链问题，卡塔兰猜想，多项式系数非幂，等等。

可是，也正因为问题和猜想比较多(有时较为大胆)，容纳了本人的研究经验，尤其是近年来的思考（有的尚未发表），错误在所难免（并非客套），期望读者予以发现和纠正。本书的写作也是对过去 25 年来教授浙江大学《初等数论》课程的小结，部分内容包括习题的选取得到了近十位研究生和合作者的帮助，恕不在此一一提及名字，他们参与研究的某些工作和国内外许多同行的相关成果在书中有所展示。值得一提的是，不少工作的进展和预测得到了计算机的帮助，这是我们比前辈同行优越的地方。可以说，计算机之于数论学家，犹如望远镜之于天文学家。

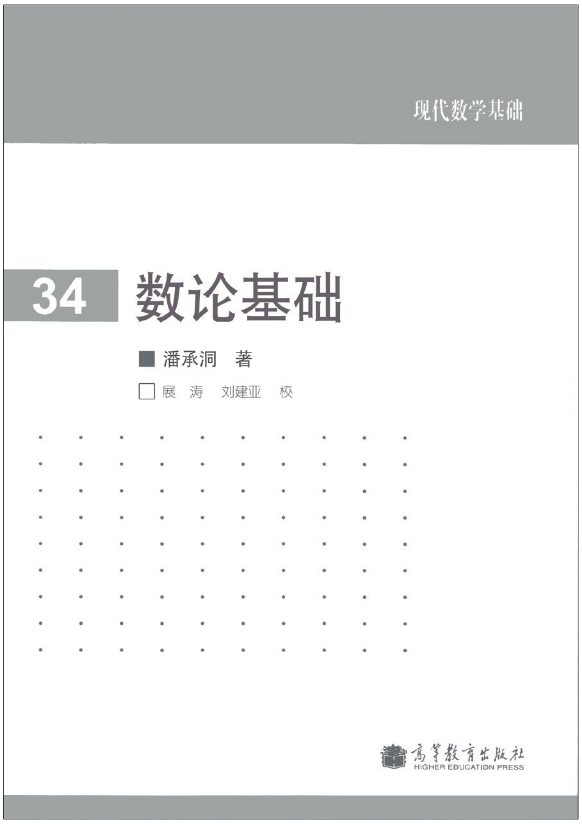
除此以外，我要特别感谢前辈数学家王元先生，他不仅为本书题写了书名，同时在许多方面予以支持和鼓励。还有菲尔兹奖得主、剑桥大学教授阿兰·贝克和卡塔兰猜想的证明者、哥廷根大学教授普莱达·米哈伊内斯库的褒奖，前者称赞新华林问题是“真正原创性的贡献”，后者勉励作者“在当今繁杂的数学世界找到了一片属于自己的领地”。

最后，我想引用高斯的一段话作为结束语，摘自他为英年早逝的弟子艾森斯坦的论文集所写的导言：“数论提供给我们一座用之不竭的宝库，储满了有趣的真理，这些真理不是孤立的，而是最紧密地相互联系着。伴随着这门科学的每一次成功发展，我们不断发现全新的，有时是完全意想不到的起点。算术理论的特殊魅力大多来源于我们由归纳法轻易获得的重要命题。这些命题拥有简洁的表达式，其证明却深埋于斯，在无数徒劳的努力之后才得以发掘；即便通过冗长的、人为的手段取得成功以后，更为清新自然的证明依然藏而不露。”

2012 年夏天初稿
2013 年元旦修改

潘承洞《数论基础》——校后记

展　涛



本书是由潘承洞院士生前所写的《数论基础》讲义校对整理而成的。整理过程中我们完全保持了讲义的原貌，只是对文字做了仔细校对。

作为山东大学数学系七九级的一名学生，我有幸在1982年旁听了潘承洞先生给数学系七八级本科生讲授“数论基础”这门选修课。在我的印象里那时还没有印制好的讲义，潘先生在讲台上讲，我们边听边记。虽然是选修课，但是教室里坐得很满，我只能在教室的角落里找到一个位置。现在想来，或许那次系统的讲授正是本书最初形成的过程。大学毕业后我成为潘先生的研究生，我们这些学生们随后每人拿到了一本油印的《数论基础》讲义。讲义是先生的“手书版”，也就是本书的原稿。再后来，这本油印讲义有了打印版，它也从此成为潘先生所有学生以及学生的学生们的数论入门书籍。遗憾的是，先生手书的油印版书稿一本也没有保存下来。

不知何故这本书稿一直没有正式出版。或许是因为先生忙碌疏忽了，或许是他觉得已经有太多的数论入门书籍。但是这本书却是我们的最爱。不论是在先生自己学术工作最具影响力的解析数论领域，还是他在上世纪80年代就开始培养学生的现代密码学领域，我们这些学生都觉得这本书由浅入深，循序渐进，内容既精选紧凑，又全面深刻，还附有大量的习题，让我们在认真研读之中忘却了许多对数论的神秘和畏惧。它的内容布局独具一格，能够引导你迅速进入数论核心的领域，了解数论最基本的思想和方法。它对很多定理和结论的证明简洁明快，既注重数论的技巧之美，又清晰地勾勒出数论方法的系统性，让你在“不知不觉”之中已经深入到那些最初看来“深奥莫测”的知识里。所以，我们觉得先生留下的这样一笔财富不能仅仅由他的学生们独享，而应该让更多对数学特别是数论有兴趣的学生和学者来共同分享。

我和刘建亚教授的这一想法首先得到师母李淑英老师和潘先生的胞弟潘承彪教授的鼓励与支持，而潘先生的学生们以及我们的学生们则一直期待这本书能够尽快出版。这一愿望能够得以实现要感谢高等教育出版社的查卫平副总编，他把这本书稿推荐给出版社的赵天夫编辑。天夫严谨高效的工作使得本书的出版立项和编辑在最短时间内就完成了。

我们之所以希望赶在2012年年底之前完成这本书的出版，还有一个原因，就是潘承洞先生离开我们已经整整15年了。这位以Goldbach猜想研究闻名于世，为解析数论研究作出卓越贡献的数论大家，曾和华罗庚、陈景润、王元先生一起被国外同行誉为解析数论的中国学派（Chinese School）的代表。他一生为培养年轻人才倾注了大量的心血，三十年前他为本科生讲授这门课程的情景今天依然历历在目。以出版这本他生前完成的书稿来纪念他，来激励我们后人学习他的学术精神，传承他的学术思想，是再合适不过的一种方式了。