



好的证明使我们更加聪明¹

崔继峰 杨城毅 / 译

Martin Aigner 和 Vasco A. Schmidt 对尤里·曼宁 (Yuri I. Manin) 的采访录。

受访者 Yuri I. Manin 是著名数学家，主要研究领域是代数几何和丢番图几何。现任德国 Max-planck 研究所教授，美国西北大学教授，曾获多个数学大奖。

问：今年的国际数学家大会 (ICM)² 是本世纪最后一次。您认为是否还有可能出现一位像希尔伯特一样伟大的数学家？当代还有和希尔伯特问题一样重要的问题吗？

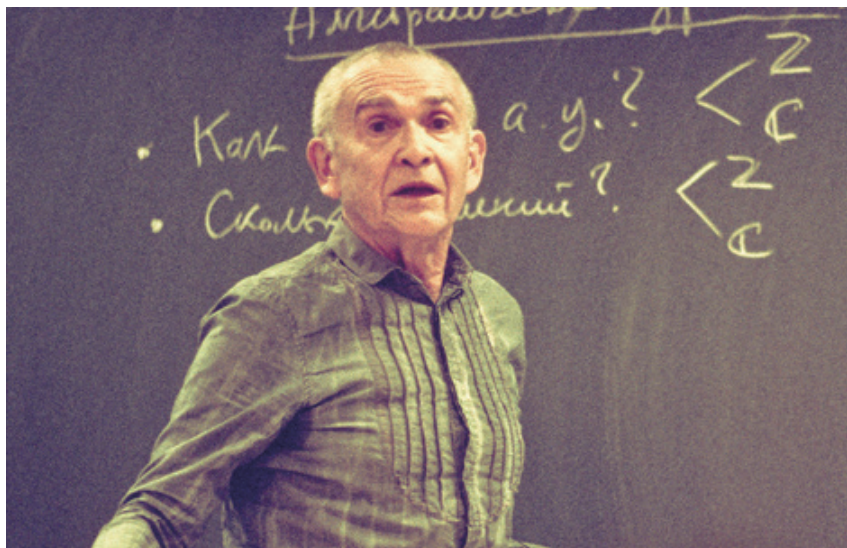
答：我并不十分确信希尔伯特问题在本世纪的数学中是否发挥了重要作用。虽然在心理上，它对许多数学家无疑是很重要的。举个例子，阿诺德曾说，当他还是一个年轻的毕业生的时候，他曾经把希尔伯特的问题抄在他的笔记本上，并且将它随身携带。但是当盖尔方德听说了这件事情时，他嘲笑了阿诺德。阿诺德把解决希尔伯特问题看成了取得数学成就的一个重要组成部分，但是我并不这么认为。我认为进行数学创造的过程所遵循的是已经确定的模式。当你在学习拓扑、概率、数论等知识的时候，在最开始，你会对这些领域有个模糊的了解，然后你就会专注于其中的一部分，接着你就会开始考虑“这儿有什么？”和“什么早已被其他人所考虑过了？”最后在考虑过这些问题并阅读了其他论文之后，你就会开始察觉出一些在你之前没有人考虑过的东西。

问：解决问题的重点是不是和一种浪漫的观点：“征服大山的英雄”有所相似呢？

答：以某种开玩笑的观点来看的话，的确是这样的。我不会说这个说法不恰当。对年轻人来说，通过创造社会认同感来诱导他们去取得一些重大成就，是一种很重要的心理学策略。一个好的问题是一个好的数学思想的可视化体现，虽然这并不能看出通向一定学术高度的具体途径，却能看出在你的面前伫立着一座高山。但这既不是对数学认知的方式，也不是向公

¹ 本文译自：<http://www.ega-math.narod.ru/Math/Manin.htm?from=message&isappinstalled=0>。

² 1998 年在德国柏林举行的第 23 届国际数学家大会。



曼宁在讲学

众展示数学的方式,更不是数学的精华。尤其是当一些这样的问题被放进一个列表中,这个列表就像是一个关于世界大国的首都的列表:它只是传达了尽可能少的信息。事实上,我并不相信希尔伯特认为这是规划数学未来的方法。

问:您能否大胆地预测一下,在下一个世纪,什么样的数学方法会在数学中占主导地位?

答:这非常困难。我认为,在20世纪,数学是围绕纲领而非问题展开的。在有些时候,这些纲领是被明确制定的,而有些时候,它们则像潮流的趋势一样慢慢形成,比如数理逻辑与数学基础的发展。这明显是一个按照之前所说的方式而进行的发展过程。很明显,在康托(Georg Cantor)的发现之后,我们必须非常深入地思考我们看待无穷的方式,或者用朗兰兹纲领去理解伽罗瓦群。有一个纲领能和我们一起进入下一个世纪。这个纲领可以看作是数学的量子化。当你看到过去的二十年里有多少数学观念以新观念成为旧观念的量子化版本的方式发生改变(例如量子群、量子同调论和量子计算)时,你就会发现它是惊人的。我想,这样的改变在未来还会有很多。但这是非常奇怪的,因为实际上任何人都不会去设想出像这样的一个东西作为一般数学发展的纲领。这仅仅是为了理解物理学家们利用他们奇妙的直觉所发明的数学工具,并且从一个纯粹数学家的角度来看,他们所用的是一种富有刺激性但是比较粗心的方式。

问:从历史学的角度来看,您对20世纪怎么评价?这是一个重要的世纪吗?

答:我认为20世纪是一个重要的世纪。这个世纪的数学成功地协调和统一了不同领域,而且其规模是前所未有的。在这个统一之中,扮演着重要角色的是集合论。最初,康托提出“无限理论”作为数学的新篇章,但是集合论逐渐改变了它的地位,并且发展成为了一种普遍使用的数学语言。

据了解，从一个相当简短的基本术语和运算规则开始，一个人可以创造出递归的语言结构。而这一过程显然与微积分、概率论、数论、拓扑学、微分几何以及其他科目的创始人创造这些科目时所经历的是相同的。因此，整个数学界获得了一种普遍通用的数学语言。此外，因为集合论一方面允许集合理论和数学结构有所区别，另一方面又允许它们运用灵活的语言进行表达（符号、公式和计算），所以，集合论大大地减少了每个数学家在进行数学工作时左右脑之间的切换次数。集合论语言的双重功能成为发展新技术工具、解决旧问题和制定研究计划的基础。数学的多样性首先会与诸如科学界总体的迅速发展和物理学的突破性发现之类的外部现象联系在一起。在我看来，在过去的一百年里，数学领域并没有产生任何可以与量子理论或广义相对论相媲美的成果。但我相信，如果没有数学语言，物理学家甚至不能说出他们所观察到的是什么。物理学的发现和其采用的数学思想方法之间的相互关系导致了这些发现只能用数学语言来表达，这是非常奇妙的。从这个意义上来讲，20世纪势必会被视为一个具有突破性的伟大世纪。

问：关于这个世纪的数学是否已达到最高水平，您有没有一些看法？

答：在18和19世纪，当时的数学语言比现在我们所使用的模糊的多。我认为直到20世纪人们才开始重新构建数学语言的基础。当这个基础足够清晰的时候，人们就开始广泛探索并不断找到强有力的技术工具，使我们能够把几何直觉扩展到新的领域，比如拓扑、同调代数和代数几何。当技术的发展已经成熟，几个非常困难的问题也都在三十年之内被解决掉了，德利涅证明了韦伊猜想，法尔廷斯证明了莫德尔猜想，怀尔斯证明了费马大定理。他们所有人的工作都不可能在上个世纪完成，因为在那时，数学还不够发达。

问：一些数学家，一定程度上在考虑了计算机通用性的前提下，宣布完成证明。您对此作何评论？

答：如果你抛开证明谈论数学，你就是在谈论一些从本质上就矛盾的东西。证明不能消亡——只有和数学在一起的时候才行。但是数学作为人类文化中被接受的一部分是可以消亡的。我认为，在我们这一代人中，数学家们仍然在坚持做我们所能理解的数学。证明是让我们知道我们所思考的是否正确的唯一途径，这也是描述我们所见事物的唯一方法。证明不只是说服假想对手的论证过程，完全不是！证明是我们交流数学真理的方式。其他的一切——飞跃性的直觉，突然发现的喜悦以及没有根据但是强烈的信念——仍然只是我们的思维。并且，当我们进行一些计算机计算的时候，我们只是验证了在我们检查过的情况下，实际情况和我们的猜想一样。

问：最近报纸上有一则消息说，计算机通过搜索所有可能的办法证明了罗宾（Herbert Robbins）的一个猜想。

答：这当然是可能的。为什么不可能呢？如果你发明了一个好的证明方法，其中包括广泛的搜索或长时间的计算，然后你编写了一个能实现这个证



曼宁和夫人在一起

明策略的程序，这无疑是可行的。但是无论计算机是否辅助证明都各有利弊。一个好的证明是一个能让我们更加聪明的证明。如果证明的核心是大量的搜索和一连串的恒等式，这也许不是一个好的证明。如果一些东西是如此简单以至于在计算机屏幕上显示出结果就足够了，那么，它可能是不值得做的事情。智慧存在于万事万物的联系之中。如果我需要手工计算出 π 的前二十位数字，我在完成后肯定会变得更加聪明。因为我知道，如果我用已知的关于 π 的计算公式去计算 π 的前二十位数字，那肯定会花费我相当多的时间。所以我会设计出一些能减少我工作量的算法。但是当我在电脑中用其他人的程序库中的程序得到 π 的前两百万位数字的时候，我还是和以前一样，在智力上并没有任何提高。

问：如果您有一个漂亮的定理和一个同样漂亮但需要计算一千次的证明，您会介意把这个工作交给计算机吗？这是一个真正意义上的证明吗？

答：这将会像我在纸上所完成的证明一样是一个真正意义上的证明。用计算机证明的过程中，在程序设计中可能会出现错误，在执行计算的过程中可能会出现错误，并且最后在理解如何给所有情况进行分类时也可能发生错误。我们有一些需要使用计算机来证明的例子，例如四色问题和有限单群的分类。所以，在证明时仍心存疑惑和需要重新检查计算。但是证明中最重要的是，设想出以新角度看待问题的方法。

问：请允许我问您一个有关数学本质的问题。近几年来，数学界似乎在强调应用，您认为纯数学领域在与应用数学比较时是否会产生问题？您有没有觉得，未来经费只会倾向于应用数学？

答：应用数学确实比纯数学得到的经费多。但是我认为在分配有限的资源方面，这并不是经费的问题（因为纯数学不需要也不会消耗太多经费），而是公众注意力和公众价值观的问题。我看到我们的社会越来越脱离传统的启

蒙价值观。公众也不愿意在数学上有所花费。这可能是由大学教育造成的。如果数学成为了一个牺牲品，那么产生这个牺牲品的原因将是公众价值观变化的整体趋势，而不是因为经费都流向了应用。但是我确实认为，从分配给应用的数量资源和这种职业对年轻人的吸引力这两方面来看，经费将会继续向应用转移。应用数学和计算机模拟（大型计算机和数据库程序之类的东西）是有关系的。我曾经把高德纳的一篇报告翻译成俄语。在乌兹别克斯坦有一个关于花拉子米（Al'khorezmi）的专门会议。高德纳从一个有趣的陈述开始了他的报告。在他看来，计算机对于数学界最主要的贡献在于，计算机使得那些对数学感兴趣，并且有几分算法思维的人最终走上了数学的道路。现在他们可以去他们想要做的了。在此之前这种次文化是不存在的。我非常认真的对待这个观点，并且我相信，在未来潜在的数学家群体中会存在一个编写计算机程序的思想比证明定理的思想更优秀的群体。如果在上个世纪，他们可能已经完成了对定理的证明，但在这个世纪他们没有。我非常怀疑，如果在现代，欧拉可能会把更多的时间花费在软件上，例如他已经在计算月球位置表的工作中花费了大量的时间。并且我相信高斯也会花更多的时间坐在计算机屏幕前。

问：让我们回到应用数学的问题上。在很多时候，一个研究成果往往是由于数学因素而取得成功，但是计算机科学却获得了更多的荣誉，这种情况是真实存在的吗？一个典型的例子是计算机断层扫描。在和我谈过话的人中，从来没有人听说过拉东变换，可这是计算机断层扫描的核心，甚至受过教育的人都认为这是计算机科学家的工作。

答：这个问题的关键就在于，试图通过证明自己是有用的来为自己的担忧辩解的做法是人类天生的弱点。“有用”是一个工程师的词。无论你理解量子力学或芯片或其他什么，这都只是对于纸上公式的理解，是没有实用性的。但是如果它在实际情况中被使用或者变得工程化了，这就是有用的。

问：数学家是否应当更加积极主动？他们是否应该主动面向外界宣称“我们在这儿”？我们是否是因为不赞同这种做法以至于不宣传我们的成就呢？

答：我完全赞同这类“不情愿”。我是一个相当孤僻的人，并且我讨厌把我的观点强加到公众身上。假设我们正在创造某种文化价值，尽管在推广文化的过程中存在普遍问题，但是我认为所有好的事物终将会出现，这取决于公众买不买账。当然，我们之中的一些人可能会试图证明他们是重要的，但是我认为这非常困难。伦勃朗³怎么能反对他作为一个穷人而悲惨的死去的事实呢？他怎么能争辩呢？我确实不太了解数学到底是什

³ 伦勃朗·哈尔曼松·凡·莱因（Rembrandt Harmenszoon van Rijn, 1606-1669）是欧洲17世纪最伟大的画家之一，也是荷兰历史上最伟大的画家。画作体裁广泛，擅长肖像画、风景画、风俗画、宗教画、历史画等领域。中年遭遇不幸，晚年生活悲惨。

么。但文化与此相同，因为以同样的方式，我们并不知道伦勃朗的画的是什么，为什么他描绘的是人物？为什么是一个老人和背景？这为什么很重要呢？我们并不知道。这是文化的问题：你不能问“为什么”。

问：您认为数学在文化中扮演着一个什么样的角色？

答：我认为，所有人类文化的基础是语言，而数学是一种特殊的语言活动。数学语言是一种极其灵活的工具，被用以沟通生存的基本要素，表达情感、执行意志、创造诗歌与宗教的虚拟世界、诱惑和定罪。然而，自然语言不是很适合获取、组织和保持我们对大自然日益增长的理解，这是现代文明最具有特色的特征。亚里士多德可以说是最后一个将语言的能力扩展到极限的人。随着伽利略、开普勒和牛顿等人的研究，自然语言在科学研究中被降级成了一个高级传递者的角色，用于天文表编码、化学公式、量子场理论方程、人类基因组数据库以及在我们的大脑之间相互传递信息。使用自然语言学习和教授科学，我们带着我们的价值观和偏见，诗歌意向，对力量的热情和说谎的技巧。但是这些东西都不是科学论述中的必要的内容。而任何科学论述中必要的内容，都是通过数学或是一个由或多或少的结构化数据组成的长列表来执行的。正因为如此，我相信数学是文化中最了不起的成就之一，并且我以一个教师和研究者的身份专注于数学，在每一天的工作结束之后，我依然会对数学感到敬畏和钦佩。然而，我并不认为我能够在当代关于科学和人类价值的公开辩论中，有力地捍卫这一信念。

问：为什么您这么悲观？

答：我将通过提醒在当前的用法中，“文化”成为了一个深刻的自我参照词，来解释我的悲观主义。也就是说，人们想当然的认为文化的任何定义都是通过它们原有的文化背景确定的。哪怕后者也不明确。这意味着，没有客观的记述和对文化的评估来定义文化也是可能的。此外，任何有关权威的文化声明都会改变文化的公众形象，从而改变文化本身。最重要的是，现代文化的话语在很大程度上属于政治话语。当四十年前斯诺（C. P. Snow）开始关于双重文化讨论的时候，我们对这一切都不太了解。基本上，斯诺担心的是，在他周围，科学知识没有被看作是有教养的人所受的教育的有机组成部分这一事实，这与希腊人和莎士比亚正相反。此外，一个人可以公开地甚至是自夸地承认他或她对于物理学基本定律的无知，而不损害他或她作为一个有教养的人的形象。斯诺认为这是由于公众对



文化实际内容的扭曲看法所造成的。并且他希望公众辩论和教育改革能够帮助文化恢复平衡。

问：这两种文化的命题是否仍然相关？

答：他对我们的观察的相关性取决于我们认同他的理想化文化的能力，这种文化包括荷马和巴赫，伽利略和莎士比亚，托尔斯泰和爱因斯坦。恐怕这种能力在很大程度上丧失了。事实上，流行的多元文化思想塑造了许多同样健全的文化形象。以欧洲为起点培育出的深远的文化之所以能与其他文化地区相提并论，是因为像文化帝国主义和欧洲中心主义这样有着轻蔑的含义的名声在慢慢减少。环保主义者将科学和技术归咎于我们对它们的破坏性使用，从而进一步削弱了它们的文化吸引力。具有讽刺意味的是，科学家们为了证明自己的工作而使用同样的论点，现在转而反对他们。解构主义者和论述的后现代化趋势怀疑认可科学真理的基本标准，这些真理可以追溯到伽利略和培根时期。它们试图用极其随意的知识建构来替代这些基本标准。以这种方式，许多有影响力的思想家不只是忽视，而是积极地摒弃当代文化中对应的科学部分。我可能像我所做的一样认为这种情况令人遗憾，但在可预见的将来，我实在无法指望这种情况会得到改善。

问：让我们把话题转回到数学的未来，您个人是否有一个理论：“如果我活的足够长，我就会亲眼见证我所想看到的事物？”

答：我想亲眼见证的事物大多是由以下原因所产生的：在我的科学生涯中，我多次改变了我的课题，并且这不是因为我发现了更有趣的事情，而事实上我觉得一切都很有意思。但是我不可能在同一时间把每一件事情都完成，所以第二个最佳策略是转而掌握几个领域。我最感兴趣的两件事，一件是研究数论，另外一件是研究物理学。理解数论中的问题有助于我理解物理学中的问题，反之亦然。在我的心中一个文艺复兴时期的词语“*varietà*”具有至高无上的地位，而这个词的大意是丰富多彩的生活和世界，与各种经验和思想相匹配，由我们努力仿效的伟大思想所实现。



崔继峰，上海交通大学博士，现任教于内蒙古工业大学理学院数学系，美国工业和应用数学学会（SIAM）会员，中国数学学会会员，硕士生导师。



杨城毅，1998年11月出生于江西宜春，吉林大学数学学院统计专业2016级本科生。