

看光飞驰： 压缩传感和世界上最快的二维相机

Hans Kaper / 文 丁 玖 / 译

可能需要一年、十年，甚至一百年的时间，但是美丽的想法总能找到它们的应用之路。

在普通数码相机中，相机的传感器收集大量信息。该信息立即被压缩软件处理，然后以小得多的量被存储。这个过程需要时间，主要是因为所谓的“快门时滞（shutter lag）”。是否可以收集仅仅所需的信息，从而减少甚至消除快门时滞？由于一些聪明的物理和压缩传感，答案是“是的”。

压缩或压缩传感的数学概念可以追溯到 20 世纪 70 年代，那时凸规划中 ℓ^1 范数的优越性终被确认。这个理论在 20 世纪 90 年代迅速发展，21 世纪早期出现在 Candès, Tao, Romberg 及 Donoho 的工作中^{1,2,3}。他们总体上意识到可以通过捕获稀疏信号中的有用信息并将其压缩成少量数据来设计高效的传感或采样计划。

这些美丽的数学思想已经在世界上最快的二维相机中找到了应用。通过添加数字微镜设备进行空间编码和应用压缩传感重建算法，王立宏和圣路易斯华盛顿大学的同事将传统的一维条纹相机转换为二维超快速成像摄像机。现在，人类第一次可以看到飞行中的光的移动（见图 1）。

压缩传感在小得多的 k - 维向量 $y = Ax$ 中，而不是在大的 n - 维向量 x 中，收集关于信号或图像像素的所有信息。这里， A 是代表测量过程的一个（矩形）矩阵。如果信号稀疏，从 y 恢复原始信号 x 的 k 值不需要非常大；在实践中，它通常只需不超过 x 稀疏度的四倍。

¹ Candès, E., & Tao, T. (2006, December). Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies? IEEE Trans. Inform. Theory, 52(12), 5406–5425.

² Candès, E., Romberg, J., & Tao, T. (2006, February). Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. IEEE Trans. Inform. Theory, 52(2), 489–509.

³ Donoho, D. (2006, April). Compressed sensing. IEEE Trans. Inform. Theory, 52(4), 1289–1306.

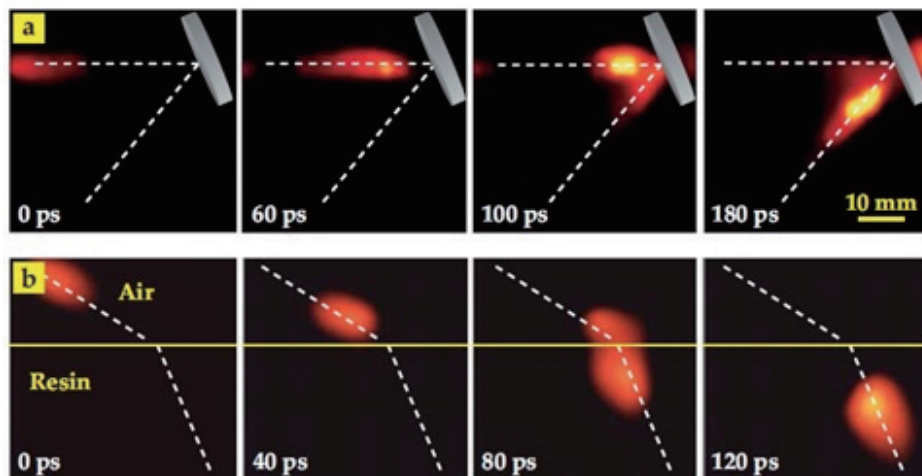


图 1

压缩传感

压缩传感是基于大多数信号或图像仅包含少量关键信息的观察。通过有策略地丢弃不必要的数据，可以减少图像尺寸，同时保留足够的信息以忠实地重建原始图像。然后使用线性规划算法通过编码数据重构完整图像。为了实现这一点，压缩传感依赖于两个原则：稀疏度和不连贯性。稀疏度意味着当以适当的基底表示时，图像具有简明的表示，而不连贯性则表明与所感兴趣的图像不一样，采样/传感波形在稀疏基底上具有非常稠密的表示。因此，压缩传感是一种简单有效的信号采集方案，以低信号独立的方式进行采样，然后运用计算能力对一组不完整的测量进行重建。

不定系统 $Ax = y$ 可以通过在约束条件 $y = Ax$ 下最小化 x 的 ℓ^1 -范数 $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ 的非常有效的方式求解。这个凸问题可以转化为线性规划问题，对此我们有快速算法。当信号足够稀疏时，通过 ℓ^1 -范数的最小化来恢复图像可证明是精确的⁴。

信号和图像很少是完全稀疏的；更常见的是它们近似稀疏。此外，测量数据总会有少量噪音的破坏；至少，数据的小扰动应该导致重建的小扰动。因此，出于实际的原因，压缩传感必须能够处理几乎稀疏的信号和噪声。如陶哲轩等⁵所示，如果 x 不很稀疏，那么被恢复信号的质量就与人们好像事先知道 x 最大值的位置并决定直接测量那些量所做的一样好。换句话说，在对 x 完全并准

⁴ Candès, E., & Romberg, J. (2007). Sparsity and incoherence in compressive sampling. *Inverse Prob.*, 23(3), 969985.

⁵ Candès, E, Romberg, J., & Tao, T. (2006, August). Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Comm. Pure Appl. Math.*, 59(8), 1207–1223.