关于罗素悖论问题、哥德尔
不完全性定理问题等基础问题的讨论

北大附中学生 高伟辰

关于本文：本文希望读者有一些基本的关于集合、映射、初等数论、欧氏几何方面的知识。另外，读者可能会觉得以下概念或记号对于阅读本文是有用的：

公理体系：我们研究一类数学对象时，我们希望建立一个能够把我们的研究置于其上的逻辑基础。但在逻辑推导中，只能由旧的结论推出新的结论，因此随着逻辑链条向回溯，必定能够找到推理的起点，这些起点我们就称之为公理，一些公理就构成一个公理体系。

集合构建记号：$\{x|\varphi(x)\}$，代表一个集合。其中$\varphi(x)$是关于元素的一个性质，比如："x 是自然数"，而$\{x|\varphi(x)\}$这个集合的元素正是所有满足$\varphi(x)$的元素，例如仍以刚刚的"x 是自然数"为例，那么$\{x|\varphi(x)\}$就是自然数集$\mathbb{N}$。有时候我们并不希望包含所有满足$\varphi(x)$的元素，而是只希望包含某个特定集合 I 中满足$\varphi(x)$的元素，此时记作$\{x \in I|\varphi(x)\}$，例如取$\varphi(x)$为$x \leq 0$，则$\{x \in \mathbb{N}|\varphi(x)\}$为$\{0\}$（尽管$\{x|\varphi(x)\}$还包括 0 之外的元素，如$-1$）。

ZFC：即包含选择公理的策梅洛 – 弗兰克尔集合论，是现在数学界主流的集合论的公理体系。**ZFC** 中的对象被完

全限制在集合之中，而$\in$（属于）便成了集合与集合间的关系，也因此，**ZFC** 中的集合，其元素均是集合。但这并不是一种多么大的限制，因为我们所熟知的各种概念，如数、映射、函数、数列、点、图形，甚至讨论数学的一些语句，均可以表示为集合的形式（如作为自然数的 0，其集合论定义为$\emptyset$）。

1. 关于罗素悖论的问题：

问 1：什么是罗素悖论？

答：我们举一个通俗的例子：理发师悖论。假如某城市中有一个理发师，他宣称给且仅给所有不给自己理发的人理发，那么他能否给自己理发呢？假如他给自己理发，那么他是给自己理发的人，那么他就不能给自己理发；反之，如果他不给自己理发，那么他就必须给自己理发。

类似地，在集合论中考虑这么一种情况：有的集合，它的元素是不包含自身的，比如说$\{1,2,3\}$，显然$\{1,2,3\}\notin\{1,2,3\}$；而有的集合是以自身为元素的，比如所有集合的集合。我们考虑一下所有前一类集合所构成的集合 A（所有不给自己理发的人），换言之$A=\{x|x\notin x\}$。那么$x\in A$就等价于$x\notin x$，而对于$x=A$这就有$A\in A$等价于$A\notin A$，因而无论 A 是否是自身的元素（是否给自己理发），都会导致悖论，这就叫罗素悖论。

问 2：为什么一个悖论的出现如此严重？

答：由于爆炸原则。这个原则是说，从悖论出发，一切命题都可以被证明，我们对此举一个例子：

假设（纯粹地出于举例的目的）“所有柠檬都是黄的”以及“不是所有柠檬都是黄的”均成立，那么“所有柠檬都是黄的 或者 圣诞老人存在”就是成立的（既然“所有柠檬都是黄的”）；但是，A 的否命题成立时“A 或 B”也成立，显然可以得出 B 成立，因此由“不是所有柠檬都是黄的”再加上“所有柠檬都是黄的 或者 圣诞老人存在”自然可以得出“圣诞老人存在”成立。这个例子推而广之就是爆炸原则。（该例子来自英文维基百科）

问 3：罗素悖论在 **ZFC** 中是如何被解决的呢？

答：**ZFC** 中不再令记号$\{x|\varphi(x)\}$都有意义了，准确地说，**ZFC** 中只有对已经构造出的集合 I，$\{x\in I|\varphi(x)\}$是直接就有意义的。而在此种情况下，悖论就不复存在了。还是刚刚理发师悖论的例子，假如理发师只是针对城市的中心城区中的人，给且仅给所有不给自己理发的人理发，那么只要他自己不在中心城区，悖论不就自然不存在了嘛。

2. 关于哥德尔完全性定理的问题：

问 4：什么是哥德尔完全性定理？

答：为此我们有必要首先理解什么是一个公理系统的模

型：

创建一个公理系统，我们是意在研究一类数学对象，比方说我们以自然数为例，我们可以有这么一条公理：“任何对象 x 加 1 都不等于 0”。但不是只有自然数满足这句话，自然数的任意子集，比方说$\{1, 2, 3\}$，也满足这句话；再比方说，$\{\cdots, -7, -6, -5, 2, \infty\}$也满足这句话。既如此，我们给出一个公理系统，我们不能阻止别人对这个公理系统要研究什么另做解释，一种“解释”，也就是一类满足我们的公理的对象，就称之为这个公理系统的一个模型。模型本质上就是对公理中的变量做了限制，比如说刚刚的例子中，“任何对象 x 加 1 都不等于 0”，我们取一个它的模型，比方说$\{1, 2, 3\}$，实际上就是把 x 限制在$\{1, 2, 3\}$内，而在此条件下该句话确实被满足了。

以此为基础我们就可以说明什么是哥德尔完全性定理了：

假如一个公理系统，在它的所有模型中一个结论都成立，也就是说无论如何解释这个公理系统，我们都能得到这个结论，就可以说这个公理系统“必然地得出”这个结论。

另一方面，从这个公理系统出发，我们可以依托符合逻辑的方式去得出结论。比方说由“$x + 1 = 2$”出发，我们可以合乎逻辑地得出“$x = 1$”。这样由逻辑的方式去得出结论，我们就称这个结论在这个公理系统下可证。

“必然地得出”和“可证”看起来是两个概念，但我们不妨考虑一下这个例子：仍以“任何对象 x 加 1 都不等于 0”为例，从“必然地得出”这个角度出发，显然任何满足这句话的模型都不可能包含-1, 因此该公理可以必然地得出“-1 不存在”。而从“可证”的角度出发，从“任何对象 x 加 1 都不等于 0”出发，运用“-1 加 1 等于 0”这个事实，我们可以合乎逻辑地得出“-1 不存在”。

从刚刚这个例子中我们可以看出，“必然地得出”和“可证”有时是等价的。而哥德尔完全性定理说的是，“必然地得出”和“可证”始终是等价的，两者不过是从不同的角度描述同一个东西罢了。

3. 关于哥德尔不完全性定理的问题：

问 5：哥德尔不完全性定理是什么？它是如何被证明的？

答：想要理解这一点，我们要先理解两个概念：哥德尔编码和公理体系的一致性与完全性。我们从哥德尔编码开始：

1. 哥德尔编码：这是一种把语言编码成自然数的方法。懂一些计算机的人可能知道，计算机所储存的都是数字，字符也是以数字的形式储存的，例如英文字符便是通过 ASCII 编码转为数字的（如 HELLO 的 ASCII 编码为 72 – 69 – 76 –

76 – 79）。哥德尔编码是类似的，它先把数学中的所有符号统一编码。之后哥德尔借助自然数的质因数分解给出了一个把自然数的有限序列再做编码的方式。这样，既然一个语句可以理解为一个字符的有限的序列，而一个证明又可以理解为一个语句的有限序列，那么命题（作为语句）和证明便都获得了自己的自然数编码，有关证明方面的一些问题也就变成了关于自然数的问题。

2. 公理体系的一致性与完全性：一个公理体系可以证明一些命题，如果它能证明的命题中不会出现自相矛盾的，比如“$0 \neq 0$”，那么就管这个公理系统叫一致的。

在说完全性之前，我们先考察一个与变元有关的问题，考虑一下这么一个式子：

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

这里面的 x 和 i 地位是不同的，x 的变化（如变为 y）会导致式子结果的变化，i 的变化（如变为 j）则不会，究其原因，在于 i 被求和号Σ“约束”住了。

对于命题而言情况是类似的：“$x = y$”这句话之中，x、y 都没有被约束，因而这句话的正确性是在变化的——x、y 的不同取值会导致这句话时而正确，时而错误；但若是“对任意的 x、y，$x = y$”这句话，由于 x、y 均被“对任意的”一词给约束起来，所以该句话的正确性是确定的——它是错

误的。从这个例子我们可以看出，只有一句话中的变元都是约束着的，讨论这句话的真伪才有意义。

返回到完全性的问题上，对一个公理体系，如果任意变元均被约束起来的语句在其中要么能被证明，要么能被证伪，则这个公理体系，它的能力已经“充分强”了，我们就称它为完全的。

有了这两个概念我们就可以说明哥德尔不完全性定理了：

哥德尔不完全性定理针对的是有基本的算术能力（加法和乘法的基本性质）的自然数的公理体系，同时也针对能够表达出自然数的其他公理体系（如 **ZFC**），哥德尔第一不完全性定理表明这样的系统如果是一致的就一定不是完全的。大概是这样证明的：我们已经讨论了哥德尔编码，它可以用来表示命题、证明这些概念。通过这种方法，哥德尔在自然数中构造出了一个命题，说的是：“本命题不可证明”。这个命题确实不能证明，否则它就同时是不可证明和可证明的；但若它可以被证伪，就是可证明的，也矛盾，所以它必然既无法证明也无法证伪（虽然说这个命题确实是真的），这也就说明了所用的公理体系是不完全的。

哥德尔第二不完全性定理可以自第一不完全性定理证明的思路得出，因为只要假定一致，就可以由刚刚的方法推出来“本命题不可证明”是不可证明的，但这也就是“本命

题不可证明”本身。所以在公理体系内是不可能能证明出自己这个公理体系是一致的，否则将证明“本命题不可证明”，而这是不可能的。

问 6： 既然哥德尔不完全性定理说这样的体系不能证明自己是一致的，那么它是否会证明自己是不一致的？

答： 这不好说，比方说，既然 **ZFC** 是无法证明“**ZFC** 一致”的，那么我在 **ZFC** 中加入“**ZFC** 不一致”显然是不会破坏 **ZFC** 的一致性的，记这个新的公理体系为 **ZFC***。但“**ZFC** 不一致”正是“**ZFC** 能推出矛盾的结论”。若一个公理体系能推出矛盾的结论，显然对它做任何扩充都仍旧能推出矛盾的结论。**ZFC***作为对 **ZFC** 的扩充，所以显然地，“**ZFC** 不一致”蕴含“**ZFC***不一致”，所以 **ZFC***既然有一条公理是“**ZFC** 不一致”，显然便可以证明“**ZFC***不一致”。（带引号的是公理体系内说的话，不带引号的讨论的是事实、实际情况）

问 7： 但这不是很荒谬吗？一个一致的公理体系却可以证明自己不一致？

答： 并非如此，我们思考一下，“**ZFC** 不一致”到底是什么？它其实是在说“**ZFC** 可以推出矛盾的结论”，也就是“存在一个从 **ZFC** 到矛盾结论的证明”。这里的“证明”，按照哥德尔编码，被转换成了一个数，也就是说“存在一个从 **ZFC** 到矛盾结论的证明”是一个关于数的命题。

我们举一个例子，“存在对象加 1 等于 0”在自然数里自然是错的，讨论自然数的公理体系显然不应该能够证明这个命题，但在整数、有理数、实数中呢？它就变成了对的。“存在一个从 ZFC 到矛盾结论的证明”这个关于数的命题是类似的，它在自然数里是错的，但这不意味着它在别的类型的数中就还是错的。一个一致的公理体系，当然不必要是谈论自然数的，如果它是谈论实数、有理数的，它或许就可以证明“存在一个从 ZFC 到矛盾结论的证明”这个命题嘛。之前举的 ZFC*这个例子，这个公理体系就不能用来谈论自然数，但好在 ZFC 本身是可以谈论自然数的，所以它是绝对不会证明自己不一致的。

当然这一切讨论的前提是 ZFC 确实是一致的，否则也没必要做这些讨论了。

问 8：把“ZFC 确实是一致的”当作前提？难道这一点不确定吗？

答：ZFC 是一个很强大的公理体系了，基本包含了所有我们可用的数学工具，ZFC 都无法证明“ZFC 一致”，那我们又如何确定呢？所以说这一点目前无法确定，将来很可能也永远（或至少很长时间内）无法确定。

4. 关于集合元素的确定性的问题：

问 9：关于集合的性质，有一个所谓的“元素确定性”，

说对于某个特定的元素 x 和集合 A，$x \in A$和$x \notin A$有且仅有一者成立，这在 **ZFC** 中该如何理解?

答：我们把这件事拆成两部分来讨论：1. $x \in A$和$x \notin A$中是否至多有一者成立；2. $x \in A$和$x \notin A$中是否至少有一者成立。

1 是无论如何没有问题的，只要 **ZFC** 一致即可（如果 **ZFC** 不一致，也就是 **ZFC** 中有悖论，那么根据前面说过的爆炸原则，$x \in A$和$x \notin A$这两个命题便都可以被证明了）。

2 则并不成立了，我们举个例子：

首先，在一个公理体系内，命题可以分为 3 类：可被证明；可被证伪（否命题可被证明）；不可证明不可证伪。回忆哥德尔完全性定理说的是“可证”和“必然地得出”（所有该公理体系的模型中均成立）是一回事，那么可被证明、可被证伪、不可证明不可证伪就分别对应的是：在所有模型中均成立、在所有模型中均不成立、在有的模型中成立有的模型中不成立。

接下来，记$A = \{0, 1\}$，我们使用$\{x \in A | \varphi(x)\}$这个记号从中去提取元素。比如说$\{x \in A | x = 0\}$就是$\{0\}$。我们选择类似于“本命题不可证明”或者“**ZFC** 一致”这样的一个不可证明不可证伪的命题，记作σ，它在 **ZFC** 有的模型中成立，有的模型中不成立。那么，考虑命题“σ 或者 $x = 0$”，在σ成立的模型中，x 无论是几这个命题都是对的；但在σ不成

立的模型中，x 只能是 0。因此$\left\{x\in A\middle|\text{“}\sigma \text{ 或者 } x=0\text{”}\right\}$在$\sigma$成立的模型中相当于不对 x 做限制，等于$\{0,1\}$；但在σ不成立的模型中，x 只能是 0，从而这个集合也等于$\{0\}$。那么 $1\in\left\{x\in A\middle|\text{“}\sigma \text{ 或者 } x=0\text{”}\right\}$就在 **ZFC** 有的模型中成立，有的模型中不成立，进而，它是不可证明不可证伪的，也就是说$x\in A$和$x\notin A$都不能被证明成立。

5. 关于欧氏几何模型的问题：

问 10：我听说数学家希尔伯特构建了一个欧氏几何的公理体系，它只有唯一的模型，这里“模型”一词当作何解释？

答：正是前面我们所说的模型的意思，也就是一组满足这个公理体系的对象。

问 11：那么所谓“只有唯一的模型”又当作何解释？

答：首先说，这里“唯一”并不真的唯一。我们举一个例子：

比方说实数集$\mathbb{R}$，其上有$<$这个序关系，四则运算。假如我们将$\mathbb{R}$中的 0 直接改成比如说“零”这个汉字，但是仍旧让它小于所有正数，大于所有负数，在四则运算中依旧遵循原先 0 的运算方式。那么这样的改变其实丝毫没有破坏$\mathbb{R}$的性质，因此，描述实数的公理体系，也就是以$\mathbb{R}$为模型的，显然这样改变之后也以之为模型。

再比如说，我们不选用$\mathbb{R}$，而是指定二维欧式空间中的

某条特定的直线，定出它的正方向之后，小于和四则运算均可以在其上施行，这条直线也保留了实数所有的性质。

再举一例，比如$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$这个开区间，乍看它好像没有保留实数的性质，但是仔细思考，就知并非如此：<在其上依旧是没有端点的，因为数总是可以无限地接近$-\frac{\pi}{2}$或$\frac{\pi}{2}$，但在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$之中却到不了$-\frac{\pi}{2}$或$\frac{\pi}{2}$。至于加法，如果我们把“$x+y$”理解为$\arctan\left(\tan x+\tan y\right)$，那么这个新的“加法”运算在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$之中显然维持了原先加法的性质（运算结果仍在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$之中，仍旧满足交换律、结合律等），其他的运算类似处理，我们就可以知道，$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$其实也是保留了$\mathbb{R}$的性质。

上边这些例子的共同点是什么呢？我们不难发现，把 0 换成“零”的$\mathbb{R}$、二维欧式空间中的某条特定的直线以及$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，它们都能与$\mathbb{R}$之间建立一一映射，也就是说，两者的元素之间可以一一对应上（对于$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$这个例子，$y=\tan x$就是一个一一对应）。若能够一一对应上，那么若有公理体系以第一者为模型，就必然也会以第二者为模型。而在说到“只有唯一的模型”时，其实我们指的是所有的模型之间都可以建立一一对应，从而在这种意义下是唯一的。